

格子量子色力学による閉じ込め相と非閉じ込め相の間の相転移の研究

指導教官 平田 道紘

広島大学理学部物理科学科ハドロン物理学研究室  
田附 明士 (1079045)

平成 14 年 2 月 8 日

# 目次

第 1 章	序論	2
第 2 章	クォークの閉じ込め	3
第 3 章	量子色力学	6
第 4 章	格子ゲージ理論	11
4.1	格子ゲージ理論とは . . . . .	11
4.2	統計力学との同等性 . . . . .	15
4.3	連続極限 . . . . .	17
第 5 章	数値実験	19
5.1	モンテカルロ法 . . . . .	19
5.2	有限温度相転移 . . . . .	20
第 6 章	結果・考察	23
第 7 章	まとめ・謝辞	28
付録 A	ヒートバス法	29
付録 B	誤差の評価	32

# 第1章 序論

量子色力学はクォークとグルーオンの力学体系を記述するものである。また、これを非摂動的に取り扱うことを可能にするのが格子量子色力学（格子ゲージ理論）である。この格子量子色力学から、クォークの”閉じ込め”などを説明することができる。

ところで、クォークは永遠にハドロンの中に閉じ込められたままなのだろうか？実は、宇宙の初期のような非常に高温になると、クォークは単独で存在できるということが予測されている。このクォークとグルーオンの非閉じ込め状態をクォークグルーオンプラズマ (QGP) といい、この相を非閉じ込め相という。今回のテーマは格子量子色力学による数値実験を通して、閉じ込め相から非閉じ込め相への相転移を研究していくことである。そのために相転移の秩序パラメータとなるポリアコフラインを導入する。これにより、結合定数、または温度による相転移点を決定することができた。さらに格子サイズを変えて、計算を行ない、それぞれの相転移点を比較することによって、連続極限での相転移点を考察した。

全体の流れとしては、まず2章ではクォークの閉じ込めについて細かい説明をしていく。そしてそのクォークの力学体系を記述する量子色力学について、3章で述べる。しかし、量子色力学では、そのハミルトニアンのある項について摂動論を適用すると紫外発散の問題というものが生じる。この問題を解決するために格子ゲージ理論を導入する。4章では、この格子ゲージ理論について述べる。そして5章では、実際に格子ゲージ理論を用いて行なう数値実験の方法であるモンテカルロ法を、説明していく。また、ここでポリアコフラインの定義を述べる。最後に6章で、その数値実験から得られた結果を考察し、相転移温度を求め、連続極限ではどのようなかを予想した。

## 第2章 クォークの閉じ込め

物質は原子から構成され、原子は原子核と電子から構成される。その原子核は、さらに陽子と中性子から構成され、おもにパイ中間子によって結合していることが解明されたのが1930年代である。その後、宇宙線実験、加速器実験によって数多くの素粒子が発見された。

これらの素粒子は大きく分けて、ハドロンとレプトンとゲージ粒子の3種類ある。核力と同程度の強さを強い相互作用といい、ハドロンとは強い相互作用をする粒子である。またハドロンは原子核を構成する陽子、中性子、パイ中間子などを含む粒子である。そしてレプトンは $\beta$ 崩壊に関する弱い相互作用のみに関与し、電子、中性子などを含む。ゲージ粒子は強い相互作用と弱い相互作用を媒介するもので、光子、重力子、グルーオンなどを含む。このうち、ハドロンは100種類以上存在し、文字通りの意味で”素”粒子ではなく、さらに基本的な粒子、クォーク、反クォークからなっている。

陽子、中性子は、クォーク3個から構成され、パイ中間子はクォーク1個と反クォーク1個から構成される。そしてこれらのクォークは、グルーオン（粘着子）と呼ばれるもので結合されている。クォークは量子電磁気学の電子に対応し、グルーオンはフォトン（光子）に対応する粒子である。しかし、電子、フォトンと異なって、クォーク、グルーオンは単独で発見されたことはない。例えば、陽子の場合、1個のクォークを取りだそうとして、1個のクォークを強くたたく（実際には、加速器を使って他の粒子をぶつける）。そうすると図のようにやはり割れ目にクォーク対ができて、結果としていくつかのパイ中間子などのハドロンが新たに増えただけでクォークを単独で取り出すことはできない。これをクォークの”閉じ

込め”という。そしてこの相のことを閉じ込め相という。

次にこのような閉じ込めが実際に起こるようなモデルを考えてみる。はじめに、普通の電磁気のクーロンの法則について考える。プラスの電荷とマイナスの電荷を距離  $R$  離して図のようにおく。真空中での電場のエネルギー

を計算すると、クーロンエネルギー  $-\frac{e^2}{R}$  を導くことができる。距離  $R$  が長くなるにつれて、電場は弱くなりクーロンエネルギーも小さくなる。

ところで、この2つの電荷を、仮想的に完全反誘電体 ( $\epsilon = 0$ ) の物質中に置いたらどうなるか。完全反誘電体の中は、電場を通さないで電場は図のように広がることができずに図のようにしぼられた形になる。電気力

線は保存するので、距離  $R$  をいくらになしても真中あたりの様子は変わらず、単位長さあたりの電場のエネルギーは一定である。すなわち、この時はクーロンの法則ではなく、

$$V(R) = +cR \quad (2.1)$$

という形の式を得る。ポテンシャルエネルギーは距離  $R$  が増すのに比例し

て、大きくなる。Rを無限大にしようとする、それにとまってポテンシャルも無限大になる。実際には、途中でプラス、マイナスの電荷の対を生成して、切れて図のようになる。

このモデルをクォーク模型に適用する。それには通常の電荷を”色”電荷と呼ばれる新しい型の電荷に置き換えて、反誘電物質を反誘電”真空”に置き換えればよい。すなわち、真空が色電荷に対しては、完全反誘電体 ( $\epsilon = 0$ ) であればよい。これは、真空が色電荷に対して複雑な構造をしていることを示唆している。

この後で述べるが、色電荷の構造は通常の電荷の構造と少し異なるが、ここでは簡単のため、通常の電荷のように加算的（プラスとマイナス）であるとしよう。上の議論から分かるように、系の全色電荷がゼロ（無色）でない限り、その系のエネルギーは無限大となる。よって、実際に観測できる系は無色のものに限られる。これがハドロンとして観測されるのである。

## 第3章 量子色力学

クォークは u (up) クォークや d (down) クォークなど少なくとも6種類あると考えられている。この6種類の自由度を”香り” (flavor) と呼ぶ。

6種類のクォークそれぞれが3種類の”色” (color) 電荷をもつ。色として通常、赤青緑をとるが、色といっても通常の色とは何の関係もない。この色の特徴は、香りと違ってハドロンの外からは見えないのである。つまりハドロンは無色なのである。このことはさらに後で述べる。

ここでクォークに対する場を考えると、先に述べたようにそれぞれのクォークは3種類の色を持つので

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

のように表せる。 $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  がおのおの4成分を持つディラック場であり、添字の1、2、3は赤青緑に対応する。座標  $x$  は3次元空間の  $\vec{x}$  と時間  $t$  を表す。

ここで3つの色がどれが青、どれが赤というのは全く勝手なので、3つの色の回転に対して理論は不変であるべしとする。この回転は

$$\psi'(x) = V\psi(x) \quad (3.2)$$

と書き表せる。ここで、われわれの興味の対象は色の自由なので、 $\psi_i(x)$ , ( $i = 1 \sim 3$ ) が4成分であることは忘れて、それぞれが単純に複素数であると考えてよい。すなわち、変換 (3.2) は3成分の複素ベクトルの回転である。これはユニタリー変換と呼ばれ

$$V^\dagger V = 1 \quad (3.3)$$

を満たす ( $V$  は3行3列の複素行列)。このうち、全体の複素数の位相だけを変える変換は興味がないので

$$\det V = 1 \quad (3.4)$$

という条件を置く。式 (3.3) と (3.4) を満たす変換を  $SU(3)$  (3次元 special unitary) 群という。クォークはこの  $SU(3)$  群の3次元表現に属している。

