

格子量子色力学における重いクォーク・  
反クォーク間のポテンシャル  
The static  $q\bar{q}$  potential in lattice QCD

提出者 木村 和弘 (1079023E)

所属 広島大学理学部物理科学科  
ハドロン物理学

指導教官 平田 道紘

[提出日 平成 14 年 2 月 8 日]

## Abstract

クォークがハドロンのなかでは存在できるが、単独では存在できないということを「クォークの閉じ込め」と言う。クォークの閉じ込めのような非摂動的な扱いが必要になる問題に対して格子量子色力学が有効です。その格子量子色力学から重いクォーク間のポテンシャルを求め、クォークの閉じ込めを示したい。

格子ゲージ理論において $R \times T$ の長方形に沿ってリンク変数を掛け合わせトレースしたものをウィルソンループと言う。そのウィルソンループの期待値を、時空を格子上に離散化し、モンテカルロシミュレーションで数値的に求め、そこから重いクォーク間のポテンシャル  $V(R)$  を求めた。その値に  $Y = A + B X + C / X$  でフィッティングすると  $[X = R, Y = V(R)]$ 、 $B$  が有限な数値をもつ。つまり、重いクォーク間のポテンシャルが線形型のポテンシャルをもっているので、クォークの閉じ込めが起きている。すなわち、クォークの閉じ込めが示せた。

# 目次

<b>1</b>	<b>序論</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>量子色力学 (QCD)</b>	<b>5</b>
2.1	クォークとクォークの閉じ込め	5
2.2	ゲージ理論とQCD (量子色力学)	6
2.3	非可換ゲージ理論	7
2.3.1	局所ゲージ変換	7
2.3.2	ゲージ不変なラグランジアン密度	10
2.4	時空間のユークリッド化	11
<b>3</b>	<b>格子ゲージ理論</b>	<b>12</b>
3.1	空間と虚時間の格子	12
3.2	格子ゲージ理論の作用	12
3.3	量子化	16
3.4	統計力学との同等性	17
<b>4</b>	<b>漸近的自由とスケーリング則</b>	<b>18</b>
4.1	漸近的自由	18
4.2	スケーリング則	18
<b>5</b>	<b>クォークの閉じ込めと格子ゲージ理論</b>	<b>20</b>
5.1	ウィルソンループ	20
5.2	強結合展開	22
5.3	連続極限における string tension	24
5.4	クォークの閉じ込め	25
<b>6</b>	<b>モンテ・カルロ・シミュレーション</b>	<b>26</b>
<b>7</b>	<b>シミュレーションによる測定結果</b>	<b>27</b>
7.1	アベレージプラケットの測定	27
7.2	ウィルソンループの測定	28
7.3	string tension の測定	29
7.4	重いクォーク・反クォーク間のポテンシャルの測定	32
<b>8</b>	<b>考察</b>	<b>37</b>

# 1 序論

純粋な量子色力学 (QCD) のラグランジアンから強い相互作用を研究する方法は、現在、大きく分けて摂動論による方法と計算機を用いた格子量子色力学 (格子 QCD) による方法の 2 つである。

クォークの閉じ込めが起こる所では低エネルギー領域であるので、摂動論では記述できない。そのような非摂動的な扱いが必要になる問題に対して格子 QCD が有効である。QCD は本来  $SU(3)$  のゲージ理論であるが、この論文では、現実の  $SU(3)$  のゲージ理論のかわりに  $SU(3)$  に多くの共通性 (漸近的自由など) をもつ  $SU(2)$  の格子ゲージ理論からクォークの閉じ込めなどの数値的な検証を行う。

空間  $d$  次元、時間 1 次元の量子化された場の理論をユークリッド化して経路積分の形式で書くと、空間  $d+1$  次元の統計力学と同等になることが示せる。このような量子力学と統計力学との同等性を導入することが数値的な検証をするために必要なことである。

この論文では、string tension や重いクォーク間のポテンシャルを数値的に求め、クォークの閉じ込めや漸近的自由との関連やクォークの閉じ込めが起きているかについて研究する。

2 章から 6 章までシミュレーションを行うための準備をする。2 章ではクォークの閉じ込めを説明し、連続理論での定式化を行う。3 章は、2 章の非可換ゲージ理論を格子上で定式化する。4 章では、漸近的自由から連続理論でのスケールリング則についてしらべる。5 章では、4 章における格子ゲージ理論で重要な役割を果たすウィルソンループについて調べ、クォークの閉じ込めとの関係を調べる。6 章では、モンテ・カルロ・シミュレーションを説明する。7 章では、モンテ・カルロ・シミュレーションによる測定を行い、クォークの閉じ込めを議論する。最後に 8 章で結果をまとめる。

## 2 量子色力学 (QCD)

### 2.1 クォークとクォークの閉じ込め

素粒子には、大きく分けて3種類あり、ハドロン（原子核を構成している陽子、中性子、 $\pi$ 中間子など）と、レプトン（電子など）、ゲージ粒子（グルーオン、光子、重力子など）である。

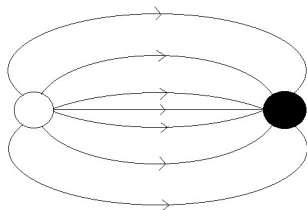
この中のハドロンは、100種類以上あり、さらに基本的な粒子クォークから構成されている。ハドロンは、バリオン（スピンの半奇整数）とメソン（スピンの整数）の2つから構成されている。バリオン（フェルミオン）は、陽子、中性子などでクォーク3個、メソンは、 $\pi$ 中間子などでクォークと反クォークから構成されている。これらのクォークはグルーオン（粘着子）によって結合されている。クォークとグルーオンは、QED（量子電磁気学）における電子と光子にそれぞれ対応している。

クォークは、少なくとも6種類あり、この6種類の自由度をフレーバー（香り）と言う。6種類それぞれに3種類のカラー（色）電荷をもつ。クォークが、陽子、中性子のなかでは存在できるが、単独では存在できないという「クォークの閉じ込め」という。

「クォークの閉じ込め」を示すためにクォークの代わりに+と-電荷で考えてみよう。周りに完全反誘電体 ( $\epsilon = 0$ ) の所に+と-電荷を置くと図F 2-1のようになる。 $V(R)$ は

$$V(R) = CR \tag{1}$$

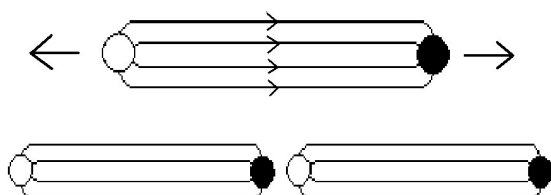
となる（C：定数、R：+と-電荷の距離）。



F2-1  
完全誘電体(真空)の所に、+電荷(クォーク)と-電荷(反クォーク)を置いた時の電気力線(ストリング)の図。

これから+と-電荷の間に働く引力が距離がどんなに離れても一定であるので、+と-電荷を引き離すには無限大の仕事が必要である。その

ため、クォークと反クォークを切り離すことはできない。しかし、実際はある所まで行くと対を生成して電気力線が切れる (F 2-2)。



F2-2  
メソンの中のクォークと反クォークを引き離そうとすると、切れて切り口にクォークと反クォークが生じて、メソンが発生する。

これと同様のことがクォークにも言えて電荷の代わりに色電荷を置き完全反誘電体 ( $\epsilon = 0$ ) の代わりに真空にする。そして電気力線の線をストリング (弦) と言ひ、クォーク間に働く力をストリングテンションと言ひ。

上の議論から系の全色電荷が'0'にならないと系のエネルギーが無限になってしまう。そうであるので、 $V(R) = CR$ の時、「閉じ込め」が起こっていると考えることができる。

## 2.2 ゲージ理論とQCD (量子色力学)

「物理法則は、各時空点における内部空間の座標系の任意の変換 (ゲージ変換) に対して不変である。」と言うゲージ原理から導かれる理論をゲージ理論と言ひ。この理論から電荷を測るゲージを各時空点で任意に選んでも物理法則は、不変である。というゲージ原理を要請すると電荷と結びついた力を媒介するゲージ場が現れ、ゲージ場と荷電粒子場との相互作用が最小相互作用という形で自然に現れる。ゲージ理論では、力の法則がユニークに導かれる。

ゲージ原理を要請すると、ゲージ場の粒子 (ここでは光子) は質量がゼロでないといけない。

この荷電粒子の電磁相互作用のゲージ場つまりQED (量子電磁気学) を手本にして 1.1 で述べたように 3 種類の色のついたクォークの、強い相互作用のゲージ場を作る。これをQCD (量子色力学) と呼ぶ。

また、QEDにおけるゲージ変換は 1 成分のユニタリー変換であるので、 $U(1)$  ゲージ理論であり、 $U(1)$  群は可換群であるので、可換ゲ-

ジ理論と呼ぶ。それに対し、QCDにおけるゲージ変換はN成分の特殊ユニタリー変換であるので、SU(N)ゲージ理論であり、SU(N)群は非可換群であるので、非可換ゲージ理論と呼ぶ。

## 2.3 非可換ゲージ理論

### 2.3.1 局所ゲージ変換

群GのN次元基本表現に属する質量mのフェルミオン場 $\psi(x)$ を考える。したがって $\psi(x)$ がN成分ベクトルであるので、

$$\psi = \psi_i(x) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi} = (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_N) \quad (2)$$

であり、これはSU(N)のN次元基本表現と呼ばれる。系の場を一般に $\psi_i(x)$ とすると

$$\psi'_i(x) = U_i^j \psi_j(x) \quad (3)$$

$$= [\exp(i\theta^a T_a)]_i^j \psi_j(x) \quad (4)$$

あるいは、単に $\psi'(x) = U \psi(x)$ と書く。ここで $T_a$ は、無限小の生成子と呼ばれ、一般に $N \times N$ のエルミート行列である。 $T_a$ の規格直交化を

$$\text{tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2} \delta_{ab} \quad (5)$$

ととることになると、SU(2)の場合、生成子 $T_a$ は、パウリ行列の1/2倍であり

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{1}{2} I, & T_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ T_2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, & T_3 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 $I$ は単位行列。一般に生成子 $T_a$ は特定の交換関係

