

線形移流方程式に対する 各種数値解法の安定性解析

広島大学理学部物理科学科

クォーク物理学研究室

B092395

江川 慎之助

指導教官 杉立 徹 教授

主査 杉立 徹 教授

副査 山本 一博 准教授

概要

液体、気体、プラズマのみならず、初期宇宙において実現されたと考えられるクォーク・グルーオン・プラズマ (QGP) などのマクロな集団運動は各々流体モデルによってよく近似される。これらの各流体モデルは非線形システム方程式によって記述されるため、解析的に厳密解を求めることが困難であり、数値解析による研究が必要不可欠である。しかし、流体方程式においては、衝撃波などの不連続解が存在するため、数値計算がしばしば破綻する。そのため、流体方程式に対する高精度かつ安定な数値解法の研究開発は極めて重要な課題である。

そこで本研究では、流体方程式の基礎となる線形移流方程式に対する各種数値解法の基本的性質について比較研究することを目的とする。特に本論文では、高次精度の差分法も含む様々な数値解法に対し **von Neumann** の安定性解析を行った。解析の結果から、数値解法の精度と安定性に関する議論を行った。

目次

1. 序論

1-1. 流体モデル.	4
1-2. 数値解法の必要性と課題.	4
1-3. 線形移流方程式.	4
1-4. 目的.	4

2. 一次元線形移流方程式. 5

3. 各種線形移流方程式に対する数値解の導出

3-1. FTCS 法.	6
3-2. Lax 法.	6
3-3. 風上差分法 (一次精度)	7
3-4. 風上差分法 (二次精度)	7
3-5. 風上差分法 (三次精度)	7

4. von Neumann の安定性解析

4-1. 解析手法.	8
4-2. 安定性解析の性質.	9
4-3. FTCS 法.	10
4-4. Lax 法.	10
4-5. 風上差分法 (一次精度)	11
4-6. 風上差分法 (二次精度)	11
4-7. 風上差分法 (三次精度)	12
4-8. 考察.	12

5. まとめ. 20

参考文献. 21

謝辞. 21

1. 序論

1-1. 流体モデル

マクロな集団運動の例として、液体、気体、プラズマ、さらにはクォーク・グルーオン・プラズマ (QGP) などが上げられる。これらはすべて流体モデルによってよく近似され、非線形システム方程式で記述される。

1-2. 数値解法の必要性と課題

非線形システム方程式は解析的に厳密解を求めることは困難である。よって数値解析による研究が必要不可欠である。しかし、流体の方程式においては、衝撃波などの不連続解が存在するため、数値計算がしばしば破綻する。そのため、流体方程式に対する高精度かつ安定な数値解法の研究開発は極めて重要な課題である。

1-3. 線形移流方程式

流体方程式の基礎となる線形移流方程式は次のように記述される。

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{u} + a \nabla \vec{u} = 0$$

ただし \vec{u} は時間 t と空間ベクトル \vec{x} で表される。

1-4. 目的

本論文では、流体方程式の基礎となる線形移流方程式に対する各種数値解法の基本的性質について比較研究することを目的とする。

特に、高次精度の差分法も含む様々な数値解法に対し von Neumann の安定性解析を行う。

2. 一次元線形移流方程式

時刻 t 、位置 x で与えられる物理量を $u(t,x)$ 、 a を正の定数とおく。このとき一次元線形移流方程式は次のように記述される。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \dots (2-1) \text{式}$$

これは、流れを表す最も基本的な方程式である。この厳密解は

$$u(x, t) = f(x - at)$$

となる。すなわち、分布の形状を保ったまま、一定の速度 a で移流することを示す。

3. 各種線形移流方程式に対する数値解の導出

物理量 u および時間 t 、空間 x の離散値を次のように定義する。

$$u_j^n \equiv u(x_j, t^n) \quad x_j \equiv j\Delta x, t^n \equiv n\Delta t$$

Δx は空間の刻み幅、 Δt は時間の刻み幅、 n は時間のステップ数、 j は空間のステップ数を表す。これを用いて、(2-1)式の導関数を様々な差分近似によって差分化を行う。

3-1. FTCS 法

FTCS 法は時間一次精度前進差分、空間二次精度中心差分をとる方法であり、(2-1)式を、

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

と置き換える。これを整理して、

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{v}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

