

1 3 年度 広島大学理学部物理科学科  
卒業論文

箱の中の 2 粒子状態と  
それらの散乱行列との関係

ハドロン物理学研究室 1079041A 庄本卓司

2002 年 2 月 8 日

指導教官：平田道紘  
審査主査：平田道紘  
副査：小方厚

## Abstract

2体の散乱問題を解く上で、散乱から出る重要な物理量として、phase shift (位相のずれ) があり、実験の解析から求める事ができる。lattice QCD (格子量子色力学) の有効性を調べるために、lattice QCD から phase shift を計算しようと思うと直接計算できない。そこで、lattice QCD から比較的求めやすい、箱の中の2粒子のエネルギー固有値を、phase shift に結びつける事を将来やりたい。そのための準備段階として、普通のポテンシャルモデルを用い、その定式化を試みた。そして、定式化から求めた phase shift と、通常の散乱理論から求めた phase shift を比較し、定式化した方法が有効であるかどうかを検討した。

# Contents

1	序論	5
2	非相対論モデル	6
2.1	有限値でのモデルの特性	6
2.2	箱の中のエネルギー固有状態	8
2.3	角運動量 cutoff	8
3	Helmholtz 方程式の周期的特異解	10
3.1	定義	10
3.2	一般解 (k の正則値)	11
3.3	一般解 (k の特異値)	13
3.4	球面調和関数での展開 (k の正則値)	14
3.5	球面調和関数での展開 (k の特異値)	15
4	エネルギー固有状態の構成	17
4.1	エネルギー固有状態と Helmholtz 方程式の特異解	17
4.2	エネルギースペクトル (k の正則値)	18
4.3	エネルギースペクトル ( $k > 0$ の特異値)	19
4.4	cubic 対称性と 2 粒子状態	20
5	$A_1^+$ におけるエネルギースペクトル	21
5.1	$A_1^+$ におけるエネルギースペクトルと位相のずれとの関係	21
6	結果	22
7	考察	25
8	謝辞	26
A	角運動量 $l, l' \leq 4$ に対する $M(\Gamma)_{ln, l'n'}$ ( $n = n' = 1$ の行列要素	27

# 1 序論

現在、ハドロンとハドロンの散乱に関する実験データは豊富にあるが、その情報を強い相互作用の理論である量子色力学 (QCD) によってデータを解析することは大変困難を伴う。そのため、非摂動的な問題を取り扱うには latticeQCD が用いられる。しかし、散乱振幅をこの latticeQCD から求めるには、次の 2 つの難点がある。1 つは、latticeQCD はユークリッド空間における理論であるので、2 粒子状態の実時間発展を直接求めることができない。もう 1 つは、現在扱える lattice のサイズがかなり小さく、2 粒子を閉じ込めて考えることができない。従って、直接散乱振幅を計算するのは難しい。そこで、散乱から求まる物理量を、QCD から計算できる物理量と間接的に関係づけることを考えなければならない。ここで、 $1+1$  空間時間次元での量子場理論において、弾性散乱の振幅を計算する一般的な方法が提案されてきたことに注目する。その方法は、“周期的境界条件を持つ、有限なサイズ  $L$  の箱に閉じ込めた 2 粒子状態のエネルギー固有値が、位相のずれ  $\delta(k)$  と関係がある。” という事実のもとに成り立っている。エネルギー固有値を QCD で計算するのは比較的容易であるから、位相のずれもそこから求められるはずである。また、この方法は、上で述べた 2 つの難点を解決でき、特に lattice のサイズの制約を外すことができるため、非常に有効な方法であると思われる。従って、本論文では、将来エネルギー固有値から位相のずれを計算することを想定して準備をしておく。今、簡単にするために、ポテンシャルモデルを用いて、その定式化を試みた。そしてその結果、重要な関係式を得た。さらに、シミュレーションによって、この関係式と通常の散乱理論の両方から phase shift を求め比較することで、この方法の有効性を検討した。

## 2 非相対論モデル

### 2.1 有限値でのモデルの特性

3次元空間において、短い距離で相互作用する、質量  $m$ 、スピン 0 の 2 粒子を考える。この系の状態は、スカラー波動関数  $\psi(\vec{x}, \vec{y})$  ( $(\vec{x}, \vec{y})$  は粒子の位置) によって記述される。そして、2粒子の全運動量を 0 とした時、波動関数は  $\vec{r} = \vec{x} - \vec{y}$  のみに依存する。この系のハミルトニアンは、

$$H = -\frac{1}{2\mu}\Delta + V(r) \quad r = |\vec{r}| \quad (1)$$

ここで、 $\mu$  は換算質量であり、 $\mu = \frac{m}{2}$  である。また、

$$V(r) = 0, \quad r > R \quad (2)$$

とする。ここで、 $R$  はポテンシャルの範囲である。次に、 $\psi(\vec{r})$  を球面調和関数で展開すると、

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \varphi) \psi_{lm}(r) \quad (3)$$

$$\vec{r} = r(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) \quad (4)$$

(1)、(3) 式をシュレディンガー方程式に代入し計算すると、

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} + k^2 - 2\mu V(r) \right\} = 0 \quad (5)$$

ここで、 $k$  は、 $E$  と

$$E = \frac{k^2}{2\mu} \quad (6)$$

という、関係がある。

(5) 式は、原点近傍で束縛される線形独立な解  $u_l(r; k)$  を持ち、その規格化は、束縛条件を課すことで決定される。従って、

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^{-l} u_l(r; k) = 1 \quad (7)$$

となり、

$$\psi_{lm}(r) = b_{lm}u_l(r; k), \quad (b_{lm} : \text{const.}) \quad (8)$$

となる。また  $r > R$  の時、(2) 式より  $V(r) = 0$  となり、(5) 式の独立な 2 個の解は、球面 Bessel 関数  $j_l(kr)$  および球面 Neumann 関数  $n_l(kr)$  の線形結合で表すことができる。従って、

$$u_l(r; k) = \alpha_l(k)j_l(kr) + \beta_l(k)n_l(kr) \quad (9)$$

となる。ここで、 $\alpha_l(k), \beta_l(k)$  は、 $k$  が 0 でない時両方とも消えず、 $k^l \alpha_l(k)$  と  $k^{-l-1} \beta_l(k)$  の結合が全体の解析関数である事を示せる。また、対称性

$$\begin{aligned} \alpha_l(k)^* &= \alpha_l(k^*), & \alpha_l(-k) &= (-1)^l \alpha_l(k) \\ \beta_l(k)^* &= \beta_l(k^*), & \beta_l(-k) &= (-1)^{l+1} \beta_l(k) \end{aligned} \quad (10)$$

が保たれることは明らかである。

そして、 $k > 0 (E > 0)$  の時、角運動量  $l$  に対応する位相は、S 行列を用いて

$$S_{kl} = e^{2i\delta_l(k)} = \frac{\alpha_l(k) + i\beta_l(k)}{\alpha_l(k) - i\beta_l(k)} \quad (11)$$