反クォークは

$$\bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)V^\dagger \quad (3.5)$$

によって変換する。これらのことより、すなわちハドロンが無色であることは、色の変換群 SU(3) によって変換しないことを意味する。ところで変換 (3.2) で  $V$  は時空点  $x$  によらないとした。しかし相対論で考えると、空間的に離れた時空点どうしは互いに全く勝手に  $V$  をとれるはずである。そこで、時空点  $x$  に依存する変換  $V(x)$  に対して理論は不変であるべしと要請する。このようにして構成される理論を、ゲージ理論と総称する。電磁気もゲージ理論である。このとき変換 (3.2) に現れる  $\psi$  は、例えば電子の場で、一つのディラック場を表す。ここでも先に述べたのと同じように、 $\psi$  は一成分の複素数と考えてよい。そこで  $V$  自身も一成分で考え

$$V(x) = e^{i\theta(x)} \quad (3.6)$$

と表される。これより

$$\psi'(x) = e^{i\theta(x)}\psi(x) \quad (3.7)$$

これが電磁気におけるゲージ変換である。これは一成分のユニタリー変換なので、U(1) ゲージ理論という。このゲージ変換で理論が不変であるためには、以下に述べるようにゲージ場（電磁場）が必要となる。ここで自由な電子に対するラグランジアンは

$$\mathcal{L} = -\bar{\psi}(x)\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) \quad (3.8)$$

と与えられる。 $\gamma$  はディラック行列である。式 (3.8) を (3.7) に対して不変にするために、 $A_\mu(x)$  を導入し、微分を  $D_\mu$  で置き換えて、

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi(x) \rightarrow D_\mu \psi(x) = (\partial_\mu - ieA_\mu)\psi(x) \quad (3.9)$$

ゲージ変換に対して

$$A'_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{e} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \theta(x) \quad (3.10)$$

と変換することが必要である。こうすると、 $(D_\mu \psi(x))' = e_{i\theta} D_\mu \psi(x)$  となり、式 (3.8) は不変となる。これに、ゲージ場自身のラグランジアンを加えて、電子と電磁場のラグランジアンは

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu} - \bar{\psi}(x)(\gamma_\mu D_\mu + m)\psi(x) \quad (3.11)$$



となる。ここで  $F$  は電磁場テンソルで

$$F_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial A_\nu(x)}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu} \quad (3.12)$$

で与えられる。これを量子化したものを、量子電磁気学という。これと同じように色電荷の場合のゲージ理論も導ける。式 (3.8) の代わりに

$$\mathcal{L} = - \sum_{i=1}^{N_f} \bar{\Psi}_i(x) (\gamma_\mu \frac{d}{dx_\mu} + m_i) \Psi_i(x) \quad (3.13)$$

となる。ここで  $N$  は香り (flavor) の自由度で、本当は  $N=6$  であるが、陽子や中性子などのハドロンについて考える場合は  $N=2, N=3$  で考えればよい。ここで  $\Psi$  は電子のときと異なり、前に述べたように3種類のディラック場を含む。 $m$  はそれぞれのクォークの質量である。式 (3.9) の代わりに

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi(x) \rightarrow D_\mu \psi(x) = (\partial_\mu - ig A_\mu) \psi(x) \quad (3.14)$$

となる。ここで、 $A_\mu$  は3行3列のエルミートなトレースレスな行列で表される場である (トレースレスとは行列の後が0ということ)。 $g$  は電荷  $e$  に対応する結合定数である。 $A_\mu(x)$  はトレースレスなので

$$A_\mu(x) = \sum_{a=1}^8 A_\mu^a(x) \frac{\lambda^a}{2} \quad (3.15)$$

と書き表せる。 $\lambda^a$  は3行3列のトレースレスな8個の線形独立な行列である。このようにベクトル場は8種類  $A_\mu^a(x) (a = 1 \sim 8)$  存在する。このベクトル場に対応するのがグルーオンである。これ以降、量子色力学におけるラグランジアンを導く。ここで

$$(D_\mu \psi(x))' = D'_\mu V(x) \psi(x) = V(x) D_\mu \psi(x) \quad (3.16)$$

を要請することにより

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_\mu} - ig A'_\mu(x) \right) V(x) \psi(x) = V(x) \left( \frac{\partial}{\partial x_\mu} - ig A_\mu(x) \right) \psi(x) \quad (3.17)$$

を得る。さらに

$$A'_\mu(x) = V(x) A_\mu(x) V^{-1}(x) = \frac{1}{ig} \frac{\partial V(x)}{\partial x_\mu} V^{-1}(x) \quad (3.18)$$

を得る。この変換によって  $A_\mu(x)$  のエルミート性、トレースレス性は保存される。ここで、 $\psi'(x) = V(x) \psi(x)$ ,  $\bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) V^\dagger(x)$  と、式 (3.18) を組み合わせると、

$$\mathcal{L} = - \bar{\psi}(x) (\gamma_\mu D_\mu + m) \psi(x) \quad (3.19)$$

は不変である。また、式 (3.16) より

$$D'_\mu(x) = V(x)D_\mu(x)V^{-1}(x) \quad (3.20)$$

よって

$$D'_\nu(x)D'_\mu(x) = V(x)D_\nu(x)D_\mu(x)V^{-1}(x) \quad (3.21)$$

さらに

$$D'_\mu(x)D'_\nu(x) - D'_\nu(x)D'_\mu(x) = V(x)[D_\mu(x)D_\nu(x) - D_\nu(x)D_\mu(x)]V^{-1}(x) \quad (3.22)$$

である。ここで

$$F_{\mu\nu}(x) = \frac{i}{g}[D_\mu(x), D_\nu(x)] \quad (3.23)$$

と置くと

$$F'_{\mu\nu}(x) = V(x)F_{\mu\nu}(x)V^{-1}(x) \quad (3.24)$$

故に

$$Tr[F'_{\mu\nu}(x)F'_{\mu\nu}(x)] = Tr[F_{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)] \quad (3.25)$$

よって、 $Tr[F_{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)]$  はゲージ不変量である。

式 (3.23) を計算すると

$$F_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial A_\nu(x)}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu} - ig[A_\mu, A_\nu] \quad (3.26)$$

さらに

$$F_{\mu\nu}(x) = \sum_{a=1}^8 F_{\mu\nu}^a \frac{\lambda^a}{2} \quad (3.27)$$

と置くと、式 (3.15) と組み合わせて

$$F_{\mu\nu}^a(x) = \frac{\partial A_\nu^a(x)}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu^a(x)}{\partial x_\nu} = gc_{abc}A_\mu^b A_\nu^c \quad (3.28)$$

を得る。ここで  $c_{abc}$  は群の構造定数で

$$\left[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2}\right] = ic_{abc} \frac{\lambda_c}{2} \quad (3.29)$$

で定義される。さらに

$$\text{Tr}[F_{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)] = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^8 F_{\mu\nu}^a(x)F_{\mu\nu}^a(x) \quad (3.30)$$

はゲージ不変量である。規格子を電磁波のときと同じようにして、最終的にゲージ不変なラグランジアンとして

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \sum_{a=1}^8 F_{\mu\nu}^a(x)F_{\mu\nu}^a(x) - \sum_{i=1}^{N_t} \bar{\psi}_i(x)(\gamma_\mu D_\mu + m_i)\psi_i(x) \quad (3.31)$$