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c \quad (7)$$

を満たし、係数は構造定数と呼ばれる。任意の行列 $T_a$ の交換子に対し

$$[T_a, [T_b, T_c]] + [T_b, [T_c, T_a]] + [T_c, [T_a, T_b]] = 0 \quad (8)$$

のようにヤコビ恒等式が成立する。

(8) 式に (7) 式を代入すると

$$f_{bcd}f_{ade} + f_{cad}f_{bde} + f_{abd}f_{cde} = 0 \quad (9)$$

が成立する。

自由場の Lagrangian 密度  $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \quad (10)$$

である。これに対して変換行列  $U$  が時空座標に依存していないなら不変になる（大局的変換）。しかし、相対論で考えると空間的に離れた時空点どうしは互いに全く勝手に変換行列  $U$  がとれるはずである。

ここでゲージ原理を要求し、変換パラメーター変換が時空座標  $X$  に依存する局所的（local）変換をする。

$$\psi'_i(x) = U_i^j \psi_j(x) \quad (11)$$

$$= [\exp(ig\theta^a(x) T_a)]_i^j \psi_j(x) \quad (12)$$

しかし、(12) が  $\xi$  に対して不変にならない。そこで不変であることを要求する。ここで、都合上、 $\theta^a$  を結合定数  $g$  だけスケールを、変えて  $g\theta^a$  とする。

この局所不変性を実現するためにゲージ場を導入する。そこで点  $x$  におけるベクトル  $\psi_i(x)$  を無限小離れた点  $x + dx$  へ平行移動した、点  $x + dx$  におけるベクトル  $\tilde{\psi}_i(x + dx)$  を

$$\tilde{\psi}_i(x + dx) = \psi_i(x) + igA_{\mu i}^j(x)\psi_j(x)dx^\mu \quad (13)$$

で定義する。ここで  $A_\mu = A_{\mu i}^j$  行列は、ゲージ場を表す。座標軸の無限小回転であるため、ゲージ場  $A_\mu(x)$  はリー代数において

$$A_{\mu i}^j = \sum_{a=1}^N A_\mu^a(x)(T_a)_i^j \quad (14)$$

と、表すことができる。これは、生成子  $T_a$  の線形結合になっている。

(13) の  $\tilde{\psi}(x + dx)$  とベクトル  $\psi(x + dx)$  の差を求めると、

$$\psi(x + dx) - \tilde{\psi}(x + dx) = (\partial_\mu\psi(x) - ig_0A_\mu(x)\psi(x))dx^\mu \quad (15)$$

$$\equiv D_\mu\psi(x) dx^\mu \quad (16)$$



となる。(16)も  $U(x+dx)$  で変換される共変な量である。ここで、 $D_\mu\psi(x)$  は共変微分。すなわち、(16)の両辺で(12)の変換を行い  $dx$  の一次の量までとれば

$$(D_\mu\psi)'(x) = U(x)D_\mu\psi(x) \quad (17)$$

となる。(17)が任意の場  $\psi(x)$  の上で成り立つことから、共変微分演算子  $D_\mu(x) = \partial_\mu - ig_0 A_\mu(x)$  が

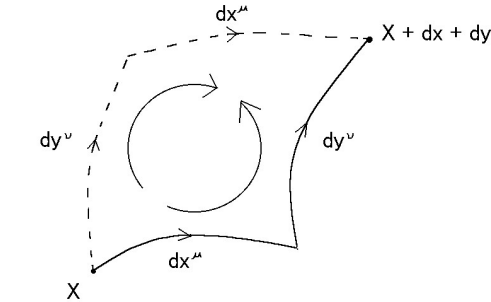
$$D_\mu(x) \rightarrow D'_\mu(x) = U(x)D_\mu(x)U^{-1}(x) \quad (18)$$

と変換する。ゆえに、ゲージ場は、

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = \frac{i}{g}U(x)\partial_\mu U^{-1}(x) + U(x)A_\mu(x)U^{-1}(x) \quad (19)$$

と書くことができる。(12)と(19)の変換を合わせて局所ゲージ変換と呼ぶ。

次に、場の強さと呼ばれる量を定義する。



F2-3  
反時計回りと時計回りの二通りの経路に沿って行う

点  $x$  におけるベクトル  $\psi(x)$  を点  $x + dx + dy$  に平行移動でもっていくのに、図 F2-3 のように  $\swarrow$  (反時計回り) と  $\searrow$  (時計回り) の二通りの経路に沿って行い、その差を計算する。まず、 $\swarrow$  から、

$$\begin{aligned} \psi_{\swarrow}(x + dx + dy) &= \psi(x + dx + dy) - D_\mu\psi(x + dy) dx^\mu \\ &\quad - D_\nu\psi(x + dx) dy^\nu + D_\nu D_\mu\psi(x) dx^\mu dy^\nu \end{aligned} \quad (20)$$

次に、 $\searrow$  を計算する。

$$\begin{aligned} \psi_{\searrow}(x + dx + dy) &= \psi(x + dx + dy) - D_\nu\psi(x + dx) dy^\nu \\ &\quad - D_\mu\psi(x + dy) dx^\mu + D_\mu D_\nu\psi(x) dx^\mu dy^\nu \end{aligned} \quad (21)$$

(20) は (21) に点  $x + dx + dy$ での共変量であるから、その差

$$\Delta\psi(x) = \psi_a(x + dx + dy) - \psi_b(x + dx + dy) \quad (22)$$

$$= [D_\mu, D_\nu]\psi(x) dx^\mu dy^\nu \quad (23)$$

を  $(\Delta\psi)'(x) = U(x + dx + dy)\Delta\psi(x)$ と変換する。しかし、 $\Delta\psi$ は  $dx, dy$  についてすでに 2 次の量であるから

$$(\Delta\psi)'(x) = U(x)\Delta\psi(x) \quad (24)$$

と変換する。(23) に現れる交換子は

$$F_{\mu\nu}(x) \equiv \frac{i}{g_0}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig_0[A_\mu, A_\nu] \quad (25)$$

と定義。 $F_{\mu\nu}(x)$  は、場の強さと呼ばれる。また、

$$F_{\mu\nu}'(x) = U(x)F_{\mu\nu}(x)U^{-1}(x) \quad (26)$$

と変換する。場の強さ  $F_{\mu\nu}$  もリー代数において

$$(F_{\mu\nu})_i^j = \sum_{a=1}^N F_{\mu\nu}^a (T_a)_i^j \quad (27)$$

となる。

### 2.3.2 ゲージ不変なラグランジアン密度

ゲージ場  $A_\mu$  や物質場  $\psi$  の変換則が前節から求まったので、局所ゲージ変換 (12)、(19) の下でゲージ不変なラグランジアン密度を書き下す。

物質場に関して

$$\mathcal{L}_{matter} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \quad (28)$$

(17) により不変である。

ゲージ場に関して、(26) から

$$\mathcal{L}_{gauge\ field} = -\frac{1}{4}N^{-1}tr(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \quad (29)$$

$$= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \quad (30)$$

もゲージ不変である ( $N$  は、 $SU(N)$  の  $N$ )。場の強さ  $F_{\mu\nu}^a$  は (25) の両辺に  $NTr(T^a \dots)$  を演算して

$$F_{\mu\nu}^a(x) = \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) + g_0 f_{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x) \quad (31)$$

と与えられる。(30) のラグランジアンは、 $A_\mu^a$  の運動項と  $A_\mu$  の 3 次と 4 次の自己相互作用項を与えることになる。(31) 中の  $g$  は相互作用項の係数なので結合定数と呼ばれる。SU(N) の場合、 $T_a$  の交換関係は非可換であり  $f_{abc}$  が 0 でないので自己相互作用項が存在する。ゆえに、SU(N) のゲージ理論を、非可換ゲージ理論 (Yang-Mills 理論) と言う。

(28)、(30) からラグランジアン密度は、

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \bar{\psi}[i\gamma^\mu D_\mu - m]\psi \quad (32)$$

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^a(x) &= \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) + g_0 f_{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x) \\ D_\mu(x) &= \partial_\mu - ig_0 A_\mu(x) \end{aligned} \quad (33)$$

である。

参考までに QCD のラグランジアン密度を書く。SU(3) であるので、ゲージ場  $A_\mu^a$  は 8 成分 (カラー 8 重項) ありグルオンと呼ばれる。物質場はクォークに対応する場  $\psi_{if}$  で与えられ  $i=1,2,3$  はカラー、 $F$  はフレーバーの数を表す。したがって、QCD のラグランジアン密度は

$$\zeta_{QCD} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \sum_{f=1}^F \bar{\psi}_{if}[i\gamma^\mu(\partial_\mu - igA_\mu^a \frac{\lambda^a}{2})_i^j - m_f \delta_i^j]\psi_{if} \quad (34)$$

である。

## 2.4 時空間のユークリッド化

経路積分は、いろいろな振動数の振動の複雑な重ね合わせである。無限に多い振動の重ね合わせなので、数学的な取り扱いに問題が生じる。これを避けるために、経路積分のなかの実数の時刻  $t$  が純虚数だと考え  $t = iT$  とおいて、経路積分を新しい実数の変数  $T$  の関数で考えることを、時空間のユークリッド化という。

この利点は時間と空間との区別がなくなることである。

後のため、(32) のラグランジアン密度を時空間のユークリッド化しておく。

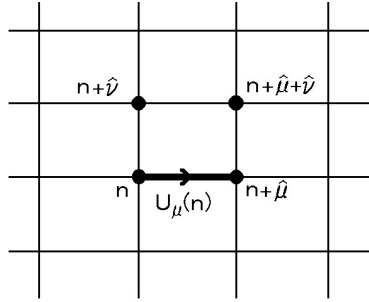
$$\mathcal{L}_{eucl.} = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a - \bar{\psi}[\gamma_\mu D_\mu - m]\psi \quad (35)$$

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^a(x) &= \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) + g_0 f_{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x) \\ D_\mu(x) &= \partial_\mu - ig_0 A_\mu(x) \end{aligned} \quad (36)$$

### 3 格子ゲージ理論

#### 3.1 空間と虚時間の格子

4次元時空間をとびとびの点で近似し、格子上の点だけで考える。4次元時空間を一辺  $a$  の格子でうめつくし正方形の頂点を格子点  $n = (n_1, n_2, n_3, n_4)$  として、隣り合う2つの格子点を結ぶ線分をリンク、最小の正方形をプラケットと呼ぶ。