同様に、 $-ik > 0 (E < 0)$  の時、

$$S_{kl} = e^{2i\sigma_l(k)} = \frac{\alpha_l(k) + \beta_l(k)}{\alpha_l(k) - \beta_l(k)} \quad (12)$$

と表すことができる。

ここで、 $u_l(r; k)$  について、 $k \rightarrow \infty$  の極限をとると、

$$u_l(r; 0) = \alpha_l^0 \frac{1}{(2l+1)!!} r^l + \beta_l^0 \frac{(2l+1)!!}{(2l+1)} r^{l-1}, \quad (r > R) \quad (13)$$

と、書き換えることができる。また、

$$\alpha_l^0 = \lim_{k \rightarrow 0} k^l \alpha_l(k), \quad \beta_l^0 = \lim_{k \rightarrow 0} k^{-l-1} \beta_l(k) \quad (14)$$

である。ここで、 $\alpha_l^0$  が 0 でない時、領域演算子

$$a_l \equiv \frac{\beta_l(k)}{\alpha_l(k)} \quad (15)$$

を定義し、散乱長と呼ぶことにする。

この、 $a_l$  は、低エネルギーでの位相  $\delta_l(k)$  の振舞いを決定する、重要な演算子である。また、(14) 式を (11) 式に代入すると

$$\delta_l(k) = \nu_l \pi + a_l k^{2l+1} + O(k^{2l+3}) \quad (16)$$

を推測できる。

## 2.2 箱の中のエネルギー固有状態

2 粒子を  $L \times L \times L$  の、周期境界条件を持つ箱の中に閉じ込める。この時、全運動量 0 の状態は、波動関数

$$\psi(\vec{r} + \vec{n}L) = \psi(\vec{r}), \quad n \in Z^3 \quad (17)$$

によって記述できる。また、ハミルトニアンを

$$H = -\frac{1}{2\mu}\Delta + V_L(\vec{r}), \quad V_L(\vec{r}) = \sum_{n \in Z^3} V|\vec{r} + \vec{n}L| \quad (18)$$

と定義する。そして、 $\psi(\vec{r})$  は、エネルギー  $E = \frac{k^2}{2\mu}$  の固有関数であり、 $L > 2R$  と仮定すると、 $\psi(\vec{r})$  は、

$$\Omega = \{\vec{r} \in R^3 \mid |\vec{r} + \vec{n}L|, \quad n \in Z^3\} \quad (19)$$

という範囲で、Helmholtz 方程式、

$$(\Delta + k^2)\psi(\vec{r}) = 0 \quad (20)$$

の連続で周期的な解となるのは明らかである。また、 $0 \leq r < \frac{2}{L}$  の時は、(3) 式で定義された球面成分  $\psi_{lm}(r)$  は、(5) 式の一般解である。また、固定された  $k$ 、 $l$  に対応する解のみが存在するから、定数  $b_{lm}$ 、 $R < r < \frac{2}{L}$  に対して、

$$\psi_{lm}(r) = b_{lm} \{\alpha_l(k)j_l(kr) + \beta_l(k)n_l(kr)\} \quad (21)$$

となり、ハミルトニアン演算子の固有関数は範囲  $\Omega$  での  $\psi_{lm}(r)$  の性質によって決定される。これは次の定理によって証明される。

定理 2.1  $\psi(\vec{r})$  が範囲  $\Omega$  での Helmholtz 方程式の周期的な解であるとすると、その球面成分  $\psi_{lm}(r)$  は定数  $b_{lm}$ 、 $R < r < \frac{2}{L}$  に対して、(21) 式を満たす。その時  $\Omega$  上の  $\psi(\vec{r})$  と表裏一体である  $H$  の固有関数が存在する。

この定理は、与えられたエネルギー間隔  $E_1 < E < E_2$  での位相  $\delta_l(k)$  ( $\sigma_l(k)$ ) が分かっている時、 $H$  のスペクトルが原理的に計算できることをほのめかしている。よって、(21) 式を満たす球面成分を持った、範囲  $\Omega$  での Helmholtz 方程式の連続解を、全て導きさえすればよい。

## 2.3 角運動量 cutoff

ここでは、相互作用における、角運動量 cutoff を導入する。これは、数学的手法として考えられ、 $\Lambda \rightarrow \infty$  をとることで、計算の最後を省略するとい



うものである。この、角運動量 cutoff は、修正したハミルトニアン、

$$H_\Lambda = -\frac{1}{2\mu}\Delta + Q_\Lambda V(r) \quad (22)$$

を定義することで、有限値の系に導入される。ここで、

$$Q_\Lambda \psi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\Lambda} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \varphi) \psi_{lm}(r) \quad (23)$$

は、角運動量  $l \leq \Lambda$  である波動関数の、空間射影を表す。以下、この定義された  $H_\Lambda$  のスペクトルが、 $H$  のスペクトルに収束することを確認する。 $H$  と  $H_\Lambda$  のスペクトルは、一般的には同じではないが、極限  $\Lambda \rightarrow \infty$  をとることで互いに近付くことを示せる。これを確認するために、縮退していない固有関数を考える。ここで、 $H_\Lambda - H$  を摂動として扱うと、1次のエネルギー偏差  $\Delta E$  は、

$$\Delta E = c \sum_{l=\Lambda+1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \int_0^{\infty} dr r^2 V(r) |\psi_{lm}(r)|^2 \quad (24)$$

で与えられ、 $c$  は  $\Lambda$  と無関係の定数である。展開係数  $\psi_{lm}(r)$  は、極限  $l \rightarrow \infty$  をとると、 $0 \leq r \leq R$  の間で、急速に 0 に収束する ( $\frac{1}{l}$  のべきよりも速く)。従って、極限  $\Lambda \rightarrow \infty$  をとる時、 $\Delta E$  は急速に消える。このようにして、 $H_\Lambda$  のスペクトルが、 $H$  のスペクトルに収束することを確認できた。4章では、この角運動量 cutoff の系について議論をしていく。

### 3 Helmholtz 方程式の周期的特異解

2章では、有限値での、非相対論モデルのエネルギー固有状態は、Helmholtz 方程式の解と密に関係していることを示した。4章では、2章の最後で述べた、角運動量 cutoff に対する解を導くが、3章ではその準備として、Helmholtz 方程式の特異解について論ずる。特異解が分かれば、他の全ての解も導きだせるはずである。

#### 3.1 定義

以下に挙げる性質を  $\psi(\vec{r})$  が持つ時、 $\psi(\vec{r})$  を Helmholtz 方程式の周期的特異解とよぶ。

(i) 全ての  $\vec{r} \neq 0$  に対して定義された連続関数であり、Helmholtz 方程式

$$(\Delta + k^2)\psi(\vec{r}) = 0 \quad (25)$$

を満たす。

(ii) 周期  $L$  の関数である。

(iii) 原点近傍で、 $\frac{1}{r}$  のべきで束縛される。すなわち、

$$\sup_{0 < r < \frac{2}{L}} |r^{\Lambda+1}\psi(\vec{r})| < \infty \quad (26)$$

を満たす。 $\Lambda$  は整数であり、 $\psi(\vec{r})$  の自由度である。

ここで、“singular set”

$$\mathcal{I} = \{k \in R \mid k = \pm \frac{2\pi}{L}|\vec{n}|, \quad \vec{n} \in Z^3\} \quad (27)$$