を得る。これがクォークとグルーオンに対するラグランジアンであり、そしてこれを量子化したものが量子色力学（QCD）である。

また、量子電磁気学の場合の U(1) 群（式 (3.6)）は可換群なので可換ゲージ理論と呼び、SU(N) 群は非可換群なので、QCD は非可換ゲージ理論と呼ぶ。

## 第4章 格子ゲージ理論

### 4.1 格子ゲージ理論とは

ラグランジアン、または場を量子化するために経路積分の方法を用いる。しかしここで考えなければならないのが、量子色力学の場合、そのハミルトニアンに摂動項について摂動論を適用すると紫外発散の問題が生じる。したがってこの摂動項の存在のため、摂動論は特別な物理現象以外には適用できないと考えられている。

この問題を解決するためには、時空点を離散点としてまず定義するのが一方法である。このため、時空点を格子上にとってゲージ理論を定義したものが”格子ゲージ理論”である。ここで数学的取り扱いやすさを考慮して、ミンコフスキー空間の代わりに、4次元ユークリッド空間を導入する。つまり、実時間の代わりに  $\tau = it$  なる虚時間で考える。格子ゲージ理論とは、この4次元ユークリッド連続体を離散化して、格子点上で経路積分を用いて理論を定義したものである。格子として、4次元の単純立方格子をとる。格子間隔を  $a$  とする。格子間隔の逆数  $a^{-1}$  は紫外運動量の切断に対応する（そもそも格子上では波長が  $a$  より短い波はつukれない）。各格子点は4つの整数

$$n = (n_1, n_2, n_3, n_4) \quad (4.1)$$

で指定される。クォーク場は格子上の場として

$$\psi(n) \quad (4.2)$$

反クォーク場は

$$\bar{\psi}(n) \quad (4.3)$$

で与えられる。ゲージ変換として

$$\begin{aligned} \psi(n) &= V(n)\psi(n) \\ \bar{\psi}(n) &= \bar{\psi}(n)V^\dagger(n) \end{aligned} \quad (4.4)$$

と変換する。

微分にあたるものは  $\psi(n + \hat{\mu}) - \psi(n)$  である。 $\hat{\mu}$  は  $\mu$  方向の単位ベクトルである。ここで重要なことは、運動量の切断で理論のゲージ不変性が破られてはならぬ、ということである。理論をゲージ不変にするため、微分を共変微分  $D_\mu$  に置き換える。これに対応して、場  $\psi(n)$  を有限の距離移動させるため平行移動子  $U_c(x, y)$  を導入する。これは、場  $\psi(n)$  を経路  $c$  を通って  $x$  地点から  $y$  地点まで移動させるのにどれだけゲージを調節すればよいかを示すものである。すなわち

$$\tilde{\psi}(x) = U_c(x, y)\psi(y) \quad (4.5)$$

と定義した時、場  $\tilde{\psi}(x)$  は点  $x$  の場としてのゲージ変換を受けて

$$\tilde{\psi}(x) \rightarrow V(x)\tilde{\psi}(x) \quad (4.6)$$

となる。

ここで、これを格子ゲージ理論に適用するには  $x, y$  として格子上の点のみを考えればよい。特に隣どおしの点を結ぶ線分をリンクと呼び、この隣どおしの点を移動すると考えた時の平行移動子を”リンク変数”と呼ぶ。これは点  $n$  と方向  $\mu$  によって決まり、 $U(n, n + \mu)$  または  $U_\mu(n)$  と書く。

また

$$U(n + \mu, n) = U^{-1}(n, n + \mu) \quad (4.7)$$

である。ゲージ変換に対して

$$\bar{\psi}(m) = U(m, n)\psi(n) \rightarrow V(m)\bar{\psi}(m) = V(m)U(m, n)\psi(n) \quad (4.8)$$

となる。一方、 $U(m, n)$  のゲージ変換を

$$U(m, n) \rightarrow U'(m, n) \quad (4.9)$$

で表すと、ゲージ変換に対して

$$U(m, n)\psi(n) \rightarrow U'(m, n)\psi'(n) = U'(m, n)V(n)\psi(n) \quad (4.10)$$

これと (4.8) 式とを組み合わせると

$$U(m, n) \rightarrow U'(m, n) = V(m)U(m, n)V^{-1}(n) \quad (4.11)$$

となる。これが平行移動子のゲージ変換である。ここで、3章で求めたラグランジアンより作用  $S$  を書いてみる。

$$S = S_q + S_g \quad (4.12)$$

$$S = - \int d^4x (\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_\mu} + m \bar{\psi}(x) \psi(x)) - \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}^c F_{\mu\nu}^c \quad (4.13)$$

ここで、今回の実験ではクォーク場の作用  $S_q = 0$  とする近似を行なう。クォーク質量  $m$  が大きい時、クォークの対生成、対消滅の効果は十分に小さい。故に  $m \rightarrow \infty$  の時作用はゲージ場のみの作用となる。これをクエンチ近似と言う。

次に、グルーオンのラグランジアン  $-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a$  に対応する作用を求める。リンク変数からゲージ不変量を作らなければいけない。図のように閉じた

ループに沿って順序づけて並べたリンク変数の積

$$\text{Tr}(P \prod_c U) \quad (4.14)$$

がゲージ不変であることは、リンク変数の定義から明らかである。一番簡単なものは図のように格子点をつないだ一番小さな正方形（プラケット）に沿った積である。そこで作用として

$$\sum_n \sum_{\mu \neq \nu} \text{Tr}[U(n, n + \mu)U(n + \mu, n + \mu + \nu)U(n + \mu + \nu, n + \nu)U(n + \nu, n)] \quad (4.15)$$

をとる。ここでリンク変数  $U_\mu(n)$  を

$$U_\mu(n) = \exp(ia g A_\mu(n)) \quad (4.16)$$

と、置く。さらに

$$U_\mu(n) = \exp(iB_\mu(n)) \quad (4.17)$$

と置く。ここで

$$\begin{aligned} B_\nu(n + \mu) &\cong B_\nu(n) + a\partial_\mu B_\nu(n) \\ -B_\mu(n + \nu) &\cong -(B_\mu(n) + a\partial_\nu B_\mu(n)) \end{aligned} \quad (4.18)$$

を用いる。すると

$$\begin{aligned} &U_\mu(n)U_\nu(n + \mu)U_\mu^{-1}(n + \nu)U_\nu^{-1}(n) \\ &\cong e^{iB_\mu} e^{i(B_\nu + a\partial_\mu B_\nu)} e^{-i(B_\mu + a\partial_\nu B_\mu)} e^{-iB_\nu} \end{aligned} \quad (4.19)$$

ここで、ハウストルフの公式

$$e^x e^y = \exp\left\{x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \dots\right\} \quad (4.20)$$

を用いると、式 (4.19) は

$$\cong \exp(ia(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu) - [B_\mu, B_\nu] + \text{higher order}) \quad (4.21)$$

となる。さらに

$$B_\mu = agA_\mu \quad (4.22)$$

なので、式 (4.19) は

$$\cong \exp(ia^2 g F_{\mu\nu} + \text{higher order}) \quad (4.23)$$

となる。ここで

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu] \quad (4.24)$$

故に

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} \text{Tr} U_\square &= \text{Tr} \exp(ia^2 g F_{\mu\nu}) \\ &= \text{Tr}\left[1 - ia^2 g F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}a^4 g^2 F_{\mu\nu}^2\right] \\ &= \text{Tr}\left(1 - \frac{1}{2}a^4 g^2 \text{Tr} F_{\mu\nu}^2\right) \end{aligned} \quad (4.25)$$

式 (4.25) で  $Tr F_{\mu\nu} = Tr(F_{\mu\nu}^a \frac{\lambda_a}{2}) = 0$  を用いた。反対向きにブラケットをまわるループからも同じ寄与である。

$$Tr(F_{\mu\nu}^2) = Tr(\frac{1}{2}\lambda_a F_{\mu\nu}^a \frac{1}{2}\lambda_b F_{\mu\nu}^b) = \frac{1}{4}\delta_{ab} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^b = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^b \quad (4.26)$$