ここで、

$$v \equiv \frac{a\Delta t}{\Delta x}$$

と定義し、 v をクーラン数という。これは安定性の観点から、重要な無次元量である。線形移流方程式(2-1)式において、 a は物理的な信号の伝播速度を表す。一方、 $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ は数値的な信号の伝播を表す。よって $a > \frac{\Delta x}{\Delta t}$ 、つまり $v > 1$ となる時、風上の情報を十分に得られなくなり、その数値解は不安定になるという性質がある。

3-2. Lax 法

Lax 法は次のように差分をとる。

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2}}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

これを解くと、

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{v}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2}$$

となり、FTCS法に項が1つ附随する形となる。

3-3. 風上差分法 (一次精度)

一次精度の風上差分法は時間一次精度前進差分、空間一次精度風上差分をとる方法であり、(2-1)式を

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$

と置き換える。これを整理して、

$$u_j^{n+1} = u_j^n - v(u_j^n - u_{j-1}^n)$$

となる。

3-4. 風上差分法 (二次精度)

二次精度の風上差分法は時間一次精度前進差分、空間二次精度風上差分をとる方法であり、(2-1)式を

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{3u_j^n - 4u_{j-1}^n + u_{j-2}^n}{2\Delta x} = 0$$

と置き換える。これを整理して、

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{v}{2}(3u_j^n - 4u_{j-1}^n + u_{j-2}^n) = \left(1 - \frac{3v}{2}\right)u_j^n + \frac{v}{2}(4u_{j-1}^n - u_{j-2}^n)$$

となる。

3-5. 風上差分法 (三次精度)

三次精度の風上差分法は時間一次精度前進差分、空間三次精度風上差分をとる方法であり、(2-1)式を

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{2u_{j+1}^n + 3u_j^n - 6u_{j-1}^n + u_{j-2}^n}{6\Delta x} = 0$$

と置き換える。これを整理して、

$$\begin{aligned}
u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{v}{6}(2u_{j+1}^n + 3u_j^n - 6u_{j-1}^n + u_{j-2}^n) \\
&= \left(1 - \frac{v}{2}\right)u_j^n - \frac{v}{6}(2u_{j+1}^n - 6u_{j-1}^n + u_{j-2}^n)
\end{aligned}$$

となる。

4. von Neumann の安定性解析

4-1. 解析手法

von Neumann の安定性解析の手法として、

$$u = g \exp(ikx) \cdots \cdots (4-1)$$

という分布の時間発展を考える。(i を虚数単位、k を波数とし、g は虚数とする) ここで時刻 $t^n = n\Delta t$ 、空間位置 $x_j = j\Delta x$ のときの u を u_j^n とし、 $\kappa = k\Delta x$ とおくと、

$$u_j^n = g^n \exp(ik\Delta x j) = g^n \exp(ikj) \cdots \cdots (4-2)$$

とおける。u が厳密解をとるとき、

$$g^n = g_0 \exp(-ikat^n)$$

とおけ、

$$\begin{aligned}
g^{n+1} &= g_0 \exp(-ika(t^{n+1})) = g_0 \exp(-ika(t^n + \Delta t)) \\
&= g^n \exp(-ika\Delta t) \\
&= g^n \exp\left(-ik\Delta x \frac{a\Delta t}{\Delta x}\right) \\
&= g^n \exp(-ikv)
\end{aligned}$$

ここで時刻 t^n と t^{n+1} の振幅の比を

$$G \equiv \frac{g^{n+1}}{g^n}$$

と定義すると、

$$G = \exp(-ikv)$$

G は、大きさを $|G|$ 、偏角を φ として

$$G = |G|\exp(i\varphi)$$

と書けるので、厳密解において、

$$\begin{cases} |G| = 1 \\ \varphi = -\kappa v \end{cases}$$

となる。 $|G|$ は伝わる波の増幅率、 φ は伝わり方を表す。これらをそれぞれ

$$\begin{cases} |G|_{\text{exact}} \equiv 1 \\ \varphi_{\text{exact}} \equiv -\kappa v \end{cases} \dots \dots (4-3)$$

と定義しておく。

方法は、(4-2)式を3. で求めた数値解に代入し $|G|, \varphi$ を求め、それぞれの分布の時間発展を、(4-3)式を用いた厳密解における時間発展と比較する。また、それぞれの数値解法の間の違いなども議論する。