を定義する。この  $\mathcal{I}$  に含まれる  $k$  にたいして、Helmholtz 方程式は周期的な平面波解をもつ。しかし、この平面波解は、話を複雑にするので、3.3節で別に取り扱う。

Helmholtz 方程式の特異解  $\psi(\vec{r})$  の、原点における特異性の構成は、(25) 式に強く制約を受ける。この様子を見るために、まず  $\psi(\vec{r})$  が  $0 < r < \frac{L}{2}$  に対して連続であることに注目する。(3) 式の、球面調和関数での展開は(5) 式を満たすから、

$$\psi_{lm}(r) = b_{lm}k^{-1}j_l(kr) + c_{lm}k^{l+1}n_l(kr) \quad (28)$$

となり、(28) 式のような定数  $b_{lm}, c_{lm}$  が存在する。また、(26) 式および、

$$\psi_{lm}(r) = \int d\theta d\varphi \sin \theta Y_{lm}(\theta, \varphi)^* \psi(\vec{r}) \quad (29)$$

より、

$$c_{lm} = 0, \quad l > \Lambda \quad (30)$$

と推測できる。このようにして、

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\Lambda} \sum_{m=-l}^l c_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) k^{l+1} n_l(kr) + \hat{\psi}(\vec{r}) \quad (31)$$

を示すことができる。ここで、 $\hat{\psi}(\vec{r})$  は、原点  $\vec{r}$  近傍での Helmholtz 方程式の連続解である。

### 3.2 一般解 (k の正則値)

この節では、k が “singular set”  $\mathcal{I}$  に含まれていないものと仮定する。箱の中における Helmholtz 演算子は 0 モードを持たず、グリーン関数、

$$G(\vec{r}; k^2) = L^{-3} \sum_{\vec{p} \in \Gamma} \frac{e^{i\vec{p}\vec{r}}}{\vec{p}^2 - k^2} \quad (32)$$

が定義される。(32) 式の和を、格子、

$$\Gamma = \left\{ \vec{p} \in R^3 \mid \vec{p} = \frac{2\pi}{L} \vec{n}, \quad \vec{n} \in Z^3 \right\} \quad (33)$$

にひき、分布という意味で理解する。 $G(\vec{r}; k^2)$  は明らかに周期的であり、

$$(\Delta + k^2)G(\vec{r}; k^2) = - \sum_{\vec{n} \in Z^3} \delta(\vec{r} + \vec{n}L) \quad (34)$$

を満たす。特に、全ての  $\vec{r} \neq 0$  について、グリーン関数は Helmholtz 方程式の解となり、この範囲では無限に微分可能であることが elliptic regularity によって言える。また、elliptic 微分演算子のグリーン関数は、原点近傍で  $\frac{1}{r}$  のべきで束縛される。従って、3.1 節で示した性質を  $G(\vec{r}; k^2)$  は満たしており、Helmholtz 方程式の周期的特異解とよぶことができる。

ここで、原点での  $G(\vec{r}; k^2)$  の特異性を決定するために、

$$(\Delta + k^2)n_0(kr) = -\frac{4\pi}{k}\delta(\vec{r}) \quad (35)$$

に注目する。そして、もう一度 elliptic regularity に着目すると、差

$$G(\vec{r}; k^2) - \frac{k}{4\pi}n_0(kr) \quad (36)$$

が、原点近傍で連続関数でなければならないという結論をくださる。言い換えると、グリーン関数に対応する (3 1) の表現は、

$$G(\vec{r}; k^2) = \frac{k}{4\pi} n_0(kr) + \hat{G}(\vec{r}; k^2) \quad (37)$$

となる。ここで、 $\hat{G}(\vec{r}; k^2)$  は、関数の正則部分である。その他の特異解は、 $\vec{r}$  に関して分けることでグリーン関数から一般化できる。しかし、線形独立な解を得るためには、使っている微分演算子が、ラプラシアンに比例する項を含んでいないことに注意しなければならない。この問題は、調和多項式、

$$\mathcal{Y}_{lm}(\vec{r}) = r^l Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (38)$$

を導入し、

$$G_{lm}(\vec{r}; k^2) = \mathcal{Y}_{lm}(\nabla) G(\vec{r}; k^2) \quad (39)$$

を定義することで解決する。また、 $\mathcal{Y}_{lm}(\nabla)$  は、

$$\mathcal{Y}_{lm}(\nabla) n_0(kr) = (-k)^l Y_{lm}(\theta, \varphi) n_l(kr) \quad (40)$$

と作用するため、(3 7) 式より、

$$G_{lm}(\vec{r}; k^2) = \frac{(-1)^l}{4\pi} Y_{lm}(\theta, \varphi) k^{l+1} n_l(kr) + \hat{G}_{lm}(\vec{r}; k^2) \quad (41)$$

と結論をくださる。この結果から、 $G_{lm}(\vec{r}; k^2)$  は線形独立であることがいえた。それらはまた、自由度  $\Lambda$  である Helmholtz 方程式の周期的特異解が、 $l \leq \Lambda$  である  $G_{lm}(\vec{r}; k^2)$  の線形結合になっている、という意味でも完全である。これは簡単に証明できる。(3 1) 式と (4 1) 式より、

$$\chi(\vec{r}) \equiv \psi(\vec{r}) - \sum_{l=0}^{\Lambda} \sum_{m=-l}^l 4\pi (-1)^l c_{lm} G_{lm}(\vec{r}; k^2) \quad (42)$$

が、原点の正則関数に拡張できることを推測できる。また、 $\chi(\vec{r})$  は周期的であり Helmholtz 方程式の解である。言い換えると、固有値が  $-k^2$  であるラプラシアンの、連続で周期的な固有関数である。しかし、 $k$  が “singular set”  $\mathcal{I}$  に含まれていないと仮定したので、固有関数は存在せず、 $\chi(\vec{r}) = 0$  となる。このように、完全であることが証明できた。

### 3.3 一般解 (k の特異値)

k の特異値に対して、集合

$$\Gamma_k = \{\vec{p} \in \Gamma \mid \vec{p}^2 = k^2\} \quad (43)$$

は空ではなく、平面波

$$e^{i\vec{p}\vec{r}}, \quad \vec{p} \in \Gamma_k \quad (44)$$

が、Helmholtz 方程式の解になる。解を得るためには、グリーン関数の微分をとればよく、

$$G'(\vec{r}; k^2) = L^{-3} \sum'_{\vec{p} \in \Gamma} \frac{e^{i\vec{p}\vec{r}}}{\vec{p}^2 - k^2} \quad (45)$$