であるので

$$\begin{aligned} S &\cong -\frac{1}{g^2} \sum_n \sum_{\mu \neq \nu} \frac{a^4}{4} F_{\mu\nu}^a(n) F_{\mu\nu}^a(n) \\ &\cong -\frac{1}{4g^2} \int \sum_{\mu, \nu} (F_{\mu\nu}^a)^2 d^4x \end{aligned} \quad (4.27)$$

となり、望ましい連続理論のラグランジアンを導くことができた。よって規格定数を  $\frac{1}{g^2}$  ととると、 $a \rightarrow 0$  でラグランジアンは  $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a$  になる。よって、格子ゲージ理論の作用は

$$S = \frac{1}{g^2} \sum_n \sum_{\mu \neq \nu} Tr[U(n, n+\mu)U(n+\mu, n+\mu+\nu)U(n+\mu+\nu, n+\nu)] \quad (4.28)$$

となる。実際、任意のグリーン関数  $\langle O \rangle$  は、経路積分の方法によって

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \int \prod_{link} dU_l O e^S \quad (4.29)$$

$$Z = \int \prod_{link} dU_l e^S \quad (4.30)$$

で与えられる。ここでリンク変数  $U$  については各リンクごとに積分を行ない、積分の測度は不変積分測度を用いる。このように任意のグリーン関数が分かれば、任意の物理量が計算できる。すなわち、式 (4.28), (4.29) が格子ゲージ理論そのものである。

## 4.2 統計力学との同等性

前節で示したように、クォーク場が存在しなく、ゲージ場のみ存在する場合のグリーン関数は (4.29), (4.30) で表される。ここで作用  $S$  は

$$S = \frac{1}{g^2} \sum_{\square} Tr U_{\square} \quad (4.31)$$

で与えられる。 $U_{\square}$  はブラケットに沿ってリンク変数の順序づけられた積を表す。ここで

$$\frac{1}{g^2} = \frac{1}{kT} \quad (4.32)$$



$$\sum_{\square} \text{Tr} U_{\square} = -H \quad (4.33)$$

と置くと、上の式は統計力学の分配関数  $Z$ 、および相関関数  $\langle O \rangle$  そのものである。ただ、普通よく見かける統計物理では、力学変数は格子点（サイト）上で定義されており、格子ゲージ理論のように、リンク（ボンド）上に定義されている場合は少ない。

式 (4.32) が示すように、結合定数  $g^2$  が、統計力学の温度  $T$  に対応する。統計力学のスピン系では、温度  $T$  をゼロから上げていくと、キュリー点  $T_c$  を境に強磁性体から常磁性体が変わる。これを相転移という。話を具体的にするために、長さ 1 の 3 次元のベクトル  $\vec{S}(n)$  が 3 次元の立法格子上に存在し、相互作用は最近隣相互作用としよう。すなわちハミルトニアンは

$$H = - \sum_n \sum_{\mu} \vec{S}(n) \vec{S}(n + \mu) \quad (4.34)$$

$$\vec{S}^2(n) = 1 \quad (4.35)$$

で与えられる。  $T > T_c$  で

$$\langle \vec{S}(n) \vec{S}(m) \rangle = e^{-\frac{r}{\xi}} \quad (r = |\vec{n} - \vec{m}|) \quad (4.36)$$

$T < T_c$  で

$$\langle \vec{S}(n) \vec{S}(m) \rangle = c + O(e^{-\frac{r}{\xi}}) \quad (4.37)$$

で与えられる。すなわち相関関数の振舞いの違いによって相が区別できる。

格子ゲージ理論においても、相関関数の振舞いの違いによって系の相が区別できる。高温ではエントロピーがきき、系は乱雑な状態になり、相関関数は指数関数的に減衰する。温度  $T$  が下がるにつれ、エネルギー項がきき始め、スピンは同じ方向を向こうとしはじめ、系全体がだんだん秩序状態になり、相関距離  $\xi$  は大きくなっていく。ついに  $T = T_c$  で  $\xi = \infty$  となり、相転移をおこす。

格子ゲージ理論においても、相関関数の振舞いの違いによって系の相が区別できる。相関関数として、自明にゼロでないものはゲージ不変量のみであることが簡単にしめせる（証明省略）。ゲージ不変量の典型的なものは、前にも述べたように、リンク変数を、閉じたループに沿って並べた積

$$W(C) = \langle \text{Tr} \prod_C U_l \rangle \quad (4.38)$$

である。例えば  $C$  として  $R \times T$  の長方形をとる。これをウィルソンループという。 $W(R \times T)$  の  $T, R \rightarrow \infty$  の極限での振舞いは大きくわけて

$$W(R \times T) \propto \exp(-cRT) \quad (4.39)$$

$$W(R \times T) \propto \exp[-c'(R+T)] \quad (4.40)$$

になることが知られている。 $g^2$  が大きいとき ( $T$  が大きいときに対応) は、系は乱雑状態にあり相関関数は早く減衰する。すなわち、式 (4.39) のように振舞う。これを”面積則”という。結合定数  $g^2$  を小さくしていくと、 $g^2 = g_c^2$  で相転移を起こし、 $g^2 \leq g_c^2$  では式 (4.40) の法則、すなわち”周辺則”に従うことが示されている。

面積則と周辺則が物理的に何を意味するかは次章で述べる。

### 4.3 連続極限

ここで連続極限について述べておく。これまでで、述べたように、格子間隔  $a$  は紫外発散切断の役割を果たしている。しかし本当に求めたいのは  $a \rightarrow 0$  の連続極限である。ここで、ユークリッド対称性も回復されていると考えられている。

話を簡単にするために、格子ゲージ系の代わりに格子スピン系を考える。場の量子系と格子上の統計力学の同等性を用いて、統計力学の相関距離  $\xi$  と、量子系の一番小さい粒子の質量  $m$  との間に

$$m = \frac{1}{\xi a} \quad (4.41)$$

の関係が導かれる。ここで、 $\xi$  は格子間隔を単位として測ってある。

そこで、 $a \rightarrow 0$  の極限を考える。その極限で、量子系の質量などの物理量は一定値に近付かなくては、理論は存在しないことになる。式 (4.41) で、 $m$  を一定にして  $a \rightarrow 0$  にするためには  $\xi \rightarrow \infty$  でなければならない。ここで、 $\xi$  は  $g^2$  によるので、連続極限とは、物理量を一定になるようにしながら、結合定数  $g^2$  ( $T$  に対応) を変化させ、相転移点  $g_c^2$  に近付けるということになる。すなわち、結合定数  $g^2$  を  $a$  の関数と考えて、 $\xi a$  が一定になるように、関数形  $g^2(a)$  を決めることである。しかし、これを導くのは非常に困難であるので、今回は M.Creutz によって示された関係式を引用した。

$$a^2 = \frac{1}{K} \left( -\ln \frac{1}{g^2} \right) \quad \frac{4}{g^2} \leq 2 \quad (4.42)$$

$$a^2 = \frac{1}{k} \exp\left[-\frac{6\pi^2}{11}\left(\frac{4}{g^2} - 2\right)\right] \quad \frac{4}{g^2} \geq 2 \quad (4.43)$$

である。ここで  $K$  はストリングテンションでこの場合、 $K \approx 0.16 \text{ (GeV}^{-2}\text{)}$  で与えられている。また温度  $T$  と時間方向の格子サイズ  $N_t$  の関係は

$$T = \frac{1}{aN_t} \quad (4.44)$$

である。

## 第5章 数値実験

### 5.1 モンテカルロ法

数値計算に有効な方法としてモンテカルロ法がある。一般に物理量  $O$  の期待値は (ゲージ場のみとする)、式 (4.29) のように

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \int \prod_l dU_l O(U) e^{S_g} \quad (5.1)$$