F3-1  
4次元格子の2次元の断面図である。

#### 3.2 格子ゲージ理論の作用

経路積分するために、ここで格子ゲージ理論の作用を求める。前章からユークリッド化したラグランジアン密度

$$\mathcal{L}_{eucl.} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a - \bar{\psi} [\gamma_\mu D_\mu - m] \psi \quad (37)$$

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^a(x) &= \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) + g_0 f_{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x) \\ D_\mu(x) &= \partial_\mu - ig_0 A_\mu(x) \end{aligned} \quad (38)$$

であり、そのユークリッド化した作用  $S$  は

$$\begin{aligned} S_{eucl.} &= S_G + S_F \quad (39) \\ S_G &= \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a \\ S_F &= - \int d^4x \bar{\psi} [\gamma_\mu D_\mu - m] \psi \end{aligned}$$

と、表せる。

まず、格子ゲージ理論の  $S_G$  を、求める。クォーク場を格子上の場として  $\psi(n)$  と、反クォーク場を  $\bar{\psi}(n)$  と表す。

ゲージ場として次の量を各リンク上に定義する。

$$U(n, n + \hat{\mu}) = e^{i\phi_\mu(n)} \quad (40)$$

$\phi_\mu(n)$  は、SU(2) に属するエルミート行列であり

$$\phi_\mu(n) = \int_n^{n+\hat{\mu}} A_\mu dx_\mu \quad (41)$$

$$\simeq g_0 a A_\mu(n) \quad (a \rightarrow 0) \quad (42)$$

となる。 $\hat{\mu} = \bar{\mu}a$  である。この  $U(n, n + \hat{\mu})$  をリンク変数と呼ばれる。このリンク変数はクォーク場  $\psi(n)$  をリンクに沿って  $n$  から  $n + \hat{\mu}$  へ移動させた時どのくらいゲージを調節すればよいかを示すものである。 $U(n, n + \hat{\mu})$  を  $U_\mu(n)$  と書く。

$U_\mu^{-1}(n)$  は、 $n + \hat{\mu}$  から  $n$  へ戻ることを示す。 $U_\mu^{-1}(n)$  は、エルミート共役で与えられ

$$U_\mu^{-1}(n) = U_\mu^\dagger(n) \quad (43)$$

である。

クォーク場  $\psi(n)$  の局所ゲージ変換は

$$\begin{aligned} \psi(n) &\rightarrow G(n)\psi(n), \\ \bar{\psi}(n) &\rightarrow \bar{\psi}(n)G^{-1}(n) \end{aligned} \quad (44)$$

であり、リンク変数  $U_\mu(n)$  の局所ゲージ変換は

$$\begin{aligned} U_\mu(n) &\rightarrow G(n)U_\mu(n)G^{-1}(n + \hat{\mu}), \\ U_\mu^\dagger(n) &\rightarrow G(n + \hat{\mu})U_\mu^\dagger(n)G^{-1}(n) \end{aligned} \quad (45)$$

である。ここで、 $G(n)$  は

$$G(n) = e^{i\lambda(n)} \quad (46)$$

であり、 $\lambda(n)$  は SU(2) に属するエルミート行列である。

ここで、最も簡単なゲージ不変量であるプラケットを考える。プラケットを  $U_{\mu\nu}(n)$  と表すから

$$U_{\mu\nu}(n) = U_\mu(n)U_\nu(n + \hat{\mu})U_\mu^\dagger(n + \hat{\nu})U_\nu^\dagger(n). \quad (47)$$

ハウストロフの公式

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\dots} \quad (48)$$

から,  $\phi_\mu(n), \phi_\nu(n), \phi_\mu(n+\nu), \phi_\nu(n+\mu)$  は,

$$\begin{aligned} \phi_\mu(n) &\approx g_0 a A_\mu(n) \\ \phi_\nu(n) &\approx g_0 a A_\nu(n) \\ \phi_\mu(n+\nu) &\approx \phi_\mu(n) + a \partial_\nu \phi_\mu(n) + \dots \\ &\approx g_0 a A_\mu(n) + g_0 a^2 \partial_\nu A_\mu(n) + \dots \end{aligned} \quad (49)$$

$$\phi_\nu(n+\mu) \approx \phi_\nu(n) + a \partial_\mu \phi_\nu(n) + \dots \quad (50)$$

$$\approx g_0 a A_\nu(n) + g_0 a^2 \partial_\mu A_\nu(n) + \dots \quad (51)$$

となる。(47)に(51)を代入すると,

$$U_{\mu\nu}(n) = [ig_0(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig_0[A_\mu, A_\nu]) + O(a^3)] \quad (52)$$

となる。

ここで  $F_{\mu\nu}$  が

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig_0[A_\mu, A_\nu] \quad (53)$$

と書けるので、ここから(52)は

$$U_{\mu\nu}(n) = \exp([ig_0 a^2 F_{\mu\nu}(n) + O(a^3)]) \quad (54)$$

となる。

$a \rightarrow 0$  で、 $U_{\mu\nu}(n) + U_{\mu\nu}^\dagger(n)$  のトレースをとると

$$\begin{aligned} \text{Tr}(U_{\mu\nu}(n) + U_{\mu\nu}^\dagger(n)) &= \text{Tr}(\exp[ig_0 a^2 F_{\mu\nu}(n)] \\ &\quad + \exp[-ig_0 a^2 F_{\mu\nu}(n)]) \\ &= \text{Tr}(2 + ig_0 F_{\mu\nu}(n) - ig_0 a^2 F_{\mu\nu}(n) \\ &\quad - 2\frac{1}{2}g_0^2 a^4 F_{\mu\nu}(n)F_{\mu\nu}(n)) \end{aligned}$$

のようになり、次の関係を考えたと

$$\text{Tr}(1) = 2$$

$$\text{Tr}(F_{\mu\nu}(n)F_{\mu\nu}(n)) = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}^a(n)F_{\mu\nu}^a(n)$$

となるので、(55)は

$$\begin{aligned}
Tr(U_{\mu\nu}(n) + U_{\mu\nu}^\dagger) &= 4 - g_0^2 a^4 F_{\mu\nu}^a(n) F_{\mu\nu}^a(n) \\
\mapsto 4 - Tr(U_{\mu\nu}(n) + U_{\mu\nu}^\dagger) &= g_0^2 a^4 F_{\mu\nu}^a(n) F_{\mu\nu}^a(n) \\
\mapsto \frac{4}{g_0^2} [1 - \frac{Tr}{4}(U_{\mu\nu}(n) + U_{\mu\nu}^\dagger)] &= a^4 F_{\mu\nu}^a(n) F_{\mu\nu}^a(n)
\end{aligned} \tag{55}$$

になる。

したがって

$$\begin{aligned}
\frac{4}{g_0^2} \sum_n \sum_{\mu \neq \nu} [1 - \frac{Tr}{4}(U_{\mu\nu}(n) + U_{\mu\nu}^\dagger)] &= \sum_n \sum_{\mu \neq \nu} a^4 F_{\mu\nu}^a(n) F_{\mu\nu}^a(n) \\
&= \int d^4x F_{\mu\nu}^a(n) F_{\mu\nu}^a(n)
\end{aligned}$$

であり、連続極限  $a \rightarrow 0$  で連続領域での作用と一致する。よって (45) と (56) から作用  $S_G$  は

$$\begin{aligned}
S_G &= \beta \sum_n \sum_{\mu \neq \nu} [1 - \frac{Tr}{4}(U_{\mu\nu} + U_{\mu\nu}^\dagger)] \\
\beta &= \frac{4}{g_0}
\end{aligned} \tag{56}$$

となる。

次に、格子ゲージ理論の  $S_F$  は

$$\begin{aligned}
S_F &= \sum_n \bar{\psi}(n) \psi(n) - K \sum_n \sum_\mu [\bar{\psi}(n) (1 - \gamma_\mu) U_\mu \psi(n + \hat{\mu}) \\
&\quad + \bar{\psi}(n) (1 + \gamma_\mu) U_\mu^\dagger \psi(n - \hat{\mu})] \\
K &\equiv \frac{1}{2(ma + 4r)}
\end{aligned} \tag{57}$$

である。

よって、格子ゲージ理論での系の作用は

$$S(\psi, \bar{\psi}, U) = S_G(U) + S_F(\psi, \bar{\psi}, U) \tag{58}$$

となる。

### 3.3 量子化

経路積分を用いて、格子上の系を次のように量子化する。  
分配関数  $Z$  を

$$Z = \prod_{n,\mu} \left[ \int d\psi(n) d\bar{\psi}(n) dU_\mu(n) \right] e^{-S(\psi, \bar{\psi}, U)} \quad (59)$$

とする。このとき、任意の物理量  $O$  の期待値  $\langle O \rangle$  は、

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \prod_{n,\mu} \left[ \int d\psi(n) d\bar{\psi}(n) dU_\mu(n) \right] O e^{-S(\psi, \bar{\psi}, U)} \quad (60)$$

と表される。ここで  $\prod_{n,\mu} [\int d\psi(n) d\bar{\psi}(n) dU_\mu(n)]$  は、積分測度 (the integration measure)。

$\psi(n)$ 、 $\bar{\psi}(n)$  は反可換のグラスマン数である。 $\psi(n)$  および  $\bar{\psi}(n)$  に関する積分を行う。グラスマン数の積分を

$$\begin{aligned} \int d\psi(n) &= 0, \quad \int d\bar{\psi}(n) = 0 \\ \int d\psi(n) \psi(n) &= 1, \quad \int d\bar{\psi}(n) \bar{\psi}(n) = 1 \\ \int d\bar{\psi}(n) d\psi(n) \bar{\psi}(n) \psi(n) &= 1 \\ \int d\bar{\psi}(n) d\psi(n) \psi(n) \bar{\psi}(n) &= -1 \end{aligned} \quad (61)$$

のように定義する。(61) を用いて経路積分することは、反交換関係による正準量子化を行うことと同値である。この積分から格子ゲージ理論の  $S_F$  の部分  $\prod_n [d\psi(n) d\bar{\psi}(n)] e^{\psi D \bar{\psi}}$  が

$$\prod_n \left[ \int d\psi(n) d\bar{\psi}(n) \right] e^{\psi K \bar{\psi}} = \det D \quad (62)$$