ここで、 $\sum'$  は  $\vec{p} \in \Gamma$  に含まれる全ての運動量を除いてあることを示す。また、

$$(\Delta + k^2)G'(\vec{r}; k^2) = - \sum_{\vec{n} \in Z^3} \delta(\vec{r} + \vec{n}L) + L^{-3} \sum_{\vec{p} \in \Gamma_k} e^{i\vec{p}\vec{r}} \quad (46)$$

は簡単に示せる。グリーン関数と、その微分

$$G'_{lm}(\vec{r}; k^2) = \mathcal{Y}_{lm}(\nabla)G'(\vec{r}; k^2) \quad (47)$$

は、それら自身が Helmholtz 方程式の周期的特異解ではないが、そのような関数は、係数

$$\sum_{l=0}^{\Lambda} \sum_{m=-l}^l v_{lm} i^l \mathcal{Y}_{lm}(\vec{p}) = 0 \quad \vec{p} \in \Gamma_k \quad (48)$$

を伴う線形結合、

$$\sum_{l=0}^{\Lambda} \sum_{m=-l}^l v_{lm} G'_{lm}(\vec{r}; k^2) \quad (49)$$

を作ることで、構成され得る。

$\Gamma_k$  には、有限な数の点しかないから、これらの条件は  $\Lambda$  が十分大きいならば、いつも満たされる。平面波 (44) と線形結合 (48)、(49) は Helmholtz 方

程式の周期的特異解の完全系を形成する。  
ここで、(4 2) 式の  $G_{lm}$  を  $G'_{lm}$  に置き換えると、

$$\chi(\vec{r}) \equiv \psi(\vec{r}) - \sum_{l=0}^{\Lambda} \sum_{m=-l}^l v_{lm} G'_{lm}(\vec{r}; k^2), \quad v_{lm} = 4\pi(-1)^l c_{lm} \quad (50)$$

と書き換えることができる。また  $\chi(\vec{r})$  は、

$$(\Lambda + k^2)\chi(\vec{r}) = -L^{-3} \sum_{\vec{p} \in \Gamma_k} e^{i\vec{p}\vec{r}} \sum_{l=0}^{\Lambda} \sum_{m=-l}^l v_{lm} i^l \mathcal{Y}_{lm}(\vec{p}) \quad (51)$$

を満たす。そして、この方程式に  $e^{i\vec{p}\vec{r}}$  を掛け、 $\vec{r}$  で積分すると、係数  $v_{lm}$  が (4 8) 式の制約を解くことが分かる。特に、(5 1) 式の右辺は消え、 $\chi(\vec{r})$  は平面波 (4 4) の線形結合になる。このようにして、完全性が証明できた。

### 3.4 球面調和関数での展開 (k の正則値)

3. 2 節で、“singular set”  $\mathcal{Y}$  に含まれない  $k$  に対する、Helmholtz 方程式の周期的特異解が、 $G_{lm}(\vec{r}; k^2)$  の線形結合になることを示した。ここでは、これらの基底要素を球面調和関数で展開することを考える。3. 1 節での議論から、(4 1) 式の、原点における特異性の構成は分かっており、 $0 < r < \frac{L}{2}$  の時、

$$G_{lm}(\vec{r}; k^2) = \frac{(-1)^l}{4\pi} k^{l+1} Y_{lm}(\theta, \varphi) n_l(kr) + \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} \mathcal{M}_{lm, l'm'} Y_{l'm'}(\theta, \varphi) j_{l'}(kr) \quad (52)$$

と推論できる。ここで出てきた  $\mathcal{M}_{lm, l'm'}$  は行列で、有限値での 2 粒子スペクトルの解析において、中心的な役割をする。それ故、できるだけ明白に計算することが必要である。

そのために、まず最も簡単な場合なケース、

$$G(\vec{r}; k^2) = \frac{k}{4\pi} n_0(kr) + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l g_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) j_l(kr) \quad (53)$$

を考える。そして、ここで zeta 関数を導入する。zeta 関数は、 $\text{Re} 2s > l + 3$  の  $s$  に対して、

$$\mathcal{Z}_{lm}(s; q^2) = \sum_{\vec{n} \in Z^3} \mathcal{Y}_{lm}(\vec{n}) (\vec{n}^2 - q^2)^{-s} \quad (54)$$

で定義される。ここで  $-\pi < \arg(\vec{n}^2 - q^2) \leq \pi$  である。特に、 $s = 1$  では特異性はなく、(5 3) 式に出てきた  $g_{lm}$  と、

$$g_{lm} = \frac{i^l}{\pi L q^l} \mathcal{Z}_{lm}(1; q^2), \quad q = \frac{kL}{2\pi} \quad (55)$$

という関係がある。

$G_{lm}(\vec{r}; k^2)$  の球面調和関数による展開を得るために、微分演算子  $\mathcal{Y}_{lm}(\nabla)$  を (5 3) 式に作用させる。この微分演算子の特異項での振舞いは、(4 0) 式で与えられている。すると、

$$\mathcal{Y}_{lm}(\nabla) Y_{js}(\theta, \varphi) j_l(kr) = \frac{k^l}{\sqrt{4\pi}} \sum_{l'=|j-l|}^{j+l} \sum_{m'=-l'}^{l'} C_{lm,js,l'm'} Y_{l'm'}(\theta, \varphi) j_{l'}(kr) \quad (56)$$

となり、 $C_{lm,js,l'm'}$  は、Wigner 3j-symbols と

$$C_{lm,js,l'm'} = (-1)^{m'} i^{l-j+l'} \sqrt{(2l+1)(2j+1)(2l'+1)} \quad (57)$$

$$\times \begin{pmatrix} l & j & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & j & l' \\ m & s & -m' \end{pmatrix} \quad (58)$$

という関係がある。これらを踏まえて計算すると、 $\mathcal{M}_{lm,l'm'}$  は最終的に、

$$\mathcal{M}_{lm,l'm'} = \frac{(-1)^l}{\pi^{3/2}} \sum_{j'=|l-l'|}^{l+l'} \sum_{s=-j}^j \frac{i^j}{q^{j+1}} \mathcal{Z}_{js}(1; q^2) C_{lm,js,l'm'} \quad (59)$$

となる。また、この  $\mathcal{M}_{lm,l'm'}$  は、cubic 対称性により

$$\mathcal{M}_{lm,l'm'} = 0 \quad m \neq m' \pmod{4} \text{ or } l \neq l' \pmod{2} \quad (60)$$

という約束があり、任意の指標に対して

$$\mathcal{M}_{lm,l'm'} = \mathcal{M}_{l'm',lm} = \mathcal{M}_{l-m,l'-m'} \quad (61)$$

という関係が保たれる。

### 3.5 球面調和関数での展開 (k の特異値)

3. 3 節で  $k$  が特異な時、Helmholtz 方程式の周期的特異解には 2 つのタイプがあることを述べた。1 つは (4 4) 式の平面波である。この平面波の球面調和関数での展開は、

$$e^{i\vec{p}\vec{r}} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l i^l Y_{lm}(\theta_p, \varphi_p) Y_{lm}^*(\theta, \varphi) j_l(pr) \quad (62)$$