である。ある1つの配位がきまると作用  $S$  と物理量  $O$  が計算できる。経路積分は可能な全ての配位についての  $O$  に  $e^{S_g}$  の重みをかけて足し合わせることを意味する。この方法は  $g$  がどんな値であっても適用可能で、いい換えれば温度  $T$  の広い範囲について系の性質を調べることができる。よって、格子理論を用いてクォークグルーオン系の性質を閉じ込め相から非閉じ込め相まで計算することができる。また式 (5.1) は有限個の有限領域の積分であるから、原理的には数値計算を行なうことができる。しかし有限であると言っても、 $V$  として例えば  $10^4$  をとって、 $SU(3)$  の群を考えると、 $SU(3)$  は8個のパラメータによって指定され、 $4 \times 10^4$  個のリンクがある。故に  $8 \times 4 \times 10^4 \approx 3 \times 10^5$  重の積分である。まともに数値計算はとてもできない。そこで確率的に変数の組  $\{U\}$  を選んで期待値を計算する。その確率分布が

$$P(\{U\}) \sim e^{S_g} \quad (5.2)$$

になるようにして

$$\langle O \rangle \cong \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N O(\{U\}_k) \quad (5.3)$$

で、物理量  $O$  の期待値を計算する方法をモンテカルロ法という。ここで、 $\{U\}_k$  は  $k$  番目の組で、 $N$  は組の数で十分に大きな数である。

ここで、具体的に確率分布が式 (5.2) になるように、 $\{U\}_k$  のリンク変数を確率的に変えることにより、新しい  $\{U\}_{k+1}$  を生成させる。

$$\{U\}_k \rightarrow \{U\}_{k+1} \quad (5.4)$$

これをアップデートと呼ぶ。その結果として、式 (5.2) の分布になるためには次の条件を満たせばよい。

$$P(\{U'\}_{k+1}) = \int dU W(\{U\}_k, \{U'\}_{k+1}) P(\{U\}_k) \quad (5.5)$$

とした時に

1.  $\int dU' W(\{U\}, \{U'\}) = 1$
2. どのような変数の組にも、有限回のアップデートで到達できる。
3.  $e^{S(\{U\})} W(\{U\}, \{U'\}) = e^{S(\{U'\})} W(\{U'\}, \{U\})$

1) の式は個別つりあい (detailed balance) と呼ばれる。1) と 3) の式を用いて

$$e^{S(\{U'\})} = \int dU' W(\{U\}, \{U'\}) e^{S(\{U\})} \quad (5.6)$$

を簡単に示せる。ところで、上の条件を満たす方法として、メトロポリス法とヒートバス法が用いられる。今回はヒートバス法を使う。詳しくは付録に示す。

また、今回の数値実験について、本来は格子ゲージ理論は  $SU(3)$  の場合を考えるのであるが、今回は簡単のため、 $SU(2)$  の場合で考える。

## 5.2 有限温度相転移

序論でも述べたが、クォークは永遠にハドロンの中に閉じ込められているのではなく、宇宙の初期のような非常に高温になると、相転移が起こり、クォークとグルーオンが単独に運動できるクォークグルオンプラズマ状態になる。この章ではこのことを論じる。

4章で少し述べたウィルソンループについて、話をもどす。格子ゲージ理論において有用な相関関数はゲージ不変量のみである。典型的なゲージ不変量として、 $R \times T$  の長方形に沿ってのリンク変数の積を考えたい。これをウィルソンループと呼ぶ。

$$W(R \times T) = \text{Tr} \left( \prod_C U_l \right) \quad (5.7)$$

そこで述べたように、このウィルソンループの  $T, R \rightarrow \infty$  の振舞いによって系の相を分類できる。 $T, R \rightarrow \infty$  の極限でウィルソンループが (4.39) に示す”面積則”に従う時、系は乱雑状態にあり、(4.40) の”周辺則”に従う時、秩序状態にあるという話をした。これは、統計力学の言葉である。これを量子論の言葉すると言い直してみる。

量子論ではハミルトニアンが存在する。QCD でも QED でも本質的に同じで、QEDの方が取り扱いが簡単なのでその場合を扱う。QEDの電磁場だけのハミルトニアンを  $H_0$  とすると、点  $\vec{x}_1$  と点  $\vec{x}_2$  に  $c$  数の電荷  $+e$  と  $-e$  を置いた時のハミルトニアンは

$$H_0 + \Delta H = H_0 + e \int A_0(\delta(\vec{x} - \vec{x}_1) - \delta(\vec{x} - \vec{x}_2)) d^3x \quad (5.8)$$

で与えられる。ここで

$$e^{-\Delta H \Delta \tau} \quad (5.9)$$

を考える。これは

$$e^{-e \int A_0(\delta(\vec{x} - \vec{x}_1) - \delta(\vec{x} - \vec{x}_2)) d^3x \Delta \tau} = e^{iA_4(\vec{x}_1, \tau) \Delta \tau - iA_4(\vec{x}_2, \tau) \Delta \tau} \quad (5.10)$$

になる。故に図のループに沿って

$$e^{i \int A_\mu dx_\mu} \quad (5.11)$$

の  $\tau$  方向の線積分を行なう部分が得られる。最初  $\tau = \tau_1$  において一点で  $+e$  と  $-e$  が対発生し、だんだん点  $x_1$  と  $x_2$  に広がっていき、最後に  $\tau = \tau_2$  において対消滅したとして、その部分を空間方向に平らにすると空間部分の線積分も得られる。故にウィルソンループの期待値は、 $c$  数の  $+e$  と  $-e$  の電荷を  $\vec{x}_1$  と  $\vec{x}_2$  に置いたときと、置かない時のエネルギー差になっている。これを式にすると

$$-\ln \lim_{T \rightarrow \infty} W(R \times T) = E(R) - E_0 \quad (5.12)$$

となる。ここで、 $E_0$  は、ゲージ場のみの系の真空エネルギーである。また  $E(R) - E_0$  は、静的なクォークのポテンシャル  $V(R)$  に対応する。すなわち

$$-\ln \lim_{T \rightarrow \infty} W(R \times T) = V(R) \quad (5.13)$$

しかし、高温度を実現するためには虚時間方向の格子長  $aN_t$  を小さくする必要があり、式 (5.12) によって  $V(R)$  を求めることが困難である。こ

れを避けるためにポリアコフラインと呼ばれる虚時間方向の直線経路に沿ったリンク変数の積、

$$P_r(x) = \text{Tr} \prod_C U_l \quad (5.14)$$

を導入する。 $C$  は  $\tau$  方向の直線で  $\tau = 0$  と  $\tau = \alpha$  で周期的境界条件でつながっている。距離  $R$  だけ離れた二つのポリアコフラインの相関

$$\langle P_r(x), P_r(x+R) \rangle \sim e^{-\frac{V(R)}{T}} \quad (5.15)$$

を求めて、 $V(R)$  を計算する。ここで  $T = (aN_t)^{-1}$  は温度である。グルーオン場の周期境界条件はウイルソンループと同様  $P_r$  をゲージ不変にする。式 (5.15) はウイルソンループ  $W(R \times T)$  の水平部分を取り除いたものにより正確にクォーク間ポテンシャルを計算するのに役立つ。

一方、次の期待値

$$\langle P_r(x) \rangle = \langle \text{Tr} \prod_C U_l \rangle \sim e^{\varepsilon_q} \quad (5.16)$$