となり、分配関数  $Z$  は

$$Z = \prod_{n,\mu} \left[ \int dU_\mu(n) \right] \det D e^{-S_G(U)} \quad (63)$$

となる。ここで、 $\det D$  はクォークの対生成、対消滅の効果を与える。しかし、クォーク質量  $m$  が大きいとき、この効果は十分に小さい。 $m \rightarrow \infty$  で、 $\det D = 1$  となり、

$$Z = \prod_{n,\mu} \left[ \int dU_\mu(n) \right] e^{-S_G(U)} \quad (64)$$



となる。これは、クエンチ近似と呼ばれている。

このクエンチ近似を用いると、 $S_F$ が

$$\prod_n [\int d\psi(n) d\bar{\psi}(n)] e^{-S_F} = \det D \quad (65)$$

$$\mapsto S_F = -\log(\det D) \quad (66)$$

となり、 $\det D = 1$ であるので  $S_F = 0$ となる。つまり、格子ゲージ理論の作用  $S$ が  $S_G$ のみとなる。

SU(2)の場合、 $\prod_{n,\mu} [dU_\mu(n)]$ のパラメータ化を行えば

$$\prod_{n,\mu} [dU_\mu(n)] = \sum_n \sum_\mu \frac{1}{2\pi^2} \int_{-1}^1 da^4 \delta(a^2 - 1) \quad (67)$$

と表すことができる。

### 3.4 統計力学との同等性

前節から、任意の物理量  $O$ の期待値  $\langle O \rangle$ は

$$\begin{aligned} \langle O \rangle &= \frac{1}{Z} \prod_{n,\mu} [\int dU_\mu(n)] O e^{-S} \\ Z &= \prod_{n,\mu} [\int dU_\mu(n)] e^{-S} \\ S &= \frac{4}{g_0} \sum_n \sum_{\mu \neq \nu} \left[ 1 - \frac{\text{Tr}}{4} (U_{\mu\nu} + U_{\mu\nu}^\dagger) \right] \end{aligned}$$

で与えられる。ここで、

$$\frac{1}{g_0^2} = \frac{1}{kT}$$

$$4 \sum_n \sum_{\mu \neq \nu} \left[ 1 - \frac{\text{Tr}}{4} (U_{\mu\nu} + U_{\mu\nu}^\dagger) \right] = -H$$

と置くと、上の式は統計力学の分配関数  $Z$ および相関関数  $\langle O \rangle$ そのものである。ただ、普通見かける統計物理では、力学変数は格子点上で定義されており、格子ゲージ理論のように、リンク上に定義されている場合は少ない。

このことは、もっと一般的に示すことができる。空間  $d$ 次元、時間1次元の量子化された場の理論をユークリッド化して経路積分の形式で書くと、空間  $d+1$ 次元の統計力学と同等になることが示せる (Appendix B)。

## 4 漸近的自由とスケーリング則

連続極限格子間隔  $a$  であったので、本当に得たい連続極限は  $a \rightarrow 0$  である。ここでは連続極限についてしらべる。

### 4.1 漸近的自由

相関距離  $\xi$  と、量子系の一番質量の小さい粒子の質量  $m$  との間に

$$\xi = \frac{1}{ma} \quad (68)$$

の関係がある。ここで、 $\xi$  は格子間隔を単位として測っている。

連続極限  $a \rightarrow 0$  の時、 $m$  は有限であるので  $\xi$  は  $\infty$  になる。 $\xi$  は、結合定数  $g$  の関数である。 $g$  が  $a$  の関数であるとして、 $m$  を一定になるように  $g(a)$  を決める

$g$  が  $a$  の関数としての振る舞いを示す関数を、繰り込み群の  $\beta$  関数と言い、

$$\beta(g) = -\frac{dg(a)}{d \ln a} \quad (69)$$

と定義する。

これを摂動論を用いて解くと、SU(2) の時

$$\begin{aligned} \beta(g) &= -\beta_0 g^3 - \beta_1 g^5 + O(g^5) \\ \beta_0 &= \frac{11}{24\pi^2}, \beta_1 = \frac{17}{96\pi^4} \end{aligned} \quad (70)$$

となる。 $g^3, g^5$  の係数がマイナスであることが非常に重要な意味をもっている。つまり (69) と (70) から  $a$  が小さくなると、 $g$  も小さくなることを示している。(69) は、 $a \rightarrow 0$  で  $g \rightarrow 0$  になる。この性質を「漸近的自由」と言う。4次元 (3+1次元) の場の理論において、この性質をもつものは SU(N) ゲージ理論のような非可換ゲージ理論に限られる。

### 4.2 スケーリング則

前の節の (69) 式から

$$\begin{aligned} d \ln a &= -\frac{dg}{\beta(g)} \\ \mapsto \frac{1}{a} \exp\left(-\int_{g_0}^g \frac{dg'}{\beta(g')}\right) &= const \end{aligned} \quad (71)$$

ここで左辺は  $a$  によらない定数なので

$$\Lambda = \frac{1}{a} \exp\left(-\int_{g_0}^g \frac{dg'}{\beta(g')}\right) \quad (72)$$

とし、 $\Lambda$  をスケールパラメーターと言う。  $g \rightarrow 0$  では、 $g$  の正のべき項は無視できるので、 $\beta(g)$  の 2 項までとって

$$\Lambda_{asy} = \frac{1}{a} g^{-\frac{\beta_1}{\beta_0}} \exp\left(-\frac{1}{2}\beta_0 g^2\right) \quad (73)$$

を、通常スケール・パラメーターと呼ぶ。

(35) からゲージ場だけの作用  $S$  を見ると、次元をもつパラメーターを含んでないように思えるが、次元のあるスケールパラメーターを陰に含んでいる。このように次元のない理論から次元のある物理量がでてくることを次元の転換という。

ところで任意の物理量を  $O$ 、その次元を  $m$  とすると  $g$  が十分小さい時

$$\langle O \rangle = c\Lambda^m \quad (74)$$

となり、これをスケーリング則と言う。

さらに、 $g$  が小さい時

$$\langle O \rangle = c\Lambda_{asy}^m \quad (75)$$

となり、これを漸近的スケーリング則と言う。

## 5 クォークの閉じ込めと格子ゲージ理論

### 5.1 ウィルソンループ

格子ゲージ理論において意味のある量はゲージ不変量だけである。格子場の中に距離  $R$  だけ離して二つのカラー電荷を固定する。これらは重い ( $m = \infty$ ) クォークと反クォークと見てよい。典型的なゲージ不変量として、空間方向に  $R$ 、虚時間方向に  $T$  の矩形の閉回路  $C$  に沿ってリンク変数の積をとりトレースした、

$$W_C(R \times T) = \text{Tr} \left[ \prod_C U_p \right] \quad (76)$$

を考える。積の順序は  $C$  に沿って時計回りにとる。 $W_C(R \times T)$  をウィルソンループと呼ぶ。これはクォークと反クォークの対が創生した瞬間に距離  $R$  だけ離れ、 $T$  時間経過後再び移動し消滅したものと見てよい。

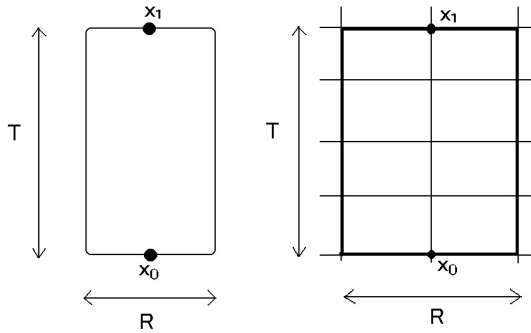


図 1: F5-1

ウィルソンループの期待値  $\langle W_C(R \times T) \rangle$  を  $\langle W_C(R \times T) \rangle \equiv W(R, T)$  として求めると格子ゲージセオリーと統計力学とは同等性があるので、

$$W(R, T) = \frac{1}{Z} \int dU \text{Tr} \left[ \prod_C U_p \right] e^{-S} \quad (77)$$

$$Z = \int dU e^{-S}$$

となる。ウィルソンループは、 $T, R \rightarrow \infty$  での振る舞いで系の相を分類できる。

ウィルソンループの  $T, R \rightarrow \infty$  の極限をとると

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{R \rightarrow \infty} W_C(R \times T) \propto (-cRT) \quad (78)$$

となる時「面積則」に従うといい、

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{R \rightarrow \infty} W(R, T) \propto \exp(-c'(R + T)) \quad (79)$$

となる時「周辺則」に従うという。この言葉は統計力学用語であり、 $c, c'$  は定数である。これを量子の言葉で言い直す。

量子論には、ハミルトニアンが存在する。QED でも QCD でも本質に同じで、QED のほうが取り扱いが簡単なので QED を扱う。QED の電磁場だけのハミルトニアンを  $H_0$  とすると、点  $\vec{x}_1$  と点  $\vec{x}_2$  に C 数の電荷  $+e$  と  $-e$  を置いた時のハミルトニアン

$$H_0 + \Delta H = H_0 + e \int A_0(\delta(\vec{x} - \vec{x}_1) - \delta(\vec{x} - \vec{x}_2)) d^3x \quad (80)$$

で与えられる。ここで、 $e^{-\Delta H \Delta \tau}$  を考えると

$$\begin{aligned} e^{-\Delta H \Delta \tau} &= e^{-e \int A_0(\delta(\vec{x} - \vec{x}_1) - \delta(\vec{x} - \vec{x}_2)) d^3x \Delta \tau} \\ &= e^{iA_4(\vec{x}_1, \tau) \Delta \tau - iA_4(\vec{x}_2, \tau) \Delta \tau} \end{aligned} \quad (81)$$

になる。

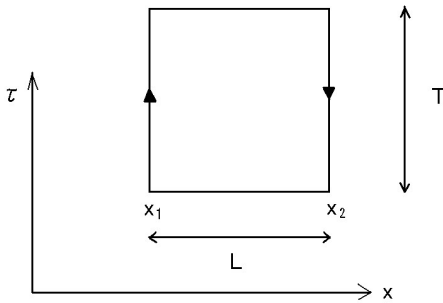


図 2: F5-2

だから、図 F5-2 のループに沿って

$$e^{i \int A_\mu dx_\mu} \quad (82)$$

の  $\tau$  方向の線積分を行う部分が得られる。

最初の $\tau = \tau_1$ において一点で $+e$ と $-e$ が対生成し、だんだん点 $x_1$ と点 $x_2$ に広がっていき、最後に $\tau = \tau_2$ において対消滅したとして、その部分を空間方向に平らにすると空間部分の線積分も得られる。そうであるので、ウィルソンループの期待値はC数の $+e$ と $-e$ の電荷を $x_1$ と $x_2$ に置いた時と、置かない時とのエネルギーの差になっている。