で与えられる。もう一方の解は、(4 8) 式を満たす係数  $v_{lm}$  を伴った、(4 9) 式の線形結合である。また、(4 9) 式は

$$\sum_{l=0}^{\Lambda} \sum_{m=-l}^l v_{lm} G'_{lm}(\vec{r}, k^2) = \lim_{h \rightarrow k} \sum_{l=0}^{\Lambda} \sum_{m=-l}^l v_{lm} G_{lm}(\vec{r}, h^2) \quad (63)$$

に従い、球面調和関数での展開は、(5 2) 式から導くことができる。特に、0 でない整数ベクトルに対して  $k = \frac{2\pi|\vec{n}|}{L}$  ならば、

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\Lambda} \sum_{m=-l}^l v_{lm} G'_{lm}(\vec{r}, k^2) &= \sum_{l=0}^{\Lambda} \sum_{m=-l}^l v_{lm} \frac{(-1)^l}{4\pi} k^{l+1} \{Y_{lm}(\theta, \varphi) n_l(kr) \\ &\quad + \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} \mathcal{M}_{lm, l'm'} Y_{l'm'}(\theta, \varphi) j_{l'}(kr)\} \end{aligned} \quad (64)$$

となる。行列  $\mathcal{M}_{lm, l'm'}$  は展開、

$$\mathcal{M}_{lm, l'm'} = \frac{1}{q^2 - \vec{n}^2} \mathcal{N}_{lm, l'm'} + \mathcal{M}'_{lm, l'm'} + O(q^2 - \vec{n}^2), \quad (q \rightarrow |\vec{n}|) \quad (65)$$

で決定される。また、 $\mathcal{N}_{lm, l'm'}$  は

$$\mathcal{N}_{lm, l'm'} = -\frac{2}{\pi|\vec{n}|} \sum_{\vec{p} \in \Gamma} i^{l-l'} Y_{lm}(\theta_p, \varphi_p)^* Y_{l'm'}(\theta_p, \varphi_p) \quad (66)$$

で与えられる。

$k = 0$  の場合は幾分特別になる。この場合 (4 9) 式において  $v_{00} = 0$  になり、それによって Helmholtz 方程式の特異解は  $l \geq 1$  の  $G'_{lm}(\vec{r}; 0)$  となる。これは  $G_{lm}$  に等しくなり、(5 2) 式より

$$\begin{aligned} G'_{lm}(\vec{r}; 0) &= \frac{(-1)^l}{4\pi} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{l+1} \{Y_{lm}(\theta, \varphi) \frac{(2l+1)!!}{2l+1} \rho^{-l-1} \\ &\quad + \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} \mathcal{M}^0_{lm, l'm'} Y_{l'm'}(\theta, \varphi) \frac{\rho^{l'}}{(2l'+1)!!}\} \end{aligned} \quad (67)$$

となる。ここで、 $\rho = \frac{2\pi r}{L}$  である。ここで出てきた行列  $\mathcal{M}^0_{lm, l'm'}$  は、

$$\mathcal{M}^0_{lm, l'm'} = \lim_{q \rightarrow 0} q^{l+l'+1} \mathcal{M}_{lm, l'm'} \quad (l \geq 1) \quad (68)$$

で定義され、(3 4) 式を代入することで詳しく書ける。



## 4 エネルギー固有状態の構成

有限値での非相対論モデルでのエネルギースペクトルを議論するために十分準備をした。ここでは、2章で予告をした角運動量停止点  $\Lambda$  の系について話を進めていく。また、以下箱のサイズ  $L$  が  $2R$  よりも大きく、 $k$  は (6) で定義された角運動量を表すものとする。

### 4.1 エネルギー固有状態と Helmholtz 方程式の特異解

すでに、有限値での  $H_\Lambda$  のスペクトルの計算は、 $r = R$  の球に沿った境界条件とみなせる範囲  $\Omega$  での、Helmholtz 方程式の解を導くことと同等であると述べた。角運動量停止点は、次の定義を示す時、状態をより簡単にする。

定理 4.1 有限値での  $H_\Lambda$  の固有関数と、自由度が  $\Lambda$  であり  $\psi_{lm}(r)$  が  $l \leq \Lambda$ 、 $0 < r < \frac{L}{2}$  に対して (2.1) 式を満たす、周期的特異解  $\psi(\vec{r})$  との間に 1 対 1 の対応関係がある。すなわち、 $\Omega$  で制限されたどの関数も、それぞれのエネルギー固有関数と表裏一体の関係がある。

それゆえ、エネルギースペクトルを決定するためには、特定のタイプの周期的特異解をすべて構成すれば十分である。また、この定理の証明は簡単である。今、特定の性質を持った Helmholtz 方程式の特異解が与えられているとすると、 $\Omega$  でのその解は、定理 2.1 を満たし、 $H_\Lambda$  の固有関数が存在することは保証される。

逆に言うと、エネルギー固有関数  $\chi(\vec{r})$  を考えると、間隔  $R < r < \frac{2}{L}$  でのその球面成分は、

$$\chi_{lm}(\vec{r}) = b_{lm} \times \begin{cases} \alpha_l(k)j_l(kr) + \beta_l(k)n_l(kr), & \text{if } l \leq \Lambda, \\ (2l+1)!!k^{-l}j_l(kr), & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (69)$$

を満たす。望まれる Helmholtz 方程式の特異解は、3段階で定義される。まず、 $r \in \Omega$  では、 $\psi(\vec{r}) = \chi(\vec{r})$  とする。 $0 < r < \frac{L}{2}$  では、 $\psi(\vec{r})$  は、(3) 式の展開で定義され、球面成分  $\psi_{lm}(\vec{r})$  は (7.1) 式の右辺で与えられる。そして、他の全ての範囲で、 $\psi(\vec{r})$  は、周期性によって決まる。

ここでの、重要なポイントは、上で指定された係数  $\psi_{lm}(\vec{r})$  を持つ、 $\psi(\vec{r})$  の球面調和関数での展開が  $0 < r < \frac{L}{2}$  での全ての  $r$  に対して、急速に収束するということである。これは、固定された  $r$  の束縛範囲において、十分に大きい  $l$  に対し、球面 Bessel 関数  $j_l(kr)$  が  $r$  の単調増加関数になるからである。一度  $r = r_0$  で収束すると、自動的に全ての  $r \leq r_0$  に対して収束する。

そのようにして構成された関数が、全ての要求される性質を持つことは明らかであり、定理を証明できた。

## 4.2 エネルギースペクトル ( $k$ の正則値)

3章によれば、自由度  $\Lambda$  である Helmholtz 方程式の一般的な周期的特異解は、任意の係数  $v_{lm}$  を持つ

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\Lambda} \sum_{m=-l}^l v_{lm} G_{lm}(\vec{r}; k^2) \quad (70)$$