によって定義される  $\varepsilon_q$  は単独クォークの自由エネルギーを表す。もしクォークが閉じ込められていれば、クォーク 1 個のエネルギーは無限大になるはずである。つまり、もし系が閉じ込めの相にあるならば、 $\varepsilon = \infty$ 、非閉じ込め相にあるならば  $\varepsilon = \text{有限}$  になると思われる。実際には空間方向の体積も有限な格子上で計算するので、閉じ込め相ならば  $\varepsilon_q$  が大きな値をとり、クォークが非閉じ込め相にある場合とはっきり差がでてくるはずである。よって、期待値  $\langle P_r \rangle$  を見ればどの相にあるかがわかる。つまり  $\langle P_r \rangle \simeq 0$  の時、閉じ込め相、 $\langle P_r \rangle \neq 0$  の時、非閉じ込め相と言える。したがって、 $\langle P_r \rangle$  は非閉じ込め相の秩序パラメータである。

これより、結合定数  $g^2$  の値を変えて相転移の起こる  $g_c^2$  を求める。さらに  $g_c^2$  を転移温度  $T_c$  に変換する。今回の数値実験では、格子サイズ（格子の数）を  $12 \times 12 \times 12 \times N_t$  として、 $N_t$  を 2 から 6 まで変化させて、 $T_c$  がどのように変化していくかを見て、これより  $N_t \rightarrow \infty, a \rightarrow 0$  の連続極限での相転移温度を考察した。

## 第6章 結果・考察

$12^3 \times 5$ でのポリakovラインを図 6.1 に示す。ここではアップデートの回数  $K$  を 2000 回として、期待値  $\langle P_r \rangle$  を出した。縦軸に  $\langle P_r \rangle$  をとり、横軸には  $\beta = \frac{4}{g^2}$  をとったものである。ここで、 $P_r$  は負の値をとることもあるが、この場合、重要なのはその絶対値の大きさなので、以降  $\langle P_r \rangle$  は絶対値をとっている。以下で用いる誤差の付け方については付録 B で述べる。図 6.1 からわかるように、 $\beta$  の値が 2.3 以下では  $\langle P_r \rangle$  の値はほぼゼロであり、それ以降、値を持ちだしている。よって、前節で述べたように  $\langle P_r \rangle$  の値がゼロに近い  $\beta = 2.3$  以下、つまり低温側では閉じ込め相であり、有限な値を持ち出した点あたりからは非閉じ込め相といえる。したがって  $\beta = 2.3$  付近で相転移が起こっているのである。これより、数値実験による格子グルーオン系の閉じ込め、非閉じ込めのための相転移が確かめられた。

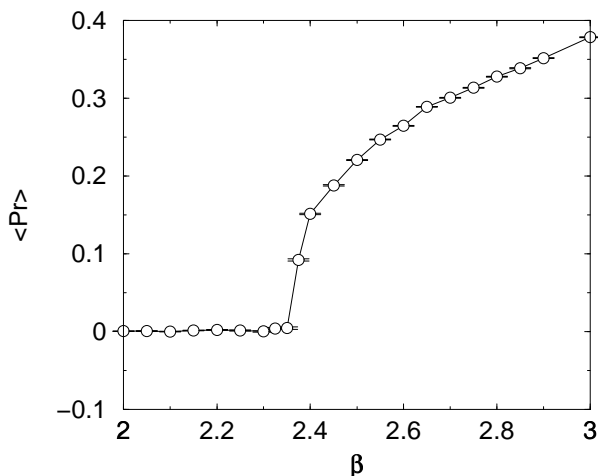


図 6.1: Polyakovline for  $N_t = 5$

ここで相転移点  $\beta_c$  を決定しようと思うと、この図から決定するのは困難である。今回のような格子による数値実験では、閉じ込め相から非閉じ込め相に徐々に転移しているため、どこからが非閉じ込め相で、どの点が相転移点であるかを図 6.1 から判断できない。そのため相転移点を決定す



る方法として、相転移点近傍では、 $\langle P_r \rangle$  の値に大きな変化があるので、 $P_r$  のフラクチュエーション（変動）の大きさを見ることによって決定する。

図 6.2 にそれぞれ  $\beta = 2.0, 2.35, 2.6$  での  $P_r$  とアップデートの回数  $K$  との関係を示す。期待値  $\langle P_r \rangle$ 、つまり  $P_r$  の平均値は  $\beta = 2.0$  の時  $0.4 \times 10^{-3}$ 、 $\beta = 2.35$  の時  $0.4 \times 10^{-2}$ 、 $\beta = 2.6$  の時  $0.26$  である。図を見比べると  $\beta$  によってそれぞれフラクチュエーションの大きさが違うことが分かる。 $\beta = 2.0$  と  $\beta = 2.6$  の時に比べて  $\beta = 2.35$  の時のほうがフラクチュエーションが大きい。 $\beta = 2.0$  の時は  $\langle P_r \rangle$  の値からしても閉じ込め状態にあり、 $\beta$  の変化に対して安定した値をとっているので、フラクチュエーションは小さい。そして  $\beta = 2.35$  から  $2.6$  へと、 $\langle P_r \rangle$  の値は増え続け、逆にフラクチュエーションの大きさは  $\beta = 2.35$  で大きくなり、 $2.6$  で再び、小さくなっている。これは、 $\beta = 2.35$  付近はまだ閉じ込め状態と非閉じ込め状態の中間で  $\beta$  に対して急な変化をみせる状態なので、 $P_r$  のフラクチュエーションも大きくなっている。そして  $\beta$  の値が増えるにつれて、 $\beta$  に対する  $\langle P_r \rangle$  の変化も小さくなってきているので、フラクチュエーションも小さくなっていったと考えられる。したがって、フラクチュエーションが最も大きくなる点を相転移点とする。このフラクチュエーションの値の大きさを数値にするのに次のような計算式を用いた。

$$F = \frac{\sum_{k=1}^n |P_r(k) - \langle P_r \rangle|}{n} \quad (6.1)$$

これは  $n$  個の  $P_r(k)$  の  $\langle P_r \rangle$  からの”ずれ”の大きさを平均化したものになっている。これを横軸を  $\beta$  としてグラフ化したものが図 6.3 である。これはより精度を良くするため、 $k = 5000$  回で行なった。図を見て分かるように  $\approx 2.45$  をピークにとった山型の形になっている。よって相転移点  $\beta_c = 2.45$  とする。

同様に  $N_t = 2, 3, 4, 5$  と変えて、 $\langle P_r \rangle$  を  $F$  の値を計算したものを図 6.4 に示す。

$N_t$	$\beta_c$
2	1.85
3	2.15
4	2.30
5	2.35
6	2.45

これより得られた  $\beta_c$  を表にまとめた。

表を見ると、 $\beta_c$  は  $N_t$  が大きくなるに連れて大きくなっている。これは、前節に示した式 (4.42) ~ (4.44) から分かるように  $\beta$  は  $N_t$  に依存しており、今回用いた格子サイズによる  $\beta$  の変化が大きすぎて連続極限に対応する  $\beta$  を予測できない。ここで4章で導入した式 (5.17) ~ (5.19) を用いて  $\beta_c$  を  $T_c$  に変換してみる。

これより、下に格子サイズ  $N_t$ 、 $\beta_c$ 、格子間隔  $a$ 、 $T_c$  の関係を表に示す。

$N_t$	$\beta_c$	$a(GeV^{-1})$	$T_c(MeV)$
2	1.85	2.2	230
3	2.15	1.7	200
4	2.30	1.1	220
5	2.35	0.98	205
6	2.45	0.75	220

これを見ると相転移温度  $T_c$  はどれも約 200 MeV であることが分かる。この値は今回、参考にしたいくつかの文献での値ともだいたい一致する。ここで、 $N_t$  の数を増やしていくということは、格子間隔  $a$  が細くなり、より精密な値に近づくということである。この表からして  $N_t$  の数が増えても  $T_c$  にはあまり大きな変化はみられない。よって連続極限  $N_t \rightarrow \infty, a \rightarrow 0$  においても同じように  $T_c \sim 200(MeV)$  という値をとるのではないだろうか。