よって、

$$-\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \langle W(R, T) \rangle = E(R) - E_0 \quad (83)$$

となることがわかる。ここで、 $E_0$ はゲージ場のみの系の真空エネルギー、 $E(R)$ は距離 $R$ だけ離してC数の色電荷(重いクォークと反クォーク)を置いた時の真空エネルギーである(クォークと反クォークの生成消滅の影響を取り入れていない)。

$E(R) - E_0$ は、重いクォークと反クォーク間ポテンシャル $V(R)$ に対応しているので

$$V(R) = -\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \langle W(R, T) \rangle \quad (84)$$

の形で書ける。

これから $T \rightarrow \infty$ の時、ウィルソンループが面積則に従うならば

$$\lim_{R \rightarrow \infty} V(R) = cR \quad (85)$$

が成り立つ。これは、ポテンシャル $V(R)$ が距離 $R$ に比例している。これは、2章から「クォークの閉じ込め」が起きていることを示している。 $c$ はストリングテンションと呼ばれる。

次に、周辺則に従うならば

$$\lim_{R \rightarrow \infty} V(R) = c' \quad (86)$$

が成り立つ。これはクォークと反クォークは無遠くで相互作用がなく、クォークと反クォーク間ポテンシャルがクーロンポテンシャルのようなポテンシャルにしたがっているのがわかる。

したがって、「クォークの閉じ込め」が起きていることを示すには、ウィルソンループが面積則に従うことを示せばよい。

## 5.2 強結合展開

ウィルソンループが面積則に従うことを強結合領域 $g^2 \gg 1$ で示す。SU(2)の不変積分測度 $dU$ とする時

$$\begin{aligned}
\int dU &= 1 \\
\int dU U_\mu(n) &= 0, \int dU U_\mu(n) U_\nu(m) = 0 \\
\int dU U_\mu(n) U_\nu(m) &= 0, \int dU U_\mu^\dagger(n) U_\nu^\dagger(m) = 0 \\
\int dU U_\mu(n) U_\nu^\dagger(m) &= \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \delta_{nm}
\end{aligned} \tag{87}$$

である。ウィルソンループの期待値  $W(R, T)$  は

$$\begin{aligned}
W(R, T) &= \frac{1}{Z} \int dU \text{Tr} [\prod_C U_p] e^{-S} \\
Z &= \int dU e^{-S} \\
S &= \beta \sum_n \sum_{\mu \neq \nu} [1 - \frac{\text{Tr}}{4} (U_{\mu\nu} + U_{\mu\nu}^\dagger)]
\end{aligned} \tag{88}$$

である。  $\beta \ll 1$  から

$$\begin{aligned}
e^{-S} &= 1 - S + \frac{1}{2} S^2 - \dots \\
&= c [1 + \frac{\beta}{4} \sum_n \sum_{\mu \neq \nu} (U_{\mu\nu} + U_{\mu\nu}^\dagger) + \frac{1}{2!} (\frac{\beta}{4} \sum_n \sum_{\mu \neq \nu} (U_{\mu\nu} + U_{\mu\nu}^\dagger))^2 + \dots]
\end{aligned}$$

と  $\frac{\beta}{4}$  のべき級数に展開できる。ここで、  $c$  は定数。

式 1 から、  $\beta$  のべきの小さいうちは、0(ゼロ)になる。はじめて0(ゼロ)にならない時は、プラケットがウィルソンループをすべて埋め尽くした時である (F5-3)。それは  $\beta^{RT}$  の項であり、その項が

$$\int dU \frac{1}{RT!} [\frac{\beta}{4} \sum_n \sum_{\mu \neq \nu} (U_{\mu\nu} + U_{\mu\nu}^\dagger)]^{RT} \tag{89}$$

となる ( $RT!$  は、プラケットの組み合わせの数)。

これを積分すると

$$W(R, T) \simeq \left(\frac{\beta}{4}\right)^{RT} \tag{90}$$

$$= \exp(-RT \ln \frac{4}{\beta}) \tag{91}$$

よってウィルソンループが面積則に従っているので、「クォークの閉じ込め」が起きている。

あとのために、この時の string tension  $\sigma$  を求めておくと

$$\sigma = \log\left(\frac{4}{\beta}\right) \quad (92)$$

$$= -\log\left(\frac{\beta}{4}\right) \quad (93)$$

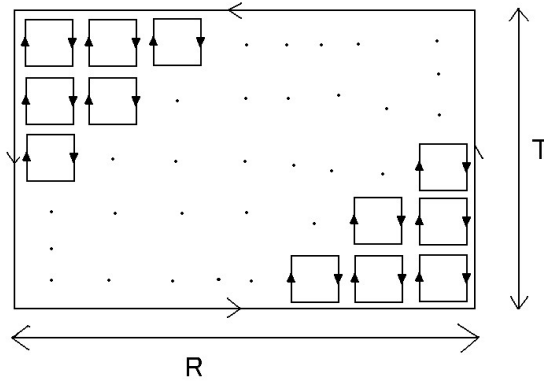


図 3: F5-3

### 5.3 連続極限における string tension

$a \rightarrow 0$  の極限における string tension  $\sigma$  のふるまいを考える。クォークの閉じ込めが起きているとすると (85) が成り立つので、string tension  $\sigma$  の次元が 2 である。漸近的スケールリング則 (73) から  $\langle \sigma \rangle$  のリーディングのみ考えて

$$\langle \sigma \rangle = c_1 \Lambda_a s y^2 \quad (94)$$

を満たすはずである。ここで  $\Lambda_a s y$  のリーディングのみ考えて

$$\Lambda_a s y = c \exp\left(-\frac{12\pi^2}{11g^2}\right) \quad (95)$$

$c$  は定数である。つまり、 $\langle \sigma \rangle$  は

$$\begin{aligned} \langle \sigma \rangle &\propto c' \exp\left(-\frac{24\pi^2}{11g^2}\right) \\ &= c' \exp\left(-\frac{6\pi^2\beta}{11}\right) \end{aligned} \quad (96)$$



である。

よって連続極限においての string tension は  $\exp(-\frac{6\pi^2\beta}{11})$  に比例することがわかった。

## 5.4 クォークの閉じ込め

漸近的自由のため連続極限では、 $g \rightarrow 0$ となる。強結合領域  $g^2 \gg 1$ でのクォークの閉じ込めを示した。連続極限においてクォークの閉じ込めが起きていることを示すためには、クォークの閉じ込めが起きている強結合領域  $g^2 \gg 1$ から  $g$ の小さな漸近的自由領域まで相転移を起こさない事が条件になる。それと連続極限での重いクォークと反クォーク間ポテンシャルからもクォークの閉じ込めを示したい。

これを解析的にもとめるのはとても難しいので、普通はモンテ・カルロ・シミュレーションで数値的に求める。

## 6 モンテ・カルロ・シミュレーション

格子量子色力学は連続的な時空間での量子色力学に比べると大幅に単純化されたとはいえ、それでも経路積分をおこなうのはとても困難である。

そこで格子点やリンクの上の状態をすべて考えるかわりに、統計的なサンプリングの方法を使うことが考えられる。すべての状態の中から配位を取り出す時に、ある配位が選ばれる確率が重み因子  $e^{-S}$  に比例した分布をもつ配位を、コンピューターから作り出す。その方法として熱浴法 (Appendix B を参照) を用いる。

その配位を用い物理量  $O$  を計算し、 $O$  の期待値  $\langle O \rangle$  とすると

$$\langle O \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N O_i \quad (97)$$

となる。ここで、 $O_i$  は  $i$  番目の  $O$  の値である。 $N$  は発生させた配位の数で、 $N$  を大きくすればするほど実際の値に極めて近いものになるはずである。

## 7 シミュレーションによる測定結果

### 7.1 アベレージプラケットの測定

ここでは、モンテ・カルロ・シミュレーションでウィルソンループの測定する前に、配位の相関をアベレージプラケットの測定によって考える。まず、配位の相関を考える前に格子サイズにより精度がどのように変わるかを F.6-1 で、縦軸をアベレージプラケットの値、横軸を配位の up date の回数とし、格子サイズ  $4^4, 6^4, 8^4, 10^4$  の 4 種類で比較する。

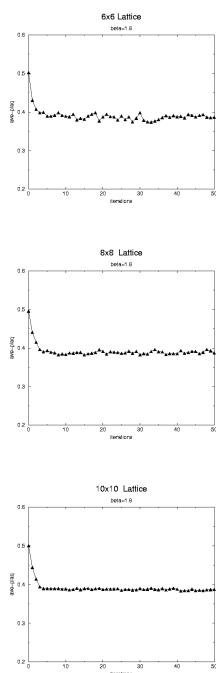


図 4: F6-1

F.6-1 より、格子サイズが大きくなるにしたがって、振れ幅の広がり小さくなっていることがわかる。つまり、測定による精度が良くなるので、 $8^4$ 、 $10^4$ の格子サイズだと精度がよいことがわかるので、配位の相関を考える時、 $8^4$ の格子サイズで行う。

配位の up date を行うわけだが、up date の方法は前の配位から新しい配位を作り出すという方法である。そのために、新しい配位に前の配位の影響がのこっているため 1 回や 2 回の up date では、1 つ 1 つの配位が独立であるとはいえない。モンテ・カルロ・シミュレーションはできる

だけ独立な配位を用いて行われるべきなので測定と測定の間配位の相関が消える間隔をあける必要がある。その間隔をもとめるため、up dateを繰り返す。アベレージプラケットが十分熱平衡に達したと思われる所を配位の相関が消える間隔と考える。F.6-2で、縦軸をアベレージプラケットの値、横軸を配位の up date の回数とし、 $\beta = 1.2$ 、 $\beta = 1.6$ 、 $\beta = 2.0$ 、 $\beta = 2.4$ 、 $\beta = 2.8$ 、 $\beta = 3.2$  のアベレージプラケットが十分熱平衡に達したと思われる所を確認する。