で与えられる。これらの関数の間では、エネルギー固有関数は、 $l \leq \Lambda$  に対して式 (2.1) を満たす関数である。(5.2) 式を (7.0) 式に代入し比較すると、

$$b_{lm} \alpha_l(k) = \sum_{l'=0}^{\Lambda} \sum_{m'=-l'}^{l'} v_{l'm'} \frac{(-1)^{l'}}{4\pi} k^{l'+1} \mathcal{M}_{l'm',lm}, \quad (71)$$

$$b_{lm} \beta_l(k) = v_{lm} \frac{(-1)^l}{4\pi} k^{l+1} \quad (72)$$

になる。ただし  $l = 0, 1, \dots, \Lambda$  である。(7.2) 式より  $v_{lm}$  を取り除くことができ、(7.1) 式には係数  $b_{lm}$  に対する同種の線形系が残る。方程式の数は未知のもの数に等しいから、もし行列式が 0 ならば、0 でない解が存在する。これは、 $H_{\Lambda}$  の固有値に対応する任意の  $k$  に対して起こる。行列式が 0 になる条件は簡潔に書き下すことができ、 $\mathcal{K}_{\Lambda}$  を、成分が  $v_{lm}$  であるベクトル  $v$  の空間であるとする ( $l = 0, 1, \dots, \Lambda$ ,  $m = -l, -l+1, \dots, l$ )、この空間上でのスカラー積は、

$$(v, w) = \sum_{l=0}^{\Lambda} \sum_{m=-l}^l v_{lm}^* w_{lm} \quad (73)$$

で与えられ、行列  $\mathcal{M}_{lm,l'm'}$  は  $\mathcal{K}_{\Lambda}$  内の線形演算子  $M$  とみなすことができる。2つの演算子  $A, B$  を

$$[Av]_{lm} = \alpha_l(k) v_{lm}, \quad [Bv]_{lm} = \beta_l(k) v_{lm} \quad (74)$$

と定義すると、行列

$$\begin{aligned} e^{2i\delta} &= (A + iB)/(A - iB), \\ e^{2i\sigma} &= (A + B)/(A - B) \end{aligned} \quad (75)$$

を得ることができる。(2.1節参照)

線形方程式 (7.1), (7.2) 式の 0 でない解が存在する条件は、

$$\det [A - BM] = 0 \quad (76)$$

と書くことができる。この方程式は全体的に満足がいかない。なぜならば、位相  $\delta_l(k)$  というよりはむしろ  $\alpha_l(k), \beta_l(k)$  を含んでいるからである。この欠点をなくすためには、まず  $H_\Lambda$  の固有値が実数であることに注目する。それ故 (7.8) 式の解  $k$  は実数か純虚数のどちらかであり、 $E$  が正か、負であるかに依存する。そこで、場合分けして考える。

$E$  が正で  $k(\text{non-singular}) > 0$  の場合、(7.8), (7.9) 式より

$$\det [e^{2i\delta} - U] = 0, \quad U = (M + i)/(M - i) \quad (77)$$

となり、同様に  $E$  が負で  $-ik > 0$  の場合、

$$\det [e^{2i\sigma} - V] = 0, \quad V = (M + 1)/(M - 1) \quad (78)$$

となる。これで、(7.6) 式を、位相  $\delta_l(k)$  を含む式で記述することができた。ここで現われた  $U, V$  は両方とも  $\mathcal{K}_\Lambda$  内の線形演算子である。

### 4.3 エネルギースペクトル ( $k > 0$ の特異値)

この節では、 $k = \frac{2\pi|\vec{n}|}{L}$  である有限値のエネルギー固有状態について議論を進めていく。 $\vec{n}$  は 0 でない整数ベクトルである。

この場合、自由度  $\Lambda$  の Helmholtz 方程式の一般解は、

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{\vec{p} \in \Gamma_k} w_{\vec{p}} + \sum_{l=0}^{\Lambda} \sum_{m=-l}^l v_{lm} G'_{lm}(\vec{r}; k^2) \quad (79)$$

で与えられる。ここで、 $w_{\vec{p}}$  は自由に選ぶことができるが、一方  $v_{lm}$  は式 (4.8) に制約を受ける。ここで、(7.9) 式に (6.2), (6.4) 式を代入すると、

$$\begin{aligned} b_{lm} \alpha_l(k) &= 4\pi \sum_{\vec{p} \in \Gamma_k} w_{\vec{p}} i^l Y_{lm}(\theta_p, \varphi_p)^* \\ &\quad + \sum_{l'=0}^{\Lambda} \sum_{m'=-l'}^{l'} v_{l'm'} \frac{(-1)^{l'}}{4\pi} k^{l'+1} \mathcal{M}_{l'm', lm}, \end{aligned} \quad (80)$$

$$b_{lm} \beta_l(k) = v_{lm} \frac{(-1)^l}{4\pi} k^{l+1} \quad (81)$$

となる。 $b_{lm} = v_{lm} = 0$  とし係数  $w_{\vec{p}}$  を選べば、これらの方程式の解が

$$\sum_{\vec{p} \in \Gamma_k} w_{\vec{p}} \mathcal{Y}_{lm}(\vec{p})^* = 0, \quad l \leq \Lambda \quad (82)$$

のように得られるのは明らかであり、その時平面波

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{\vec{p} \in \Gamma_k} w_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\vec{r}} \quad (83)$$

は、全ての必要とされる性質を持ち、エネルギー固有状態に対応する。そのような解は固定された停止点  $\Lambda$  に対して常に存在する。なぜなら、 $\Gamma_k$  内の点の数が、十分大きい  $k$  に対して満たされる方程式の数よりも多いからである。もう一方で、 $k$  を固定し  $\Lambda \rightarrow \infty$  とするならば、解は存在しない。以上のことより、

$$\lim_{q \rightarrow |\vec{a}|} \det[e^{2i\delta} - U] = 0 \quad (84)$$

が成り立ち、この方程式の解は (7 8) 式の特解とみなすことができる。

#### 4.4 cubic 対称性と 2 粒子状態

今まで、立方体の箱の中の 2 粒子状態について論じてきた。従って、cubic 対称性を持つことも自然と推測できる。この節では、この cubic 対称性のもとでの 2 粒子状態について話を進めて行く。

cubic 群には、 $A_1, A_2, E, T_1, T_2$  という 5 個の既約表現があり、その次元はそれぞれ 1、1、2、3、3 である。また、パリティを考慮すると  $A_1^+, A_1^-$  というように分けることができる。このような、cubic 群のもとでは、(7 7) 式は

$$\det[e^{2i\delta} - U(\Gamma)] = 0, \quad U(\Gamma) = (M(\Gamma) + i)(M(\Gamma) - i) \quad (85)$$

となり、同様にして (7 8) 式は、

$$\det[e^{2i\sigma} - V(\Gamma)] = 0, \quad V(\Gamma) = (M(\Gamma) + i)(M(\Gamma) - i) \quad (86)$$