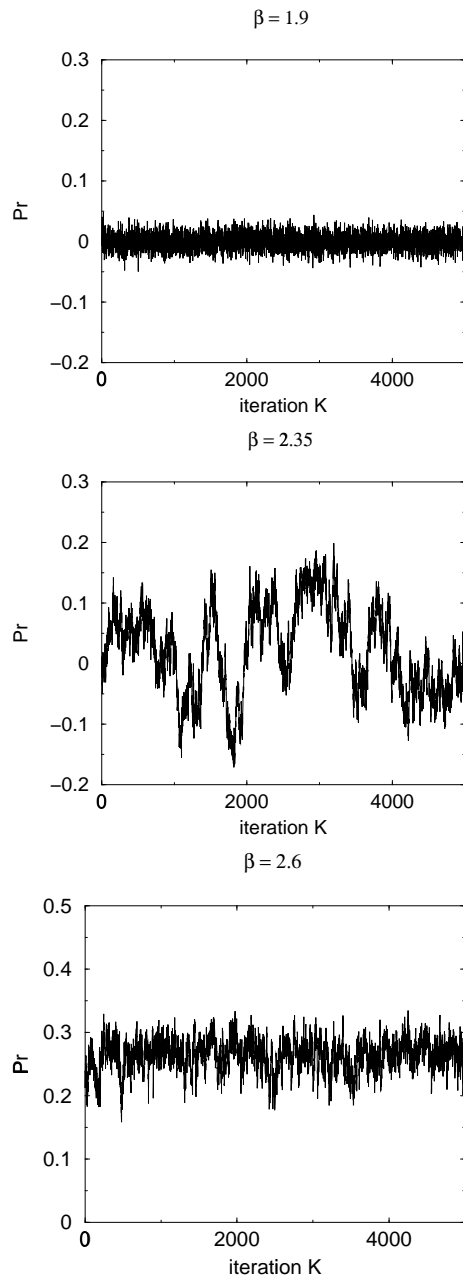


Figure 6.2:  $P_r$  for  $\beta = 2.0, 2.35, 2.6$

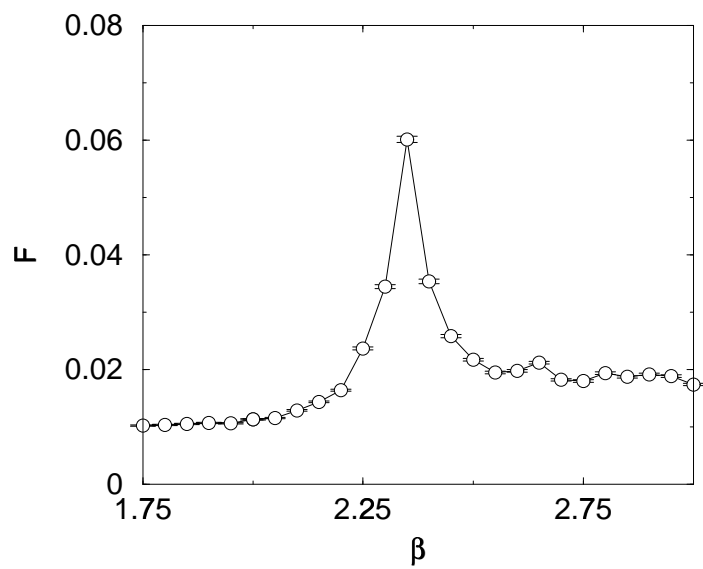


図 6.3:  $N_t = 5$  での  $P_r$  のフラクチュエーション

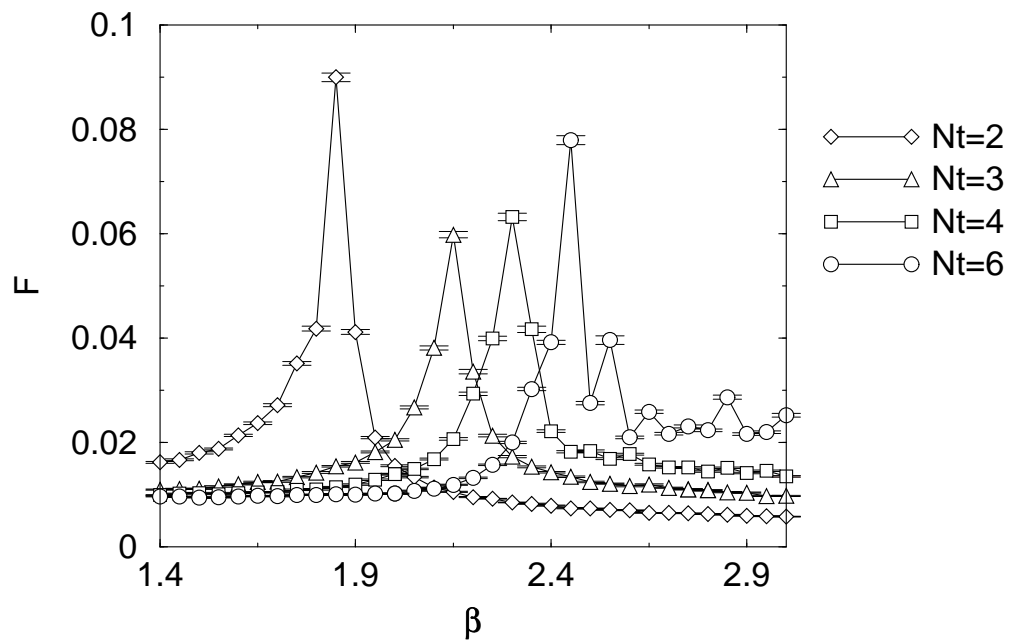
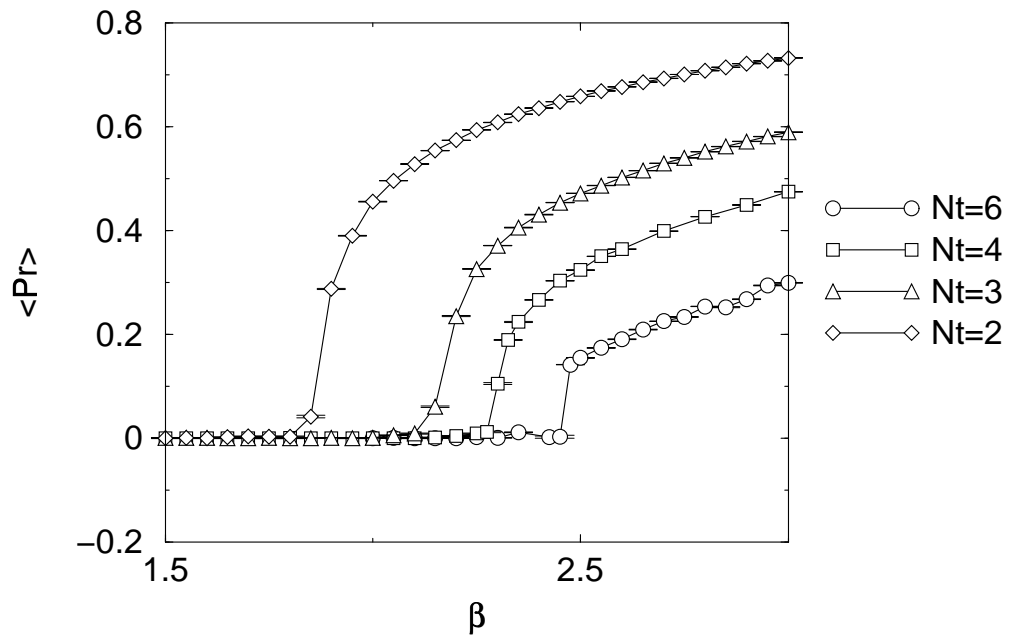