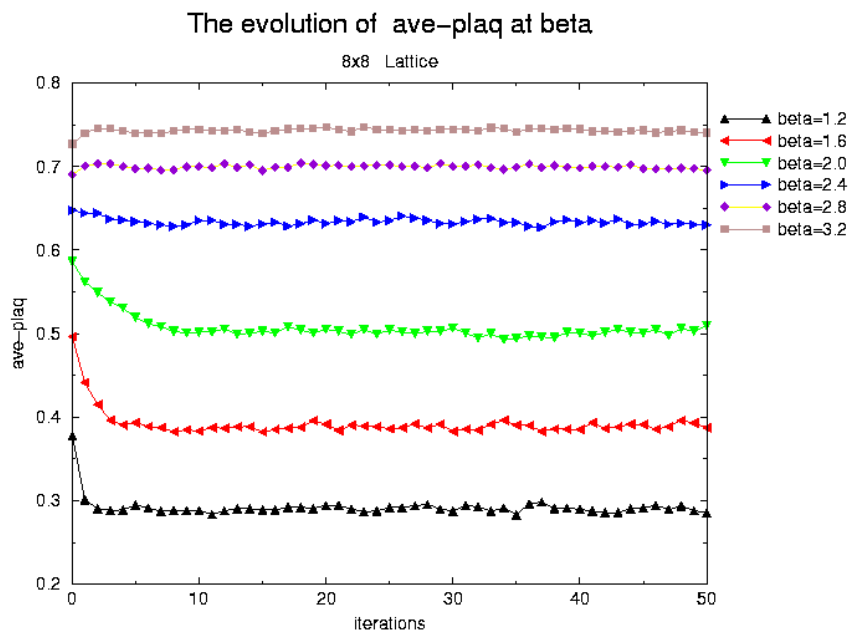


図 5: F6-2

F.6-2 より、各 $\beta$ 、各アベレージプラケットについて相関が消えるまで up date の回数を調べたのを、下の表に示す。

$\beta$	1.2	1.6	2.0	2.4	2.8	3.2
プラケット	40	45	35	45	45	35

## 7.2 ウィルソンループの測定

ウィルソンループの期待値  $W(R,T)$  を測定する。縦軸を  $W(R,T)$  の値、横軸を  $\beta$  とし、 $8^4$  の格子サイズで行う。 $W(R,T)$  は、 $W(1,1)=1 \times 1$ 、

$W(2,2)=2 \times 2$ 、 $W(3,3)=3 \times 3$ 、 $W(4,4)=4 \times 4$ を表す。配位の相関が消える間隔として、すべての up date の回数を 100 回しておいた。

その測定結果を F.6-3 に示す。

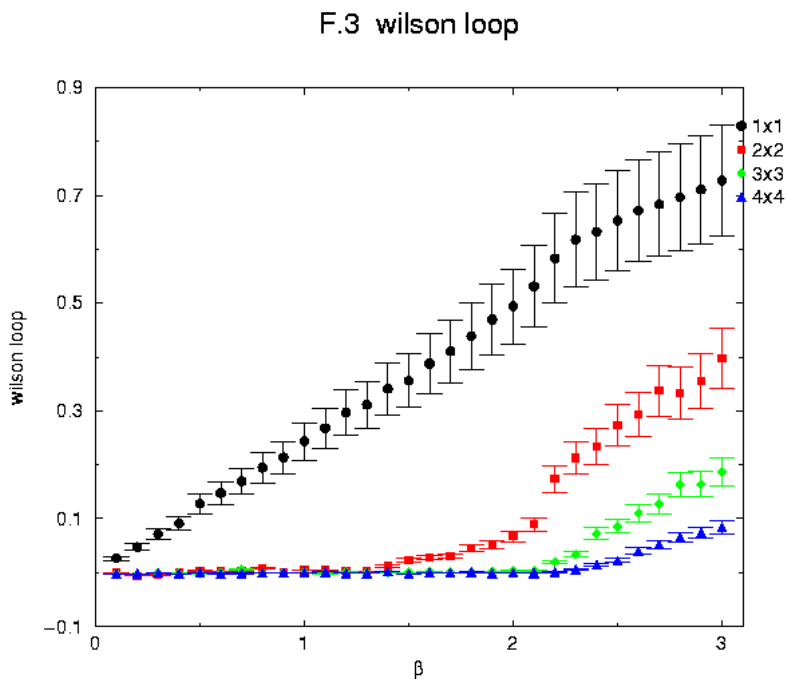


図 6: F6-3

### 7.3 string tension の測定

7.2で得られたウィルソンループから、次のように string tension を求める。まず、 $W(R,T)$  が

$$W(S, S) = \exp(a + bS + cS^2) \quad (98)$$

のようなふるまいをする。ここで、 $c$  が string tension  $\sigma$  の項であり、 $S$  がループの長さのことである。F.6-3を見ればわかるように、 $0 < \beta < 1.4$  の時は  $W(1,1)$  のみの影響をうけ、 $1.4 \leq \beta < 2.1$  の時は  $W(1,1)$  と  $W(2,2)$

の影響を受け、 $2.1 \leq \beta$ の時は  $W(1,1)$  と  $W(2,2)$  と  $W(3,3)$  の影響を受ける。このことから (98) を解いていく。

$0 < \beta < 1.4$  の場合  $W(1,1)$  を使い  $a = b = 0$  をとる。

$$W(1,1) = \exp[c(1)^2] \quad (99)$$

を  $c$  について解く。

$1.4 \leq \beta < 2.1$  の場合  $W(1,1)$  と  $W(2,2)$  を使い  $a = 0$  をとる。

$$\begin{aligned} W(1,1) &= \exp(b2 + c2^2) \\ W(2,2) &= \exp(b2 + c2^2) \end{aligned} \quad (100)$$

二次の連立方程式を  $c$  について解く。

$2.1 \leq \beta$  の場合  $W(1,1)$  と  $W(2,2)$  と  $W(3,3)$  を使う。

$$\begin{aligned} W(1,1) &= \exp(a + b3 + c3^2) \\ W(2,2) &= \exp(a + b3 + c3^2) \\ W(3,3) &= \exp(a + b3 + c3^2) \end{aligned} \quad (101)$$

三次の連立方程式を  $c$  について解く。

こうして求めた string tension にシミュレーションを実行する。縦軸を string tension の値、横軸を  $\beta$  とし、 $8^4$  の格子サイズで、配位の相関が消える間隔として up date の回数を 100 回に、(97) より発生させる配位の数  $N$  を 500 個にした。これを、F.6-4 に示す。

この F.6-4 に強結合領域の string tension(93)

$$\langle \sigma \rangle = -\log\left(\frac{\beta}{4}\right) \quad (102)$$

と連続極限においての string tension(96) の理論値が

$$\langle \sigma \rangle = \exp\left[-\frac{6\pi^2}{11}(\beta - 2)\right] \quad (103)$$

であり、この 2 式 (93) と (103) を F.6-4 にのせている。

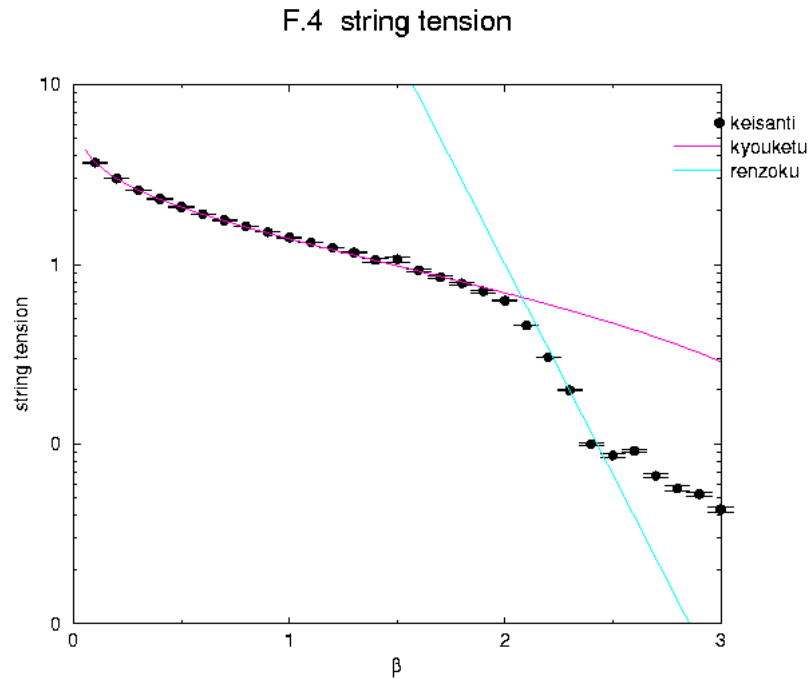


図 7: F6-4

## 7.4 重いクォーク・反クォーク間のポテンシャルの測定

(7.2) から重いクォーク・反クォーク間のポテンシャルは、

$$V(R) = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \langle W(R, T) \rangle \quad (104)$$

で、求めることができる。

ここで、F.6-4の連続極限においての string tension ( $\langle \sigma \rangle = \exp[-\frac{6\pi^2}{11}(\beta - 2)]$ ) がのっている所が  $2.2 \leq \beta \leq 2.5$  の間。この間の  $\beta$  でポテンシャルを測定することにより、連続極限領域 ( $a \rightarrow 0$ ) でのポテンシャルのふるまいを予想する。

まず、 $\beta = 2.3$  において  $R = 1 \sim 4$  のポテンシャルを求めるのだが、 $\lim_{T \rightarrow \infty}$  を考慮に入れなければならない。そのために  $R = 4$  で固定して  $T = 1 \sim 8$  を測定する。ここで、縦軸を  $V(R)$  の値、横軸を  $T$  とし、格子サイズを  $8 \times 8 \times 8 \times 16$  に、配位の相関が消える間隔として up date の回数を 100 回に、(97) より発生させる配位の数  $N$  を 500 個にした。これを F.6-5 に示す。