となる。ここで出てきた  $\Gamma$  は、cubic 群の  $A_1^+, A_1^-$  といった表現のことであり、 $M(\Gamma)$  はそれぞれの  $\Gamma$  に対して、行列要素  $M(\Gamma)_{l_n, l'_n}$  を持つ演算子である。この対応関係を Appendix A に示す。ただし、付録中の  $\mathcal{W}_{js}$  は、

$$\mathcal{W}_{js} \equiv [\pi^{3/2} (2j+1)^{1/2} q^{j+1}]^{-1} \mathcal{Z}_{js}(1; q^2) \quad (87)$$

で定義されるものとする。

5 章では、これらの関係を用いて、実際コンピュータで計算した  $\Gamma = A_1^+ (l = l' = 0)$  (S 波) の場合について、定式化を行う。

## 5 $A_1^+$ におけるエネルギースペクトル

### 5.1 $A_1^+$ におけるエネルギースペクトルと位相のずれとの関係

Appendix A によると、 $\Gamma = A_1^+(l = l' = 0)$  の場合、 $M(\Gamma)_{l_1, l'_1}$  は  $\mathcal{W}_{00}$  に等しくなる。すなわち、

$$M(\Gamma)_{01, 01} = \mathcal{W}_{00} = \frac{1}{\pi^{3/2}q} \mathcal{Z}_{00}(1; q^2), \quad q = \frac{kL}{2\pi} \quad (88)$$

となる。従って、(88) 式と (85) 式より

$$e^{2i\delta_0} = \frac{\mathcal{W}_{00} + i}{\mathcal{W}_{00} - i} \quad (89)$$

を導くことができ、同様に (86) 式は

$$e^{2i\sigma_0} = \frac{\mathcal{W}_{00} + 1}{\mathcal{W}_{00} - 1} \quad (90)$$

となる。また、 $A_1^+$  における低エネルギー準位は、極限  $L \rightarrow \infty$  をとる時、 $1/L$  の級数で展開でき、

$$q^2 = \bar{n}^2 + O(1/L), \quad L \rightarrow \infty \quad (91)$$

が成り立つ。すると、(89) 式は

$$\tan \delta_0(k) = \frac{\pi^{3/2}q}{\mathcal{Z}_{00}(1; q^2)} \quad (92)$$

と変形できる。また、(90) 式は  $\sigma_0(k)$  と

$$\tan \delta_0(k) = -i \tan \sigma_0(k) \quad (93)$$

という関係がある。このようにして、エネルギー固有状態と位相のずれとの関係式を導くことができた。6章以降では、普通のポテンシャルモデルを用い、この関係式による位相のずれと、通常の散乱理論による位相のずれを実際に求め比較し、定式化した方法が有効であるかどうか検討していく。

## 6 結果

本論文では、重心系におけるシュレディンガー方程式

$$\left[ -\frac{1}{2\mu}\Delta + V(r) \right] \psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \quad (94)$$

において、ポテンシャルモデル

$$V(\vec{r}) = V_0 e^{-\text{frac}{r^2}{r_0^2}} \quad (95)$$

を用い、エネルギー固有値を求め、5章の式より具体的な位相のずれの値を計算した。また、 $V_0, r_0$  の値は (i)  $V_0 = -10(\text{MeV}), r_0 = 1(\text{fm})$ , (ii)  $V_0 = -30(\text{MeV}), r_0 = 1(\text{fm})$  の2通りの場合で行った。さらに、それぞれの場合で箱のサイズ  $L$  を変えることにより、角運動量  $k$  に対する依存性を見た。通常の散乱理論によれば、散乱中心が (95) 式のような球対称なポテンシャルの場合、部分波の方法によって位相のずれの式を導くことができ、ポテンシャル内部の波動関数と外部の解をつなぐことによって、その具体的な値を求めることができる。従って、この値を理論値としポテンシャルモデルの方法で求めた値と比較することで、その有効性を検証していく。以下、そのシミュレーションの結果を示す。

Figure 1 は  $V_0 = -10(\text{MeV}), r_0 = 1(\text{fm})$  の時、定式化によって求めた  $\tan_{\sigma_0}$  と、通常の散乱理論によるものをプロットしたグラフである。グラフ中の  $\diamond$  はポテンシャルモデルにより求めた値、 $+$  は部分波の方法による値である。ここで  $L$  は  $3(\text{fm})$  から測定したが、これは  $L$  のサイズが大体  $3(\text{fm})$  以下になると分極効果の影響が大きくなるからである。この様子を見ると、 $k$  が小さい所では、理論値に非常に近い値を取っているが大きくなるにつれて多少外れていく様子が見てとれる。

一方、Figure 2 はポテンシャルの強度を増し  $V_0 = -30(\text{MeV}), r_0 = 1(\text{fm})$  とした場合である。グラフ中の記号は Figure 1 と同じものを表している。Figure 1 と比べると  $k$  が小さい所では、同じく理論値に近い値を取っているが、 $k = 0.2$  付近から、理論値との差異が幾分大きくなっている。また、どちらにおいても言えることであるが、ポテンシャルが負であるので、 $\tan_{\sigma_0}$  が正になっている。