4-2. 安定性解析の性質

κ は空間格子幅 Δx で規格化された波数であり、 $\kappa \geq 0$ である。 κ が0の時は、各格子点における離散値 u_i^n が一定であることを示す。

一方、高周波領域では、伝播する波の波長を λ とすると、 $\lambda/\Delta x$ は Δx で規格化された波長である。離散化された系において一波長を表現できる最も少ない格子数は二つである。つまり、波長が二格子以下の波 ($\lambda < 2\Delta x$) は、離散化された系では原理的に解像できない。解像可能な条件は

$$\begin{aligned} \lambda &\geq 2\Delta x \\ \therefore \frac{\lambda}{\Delta x} &\geq 2 \end{aligned}$$

よって、 κ について、

$$\kappa = k\Delta x = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x = \frac{2\pi}{\lambda/\Delta x} \leq \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\therefore \kappa \leq \pi$$

となる。

以上から、 $0 \leq \kappa \leq \pi$ についてグラフ化して比較する。

4-3. FTCS 法

3. で求めた数値解について、安定性解析を試みる。

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{v}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

に(4-2)式を代入し整理すると、

$$\frac{g^{n+1}}{g^n} = 1 - \frac{v}{2}(\exp(i\kappa) - \exp(-i\kappa)) = 1 - i(v \sin \kappa)$$

ここで

$$\frac{g^{n+1}}{g^n} = G$$

より、

$$\begin{cases} |G|_{\text{FTCS}} = (1 + v^2 \sin^2 \kappa)^{\frac{1}{2}} \\ \varphi_{\text{FTCS}} = -\tan^{-1}(v \sin \kappa) \end{cases}$$

となる。

4-4. Lax 法

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{v}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2}$$

に(4-2)式を代入して、

$$\begin{aligned} \frac{g^{n+1}}{g^n} &= 1 - \frac{v}{2}(\exp(i\kappa) - \exp(-i\kappa)) + \frac{1}{2}(\exp(i\kappa) - 2 + \exp(-i\kappa)) \\ &= \cos \kappa - i(v \sin \kappa) \end{aligned}$$

同様に G をおいて

$$\begin{cases} |G|_{\text{Lax}} = (\cos^2 \kappa + v^2 \sin^2 \kappa)^{\frac{1}{2}} \\ \varphi_{\text{Lax}} = -\tan^{-1}(v \tan \kappa) \end{cases}$$

4-5. 風上差分法 (一次精度)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$

に、(4-2)式を代入して整理すると、

$$\frac{g^{n+1}}{g^n} = 1 - v(1 - \exp(-i\kappa)) = (1 - v + v \cos \kappa) - i(v \sin \kappa)$$

同様に G をおくと、

$$\begin{cases} |G|_{\text{風上}} = ((1 - v + v \cos \kappa)^2 + v^2 \sin^2 \kappa)^{\frac{1}{2}} \\ \phi_{\text{風上}} = -\tan^{-1} \left(\frac{v \sin \kappa}{1 - v + v \cos \kappa} \right) \end{cases}$$

4-6. 風上差分法 (二次精度)

$$u_j^{n+1} = \left(1 - \frac{3v}{2}\right) u_j^n + \frac{v}{2} (4u_{j-1}^n - u_{j-2}^n)$$

に(4-2)式を代入して整理して、

$$\begin{aligned} \frac{g^{n+1}}{g^n} &= 1 - \frac{v}{2} (3 - 4\exp(i\kappa) + \exp(-i(2\kappa))) \\ &= \left(1 - \frac{v}{2} (3 - 4\cos \kappa + \cos 2\kappa)\right) - i \left(\frac{v}{2} (4\sin \kappa - \sin 2\kappa)\right) \end{aligned}$$

同様に G をおいて

$$\begin{cases} |G|_{\text{FTCS2}} = \left\{ \left(1 - \frac{v}{2} (3 - 4\cos \kappa + \cos 2\kappa)\right)^2 + \left(\frac{v}{2} (4\sin \kappa - \sin 2\kappa)\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ \phi_{\text{FTCS2}} = -\tan^{-1} \left(\frac{\frac{v}{2} (4\sin \kappa - \sin 2\kappa)}{1 - \frac{v}{2} (3 - 4\cos \kappa + \cos 2\kappa)} \right) \end{cases}$$