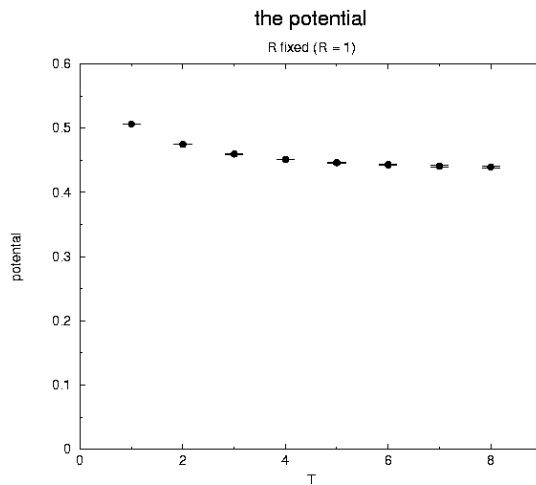


図 8: F6-5

F.6-5 から、 $T$  が大きくなるにしたがってポテンシャル  $V(R)$  の値が変化しなくなる (一定)。つまり、 $T$  が大きい所では、 $T \rightarrow \infty$  とみなせる。F.6-5 から、 $R = 1 \sim 4$  では  $T = 8$  は  $T \rightarrow \infty$  にみなせる。



したがって、 $T = 8$  で  $\beta = 2.3$  において  $R = 1 \sim 4$  のポテンシャル  $V(R)$  は

$$V(R) = -\frac{1}{8} \ln \langle W(R, 8) \rangle \quad (105)$$

となり、これを求める。ここで条件は、先ほどと同じく格子サイズを、 $8 \times 8 \times 16$  に、配位の相関が消える間隔として up date の回数を 100 回に、(97) より発生させる配位の数  $N$  を 500 個にした。縦軸を  $V(R)$  の値、横軸を  $R$  とし、その結果は、F.6-6 に示す。

F.6-6 に、のっている関数はポテンシャル (105) に

$$Y = a + bx + \frac{c}{x}$$

$$c = \sigma$$

でフィッティングしたものである。ここで、この関数は  $Y = V(R)$  で  $x = R$  で  $a, b, c$  は定数で  $\sigma$  は string tension。

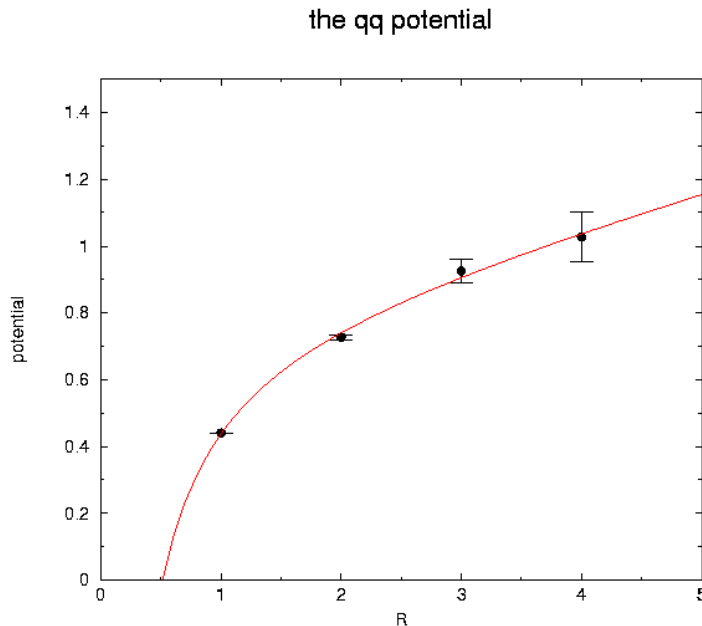


図 9: F6-6

しかし、F.6-6 だけでは本当に  $Y = a + bx + \frac{c}{x}$  にのっているのかわからない。

そこで、 $R$  と  $T$  を広げて  $Y = a + bx + \frac{c}{x}$  の関数にのっていることをしめす。ここで  $R$  を  $R = 1 \sim 6$  まで広げる。

まず、 $\beta = 2.44$  において  $R = 1 \sim 4$  のポテンシャルを求めるのだが、前回同様に  $\lim_{T \rightarrow \infty}$  を考慮に入れなければならない。そのために  $R = 6$  で固定して  $T = 1 \sim 12$  を測定する。ここで、縦軸を  $V(R)$  の値、横軸を  $T$  とし、格子サイズを、 $12 \times 12 \times 12 \times 24$  に、配位の相関が消える間隔として up date の回数を 1000 回に、(97) より発生させる配位の数  $N$  を 1000 個にした。これを F.6-7 に示す。

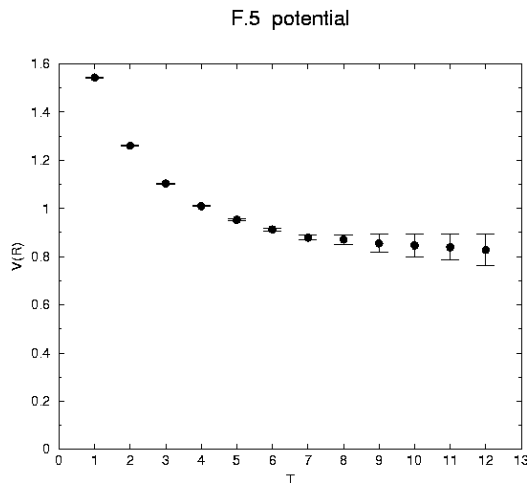


図 10: F6-7

F.6-7 から、 $T$  が大きくなるにしたがってポテンシャル  $V(R)$  の値が変化しなくなる (一定) ことから、 $R = 1 \sim 6$  では  $T = 12$  は  $T \rightarrow \infty$  にみなせる。

したがって、 $T = 12$  において  $R = 1 \sim 6$  のポテンシャル  $V(R)$  は

$$V(R) = -\frac{1}{12} \ln \langle W(R, 12) \rangle \quad (106)$$

となる。 $\beta = 2.44$  において、このポテンシャル  $V(R)$  を  $R = 1 \sim 6$  で測定する。ここで、縦軸を  $V(R)$  の値、横軸を  $R$  とし、格子サイズを  $12 \times 12 \times 12 \times 24$  に、配位の相関が消える間隔として up date の回数を

1000 回に、(97) より発生させる配位の数  $N$  を 3000 個にした。その結果を F.6-8 に示す。

F.6 potential

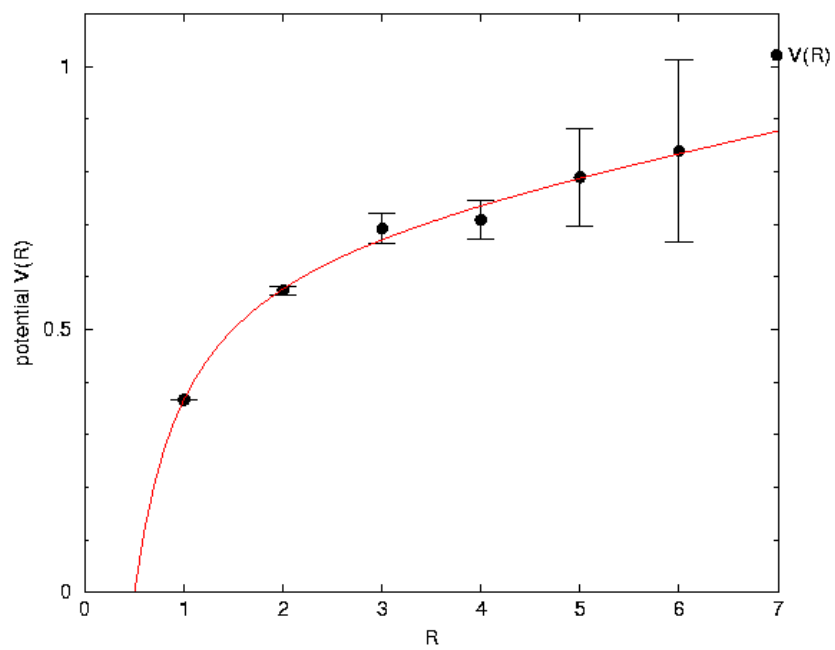


图 11: F6-8

## 8 考察

F.6-4 から、string tension の計算値が、強結合領域における string tension の理論値  $\langle \sigma \rangle = -\log(\frac{\beta}{4})$  と連続極限における string tension の理論値  $\langle \sigma \rangle = \exp[-\frac{6\pi^2}{11}(\beta-2)]$  と比べると、よく一致していることがわかる。強結合領域から、連続極限領域に至るまで、相転移などは起こらず、系がなめらかに移行している。

したがって、強結合領域から連続極限領域に至るまで、面積則が成り立ち、クォークの閉じ込めが実現している。これが閉じ込めと漸近的自由との共存が確からしいことを示している。

$\beta \geq 2.6$  で連続極限における string tension の理論値  $\langle \sigma \rangle = \exp[-\frac{6\pi^2}{11}(\beta-2)]$  からはずれていくのは、格子が有限であることの効果であると考えられる。

さらに、図 F.6-8 から  $R = 1 \sim 6$  でのポテンシャル  $V(R)$  の計算値に、 $Y = a + bx + \frac{c}{x}$  の関数をフィッティングすると、のっていることがわかる。

ここで、 $Y = a + bx + \frac{c}{x}$  が何を意味するか考えると、

クォーク・反クォーク間の距離が小さい時 ( $x(=R)$  が小さい)、 $Y[=V(R)]$  が  $x(=R)$  に反比例している ( $*Y = \text{定数} + \frac{c}{x}$ )。この項は 1 個のグルーオンの交換によって生じたもので、1 個の光子の交換によって生じるクーロン力の位置エネルギーに似た形をしている。

クォーク・反クォーク間の距離が大きいた時 ( $x(=R)$  が大きい)、 $Y[=V(R)]$  が  $x(=R)$  の一次関数に近づく ( $*Y = \text{定数} + bx$ )。これは (85) から、クォークの閉じ込めが起きていることが示されている。

すなわち、 $R$  を大きくしていくとポテンシャル  $V(R)$  が直線形になっていくのでクォークの閉じ込めが示された。

## 謝辞

今回、論文を書くにあたり多くの方々に貴重なご意見、温かいご指導をいただきました。特に、約一年間にわたって指導して頂いた平田先生、計算機でお世話になった佐々木さん、セミナーをして頂いたり質問に快く答えてくださった上岡さん、山口さん、金子さん、劉さんには、大変感謝しています。