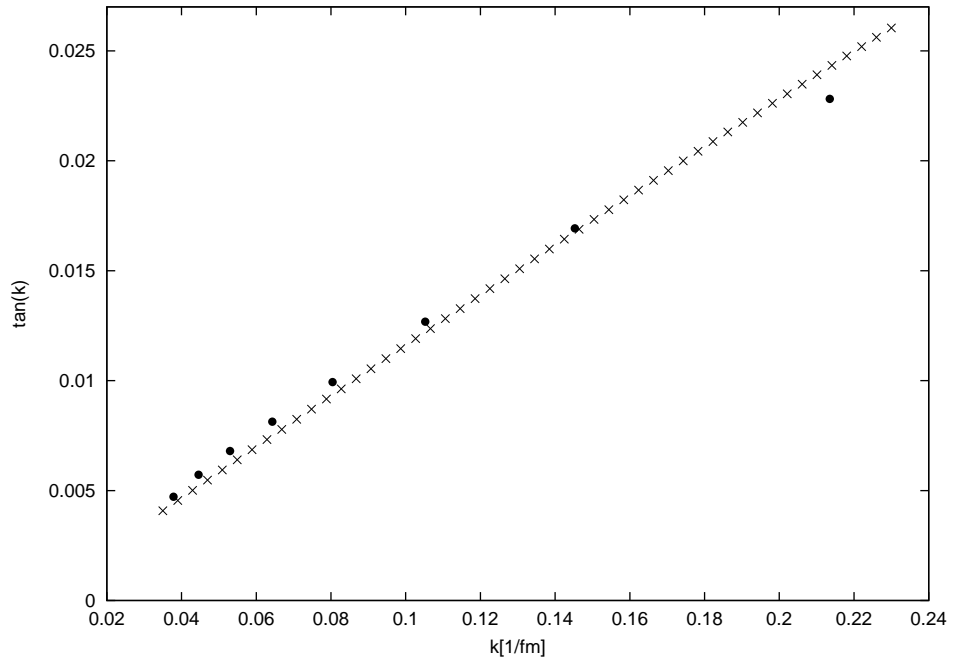


Figure 1: (i)  $V_0 = -10(\text{MeV})$ ,  $r_0 = 1(\text{fm})$

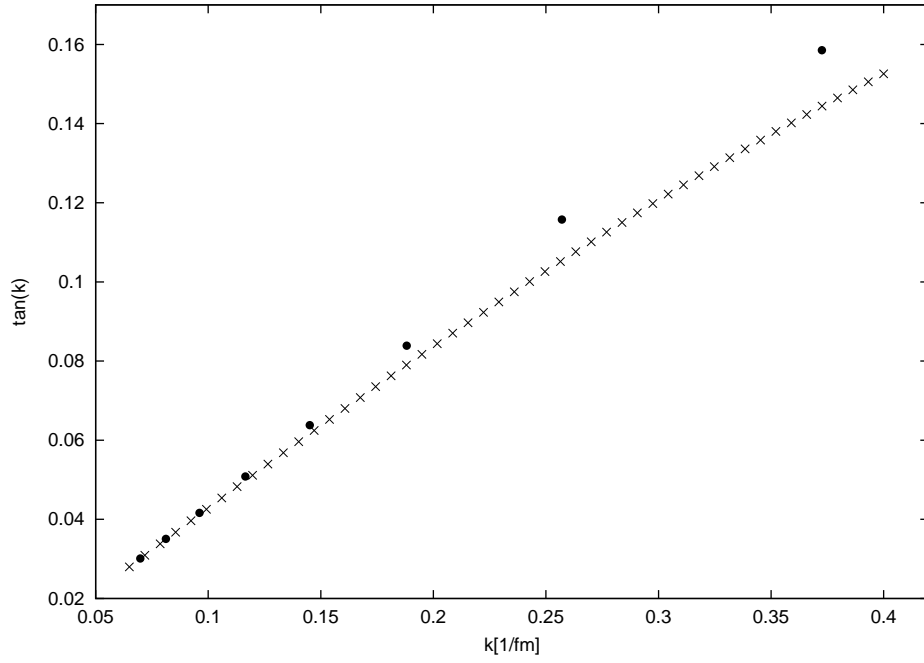


Figure 2: (ii)  $V_0 = -30(MeV), r_0 = 1(fm)$



## 7 考察

結果でも触れたが、 $k$ の値が増すにつれ、理論値と差異が生じているのがわかる。この差異の要因について考えてみる。 $k$ が大きくなるということは、すなわち粒子の速度が増すということである。そうすると、粒子にとって箱のサイズは速度が増した分狭くなると考えることができる。 $L$ が小さくなり、粒子を閉じ込めることができなくなると、分極が影響する可能性がある。そのため、 $k$ が大きくなるにつれ、計算結果にもその影響が現れたものと考えることができる。また、プログラムの修正に多くの時間を割いてしまったため、データを多くとれなかったことも要因のひとつである。 $k$ の、より大きなところでの  $\tan_{\sigma_0}$  の振舞いを見ることができれば、この問題ははっきりしてくると思われる。

## 8 謝辞

この論文を書くにあたって、常に親切に教えて下さった平田道紘先生、つまらない質問にもいつも優しく答えてくれたハドロン理論研究室の皆さんには、本当にお世話になりました。心より感謝致します。

A 角運動量  $l, l' \leq 4$  に対する  $\mathcal{M}(\Gamma)_{ln, l'n'} (n = n' = 1)$  の行列要素

$\Gamma$	$l$	$l'$	$\mathcal{M}(\Gamma)_{l_1, l'_1}$			
$A_1^+$	0	0	$\mathcal{W}_{00}$			
$A_1^+$	0	4		$\frac{6}{7}\sqrt{21}\mathcal{W}_{40}$		
$A_1^+$	4	4	$\mathcal{W}_{00}$	$+\frac{324}{143}\mathcal{W}_{40}$	$+\frac{80}{11}\mathcal{W}_{60}$	$+\frac{560}{143}\mathcal{W}_{80}$
$A_2^-$	3	3	$\mathcal{W}_{00}$	$-\frac{11}{36}\mathcal{W}_{40}$	$+\frac{80}{11}\mathcal{W}_{60}$	
$E^+$	2	2	$\mathcal{W}_{00}$	$+\frac{18}{7}\mathcal{W}_{40}$		
$E^+$	2	4		$-\frac{120}{77}\sqrt{3}\mathcal{W}_{40}$	$-\frac{30}{11}\sqrt{3}\mathcal{W}_{60}$	
$E^+$	4	4	$\mathcal{W}_{00}$	$+\frac{324}{1001}\mathcal{W}_{40}$	$-\frac{64}{11}\mathcal{W}_{60}$	$+\frac{392}{143}\mathcal{W}_{80}$
$T_1^+$	4	4	$\mathcal{W}_{00}$	$+\frac{162}{143}\mathcal{W}_{40}$	$-\frac{4}{11}\mathcal{W}_{60}$	$-\frac{448}{143}\mathcal{W}_{80}$
$T_1^-$	1	1	$\mathcal{W}_{00}$			
$T_1^-$	1	3		$-\frac{4}{7}\sqrt{21}\mathcal{W}_{40}$		
$T_1^-$	3	3	$\mathcal{W}_{00}$	$+\frac{18}{11}\mathcal{W}_{40}$	$+\frac{100}{33}\mathcal{W}_{60}$	
$T_2^+$	2	2	$\mathcal{W}_{00}$	$-\frac{12}{7}\mathcal{W}_{40}$		
$T_2^+$	2	4		$-\frac{60}{77}\sqrt{3}\mathcal{W}_{40}$	$+\frac{40}{11}\sqrt{3}\mathcal{W}_{60}$	
$T_2^+$	4	4	$\mathcal{W}_{00}$	$-\frac{162}{77}\mathcal{W}_{40}$	$+\frac{20}{11}\mathcal{W}_{60}$	
$T_2^-$	3	3	$\mathcal{W}_{00}$	$-\frac{6}{11}\mathcal{W}_{40}$	$-\frac{60}{11}\mathcal{W}_{60}$	

## References

- [1] Martin LUSCHER,[TWO-PARTICLE STATES ON A TORUS AND THEIR RELATION TO THE SCATTERING MATRIX],1990
- [2] 砂川 重信,[散乱の量子論],1977
- [3] L.I.SCHIFF,[量子力学 上],1970
- [4] 並木 美喜雄, 大場 一郎,[散乱の量子力学],1997
- [5] 笹川 辰弥,[散乱理論],1991
- [6] 梅沢 博臣, 小谷 正雄,[大学演習 量子力学],1959
- [7] 後藤 憲一,[詳解 理論応用 量子力学演習],1982
- [8] 伊藤 文子, 中村 明子,[FORTRAN 数値計算とプログラミング],1970