図 6.4: ポリアコフラインとそのフラクチュエーション

## 第7章 まとめ・謝辞

以上の研究より、格子ゲージ理論を用いた数値実験によって、閉じ込め相から非閉じ込め相への相転移を確かめることができた。また、格子サイズを変えることによって、転移温度の変化を考察し、連続極限で相転移温度は約  $200(\text{MeV})$  であろうという最終結論を導くことができた。

しかし、まだ格子ゲージ理論、相転移、数値実験法などについて、深く理解できないまま研究を進めていたところがある。実際、式の導出の仕方が分からず、文献から引用した箇所もあった。よって、今後もさらに研究を進めて、理解を深めていきたいと思う。

また、今回の卒業研究にあたって、多くの方々に大変迷惑をおかけしました。とくに平田先生をはじめとするハドロン物理学研究室の方々には、度々の質問にも親身に答えていただき、また研究の環境を整えていただき、とても感謝しています。ありがとうございました。

## 付録 A ヒートバス法

経路積分をモンテカルロ法によって行なうためには  $e^{-S}$  の重みを持った配位を発生させてやらなければならない。ここで重みを持った配位の発生方法としてヒートバス法を用いる。

ここで、ある 1 つのリンク変数  $U_\mu(n)$  に注目した時、この  $U_\mu(n)$  を含むブラケットが 6 個ある。いま作用はブラケットだけを用いて  $U_\mu(n)$  をアップデートすることが可能である。アップデートによってリンク変数  $U$  が発生する確率  $P(U)$  は  $e^{-S}$  の重みを持つ確率だから

$$dP(U) \propto e^{-S} dU \quad (\text{A.1})$$

となる。ここで  $dU$  は  $SU(2)$  の積分測度である。今、 $U$  は  $SU(2)$  の元なのでパウリ行列を用いて

$$U = a_0 I + ia_1 \sigma_1 + ia_2 \sigma_2 + ia_3 \sigma_3 \quad (\text{A.2})$$

ここで

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$$a^2 \equiv a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \quad (\text{A.4})$$

と表すことができる。(A. 2) より

$$dP(U) \propto dU \exp\left[\frac{\beta}{2} \text{Tr}\{U_\mu(n) \sum_{\alpha=1}^6 \tilde{U}_\alpha\}\right] \quad (\text{A.5})$$

と表せる。ここでリンク変数が  $SU(2)$  群の元であることから次式が成り立つ。

$$\sum_{\alpha=1}^6 \tilde{U}_\alpha = k \bar{U} \quad (\text{A.6})$$

$\bar{U}$  は  $SU(2)$  の元、 $k$  は

$$k = \sqrt{\det\left(\sum_{\alpha=1}^6 \tilde{U}_\alpha\right)} \quad (\text{A.7})$$

である。ここで  $U = U'\bar{U}^{-1}$  とおく。この置き換えにより

$$\begin{aligned} dP(U) &= dP(U'\bar{U}^{-1}) \\ &\propto dU \exp[\frac{1}{2}\beta k Tr U'] \end{aligned} \quad (A.8)$$

となる。 $U'$  の  $SU(2)$  の元だから  $dU = dU'$  となり

$$dP(U) \propto \frac{1}{2\pi^2} \delta(a^2 - 1) s - 4a \exp(\beta k a_0) \quad (A.9)$$

が導かれる。したがって  $U$  を  $P(U)$  の確率で発生させるという問題は4次元の単位球面上に  $a_0$  方向に  $\exp(\beta k a_0)$  の乱数点を発生させるという問題に読み変えることができる。こうして発生させた  $U'$  を用いて  $U = U'\bar{U}_1$  とすれば  $U_\mu$  をアップデートさせた新しいリンク変数  $U$  ができたことになる。(A. 9) は

$$dP(U) \propto \frac{1}{2} da_0 d\Omega (a - a_0^2)^{\frac{1}{2}} \exp(\beta k a_0) \quad (A.10)$$

と書き換えることができる。ここで  $d\Omega$  は微分立体角である。したがって、まず  $a_0$  を  $[1,-1]$  の範囲で

$$P(a_0) = \sqrt{1 - a_0^2} \exp(\beta k a_0) \quad (A.11)$$

の確率で発生させて、 $a$  については半径  $\sqrt{1 - a_0^2}$  の3次元単位球面上に一様乱数を発生させその座標を  $(a_1, a_2, a_3)$  とするという方針を進めることにする。

(A. 1 1) 式の確率を2つの部分に分けてはじめに

$$P(a_0) \propto \exp(\beta k a_0) \quad (A.12)$$

の確率で  $a_0$  を発生させこの  $a_0$  を  $\sqrt{1 - a_0^2}$  の確率で採用することにする。 $[e^{-\beta k}, 1]$  の一様乱数  $x$  を用いて

$$a_0 = 1 + \frac{1}{\beta k} \ln(x) \quad (A.13)$$

として  $a_0$  を決め、別の  $[0,1]$  の一様乱数  $y$  を用いて  $y$  が  $\sqrt{1 - a_0^2}$  より大きければ  $a_0$  を棄却、 $y$  が  $\sqrt{1 - a_0^2}$  より小さければ  $a_0$  を採用する。これを採用するまで繰り返せば  $a_0$  が得られる。次に  $a$  を求める。3次元極座標の  $z$  軸とのなす角を  $\theta$ 、 $x$  軸とのなす角を  $\varphi$  とすると、 $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$  より  $\varphi$  は  $[0, 2/\pi]$  の一様乱数となり  $\theta$  は  $\sin \theta$  の重みを持つので  $\cos \theta$  が  $[-1,1]$  の一様乱数となる。したがって以上の  $\theta$ 、 $\varphi$  を用いて

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{1 - a_0^2} \sin \theta \cos \varphi \\ a_2 &= \sqrt{1 - a_0^2} \sin \theta \sin \varphi \\ a_3 &= \sqrt{1 - a_0^2} \cos \theta \end{aligned} \quad (A.14)$$



となり、これらの  $a_0, a_1, a_2, a_3$  を用いて  $U'$  を決めて、 $U = U'\bar{U}^{-1}$  としてリンク変数をアップデートする。

これをすべてのリンク変数に対して繰り返すことによって配位のアップデートが終了する。

## 付録 B 誤差の評価

$n$  回繰り返して測定した物理量  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  の組を考えると、最もらしい値は

$$A \equiv \frac{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n}{n} \quad (\text{B.1})$$

で与えられる平均値  $A$  となる。この平均値が真値からのズレを表す誤差（平均値の誤差）は、次のように評価される。各データ値と平均値との差は残差と呼ばれ、 $\delta_i = x_i - A$  となる。平均値の誤差  $\sigma_a$  は、残差の 2 乗和を用いて

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \delta_i^2}{n(n-1)}} \quad (\text{B.2})$$

と評価される。結局、 $n$  回の測定による物理量  $x$  の結果は、

$$A \pm \sigma_a \quad (\text{B.3})$$

と表される。 $n$  回の測定に対して、残差の 2 乗和がほぼ  $n$  に比例して増加することから、誤差はほぼ  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  に比例して小さくなる。

## 関連図書

- [1] 岩崎洋一” 格子ゲージ理論” 共立出版、 1 9 8 5
- [2] 神吉健” クォーク・グルーオン・プラズマ” 丸善株式会社、 1 9 9 1
- [3] Larry D.McLERRAN and Benjamin SVETITSKY” A Monte Carlo Study of SU(2) YANG-MILLS THEORY at Finite Temperature” 1980
- [4] Heinz J Rothe” Lattice Gauge Theories”
- [5] 梅田貴士” 格子 QCD におけるスケーリングの研究” 1 9 9 6