また、お世話になったハドロン研究室の野村さん、同期の皆さん、いつも気にかけて下さった半導体研究室の世良先生、山川さん、坂田君、本当にありがとうございました。

それから論文作成にあたりお世話になった矢野さん、ありがとうございました。

## 参考文献

- [1] Michael Creutz : Monte Carlo study of quantized SU(2) gauge theory , Phys Rev D21 No.8 (1980) p.2308
- [2] Heinz J Routh : Lattice Gauge Theories (World Scientific,1992)
- [3] 岩崎洋一 : 格子ゲージ理論 (物理学最前線 1 1 )(共立出版、1985)
- [4] 九後汰一郎 : ゲージ場の量子論 (新物理学シリーズ 2 3 ) (培風館、1989)
- [5] M.S. スワンソン : 経路積分法 (物理学叢書 74) (吉岡書店、1996)
- [6] 原康夫 : 量子色力学とは何か (丸善株式会社、1986)

# Appendix A

## 統計力学との同等性

空間  $d$  次元、時間 1 次元の量子化された場の理論ユークリッド化したラグランジアンが

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} - V(\psi)$$

で与えられているとする。ハミルトニアン密度は

$$H = \frac{1}{2} \pi \pi + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + V(\psi)$$

で与えられる。ここで、

$$\begin{aligned} \langle f | \exp[-(\int H d^d x) T] | i \rangle &= \int D\psi \exp[-\int (\frac{1}{2} [(\frac{\partial \psi}{\partial \tau})^2 \\ &+ \sum_i (\frac{\partial \psi}{\partial x_i})^2] + V(\psi)) d^d x d\tau] \\ &= \int D\psi \exp[\int \mathcal{L}(i \frac{\partial \psi}{\partial \tau}, \psi) d^{d+1} x] \end{aligned}$$

を得る。これは空間  $d+1$  次元の統計力学と同等である。つまり、量子力学と統計力学との同等性が示される。



# Appendix B

## SU(2)ゲージ場の配位の update アルゴリズム

すべての状態の中から配位を取り出す時に、ある配位が選ばれる確率が重み因子  $e^{-S}$  に比例した分布をもつ配位を発生させる方法として熱浴 (heat-bath) 法を用いる。

作用  $S$  は格子上で局所的に定義されており、その定義の中でリンク変数  $U_\mu(n)$  と関係があるのは、そのリンク変数  $U_\mu(n)$  を含んでいる 6 つのプラケットだけである。したがって、その 6 つのプラケットの中の各リンク変数の情報から新しいリンク変数が作られる。

update によって、 $U$  というリンク変数が発生する確率を  $P(U)$  とすると、 $P(U)$  は重み因子  $e^{-S}$  をもつ確率であるので

$$dP(U) \propto e^{-S} dU$$

となる。ここで、 $dU$  は SU(2) の積分測度である。SU(2) の場合、 $U$  は

$$\begin{aligned} U &= a_0 \sigma_0 + ia_1 \sigma_1 + ia_2 \sigma_2 + ia_3 \sigma_3 \\ \sigma_0 &= I, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ a^2 &\equiv a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 \end{aligned}$$

と表すことができる。ここで、 $I$  は、 $2 \times 2$  の単位行列で、 $\sigma$  は Pauli 行列。このようにパラメータ化するとき、積分測度は

$$dU_\mu(n) = \frac{1}{2\pi^2} da^4 \delta(a^2 - 1)$$

ととればよい。

あるリンク  $(u, \mu)$  におけるリンク変数の update を考える。このリンクを含む 6 つのプラケットそれぞれにある、残りの 3 つリンク変数の積

を  $\tilde{U}_\alpha$  と表す。当然、 $\alpha$  は 1 ~ 6 である。よって、 $dP(U)$  は

$$dP(U) \propto dU \exp\left[\frac{\beta}{2} \text{Tr}(U' \sum_{\alpha=1}^6 \tilde{U}_\alpha)\right]$$

と表すことができる。SU(2) の場合、「いくつかの (SU(2) 群の元) の和」は「(SU(2) 群の元)  $\times const$ 」となる性質があるのであるので

$$\sum_{\alpha=1}^6 \tilde{U}_\alpha = k\bar{U}$$

と表す。ここで、 $\bar{U}$  は SU(2) 群の元である。 $k$  は

$$\begin{aligned} \det\left(\sum_{\alpha=1}^6 \tilde{U}_\alpha\right) &= k^2 \det(\bar{U}) \\ &= k^2 \end{aligned}$$

$$\mapsto k = \text{sqrt}\left[\det\left(\sum_{\alpha=1}^6 \tilde{U}_\alpha\right)\right]$$

となる。ここで  $U = U'\bar{U}^{-1}$  とおく。これを考えると

$$\begin{aligned} dP(U) &= dP(U'\bar{U}^{-1}) \\ &\propto dU \exp\left[\frac{\beta}{2} k \text{Tr}(U')\right] \\ &= dU' \exp\left[\frac{\beta}{2} k \text{Tr}(U')\right] (* U' \text{ も } SU(2) \text{ 群の元}) \\ &= \frac{1}{2\pi^2} da^4 \delta(a^2 - 1) \exp(\beta k a'_0) \end{aligned}$$

となる (以下  $a'_0 \rightarrow a_0$  とする)。したがって、4次元の単位球面上に  $a_0$  方向に  $\exp(\beta k a_0)$  の重みを持った乱数点を発生させればよいことになる。この方法で  $U'$  を生成し、新しいリンク変数を  $U = U'\bar{U}^{-1}$  とすれば、そのリンクにおける update が終了したことになる。これを全てのリンクについて順番に行えば、場の配位についての update が可能になる。

まず、 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  であるとする  $a^2 = a_0^2 + \vec{a}^2 = 1$  となるので、 $a_0$  を先に決めてやると  $\vec{a}$  の長さが  $|\vec{a}| = \sqrt{1 - a_0^2}$  と決まり

$$\delta(a^2 - 1) da^4 \exp(\beta k a_0) \propto \sqrt{1 - a_0^2} da_0 d\Omega \exp(\beta k a_0)$$

となる。ここで、 $d\Omega$  は微分立体角である。

したがって、「 $a_0$  を [-1,1] の範囲で

$$P(a_0) \propto \sqrt{1 - a_0^2} \exp(\beta k a_0)$$

に従って確率的に発生させ、 $\vec{a}$ をまったくランダムに発生させる」というアルゴリズムにすればよい。

これに従い、まず  $a_0$ を決める。 $P(a_0) \propto \exp(\beta k a_0)$  のような  $a_0$ を作り、これを確率  $\sqrt{1 - a_0^2}$ で採用することにする。

$[0,1]$  の一様乱数  $x$  により、 $P(a_0) \propto \sqrt{1 - a_0^2} \exp(\beta k a_0)$  のような  $a_0$  がつくと

$$dx \propto \exp(\beta k a_0) da_0$$

であるので、

$$\begin{aligned} x &= \frac{\int_{-1}^{a_0(x)} \exp(\beta k a_0) da_0}{\int_{-1}^1 \exp(\beta k a_0) da_0} \\ &= \frac{\exp[\beta k(a_0 - 1)] - \exp(-2\beta k)}{1 - \exp(-2\beta k)} \end{aligned}$$

$$\mapsto x[1 - \exp(-2\beta k)] + \exp(-2\beta k) = \exp[\beta k(a_0 - 1)]$$

となり、ここで

$$y \equiv x[1 - \exp(-2\beta k)] + \exp(-2\beta k)$$

を定義すると、 $y$ が

$$\mapsto y = \exp[\beta k(a_0 - 1)]$$

となる。この時、 $y$ は  $[e^{-\beta k}, 1]$  の一様乱数である。これを用いて

$$a_0 = 1 + \frac{1}{\beta k} \ln(y)$$

になり、これから  $a_0$ を決める。

別の  $[0,1]$  の一様乱数  $z$ を用いて  $z \geq \sqrt{1 - a_0^2}$ であるならば  $a_0$ を採用し、 $z < \sqrt{1 - a_0^2}$ であるならば  $a_0$ を破棄する。これを、採用するまで繰り返せば  $a_0$ が得られる。

$\vec{a}$ に決め方については、半径  $\sqrt{1 - a_0^2}$ の 3次元単位球面上に一様乱数を発生させ、その座標を  $(a_1, a_2, a_3)$  とするという方針で進めることにする。

図 F-A のように、 $\theta, \varphi$ をとると  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$  から、まず  $[0, 2\pi]$  の  $\varphi$  の一様乱数で  $\varphi$ を決めて、次に  $\theta$ が  $P(\theta) \propto \sin\theta$ の重みをもつように決める。

$[0,1]$  の一様乱数  $x$  として、 $dx = \sin \theta d\theta$  と  $[0,2\pi]$  の  $\theta$  から

$$\begin{aligned} x &= \frac{\int_0^{\theta(x)} \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi \sin \theta d\theta} \\ &= \frac{(\cos \theta(x) - 1)}{-2} \\ &= -\frac{1}{2}(\cos \theta(x) - 1) \end{aligned}$$

従って、

$$\begin{cases} \cos \theta(x) = 1 - 2x \\ \sin \theta(x) = \sqrt{1 - \cos^2 \theta(x)} \end{cases} \quad (107)$$

これらより、

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{1 - a_0^2} \sin \theta \cos \pi \\ a_2 &= \sqrt{1 - a_0^2} \sin \theta \sin \pi \\ a_3 &= \sqrt{1 - a_0^2} \cos \theta \end{aligned}$$

となり、これらの  $a_0, a_1, a_2, a_3$  を用いて  $U' = a_0\sigma_0 + ia_1\sigma_1 + ia_2\sigma_2 + ia_3\sigma_3$  を決めて  $U = U'\bar{U}^{-1}$  として新しいリンク変数が得られる。

これを全てのリンク変数に対して繰り返すことによって配位の update が終了する。

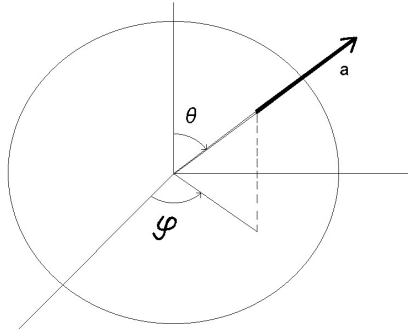


図 12: F-A