となる。

4-7. 風上差分法 (三次精度)

$$u_j^{n+1} = \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) u_j^n - \frac{\nu}{6} (2u_{j+1}^n - 6u_{j-1}^n + u_{j-2}^n)$$

に(4-2)式を代入して整理して、

$$\begin{aligned} \frac{g^{n+1}}{g^n} &= 1 - \frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{6} (-6\exp(-i\kappa) + 2\exp(i\kappa) + \exp(i(2\kappa))) \\ &= \left(1 - \frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{6} (-4\cos\kappa + \cos 2\kappa)\right) - i \left(\frac{\nu}{6} (8\sin\kappa - \sin 2\kappa)\right) \end{aligned}$$

同様に G をおいて

$$\left\{ \begin{aligned} |G|_{\text{FTCS3}} &= \left\{ \left(1 - \frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{6} (-4\cos\kappa + \cos 2\kappa)\right)^2 + \left(\frac{\nu}{6} (8\sin\kappa - \sin 2\kappa)\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ \varphi_{\text{FTCS3}} &= -\tan^{-1} \left(\frac{\frac{\nu}{6} (8\sin\kappa - \sin 2\kappa)}{1 - \frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{6} (-4\cos\kappa + \cos 2\kappa)} \right) \end{aligned} \right.$$

となる。

4-8. 考察

それぞれの解法での結果をグラフにして考察する。

グラフは $|G|$ 、 $\varphi/\varphi_{\text{exact}}$ (相対位相誤差) を縦軸、 κ を横軸として、

それぞれ

$\nu=0.75$: 紫色 $\nu=0.5$: 青色 $\nu=0.25$: 緑色 厳密解 : 赤色
となる。

図 4 - 1 FTCS 法で求めた数値解の増幅率 $|G|_{\text{FTCS}}$ と κ との関係

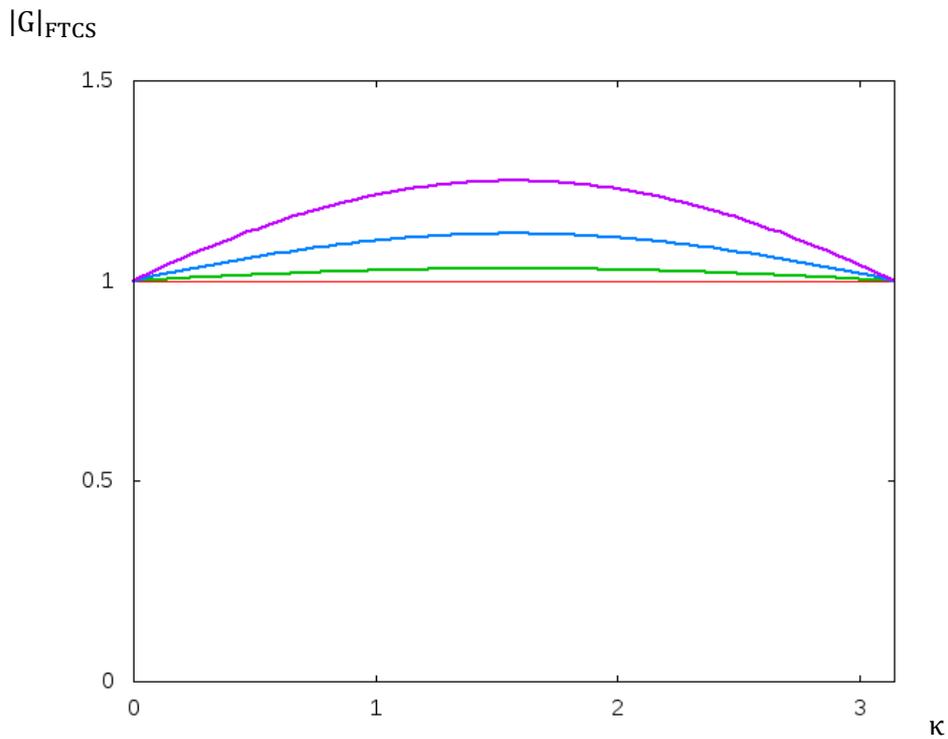


図 4 - 2 FTCS 法で求めた数値解の相対位相誤差 $\varphi_{\text{FTCS}}/\varphi_{\text{exact}}$ と κ との関係

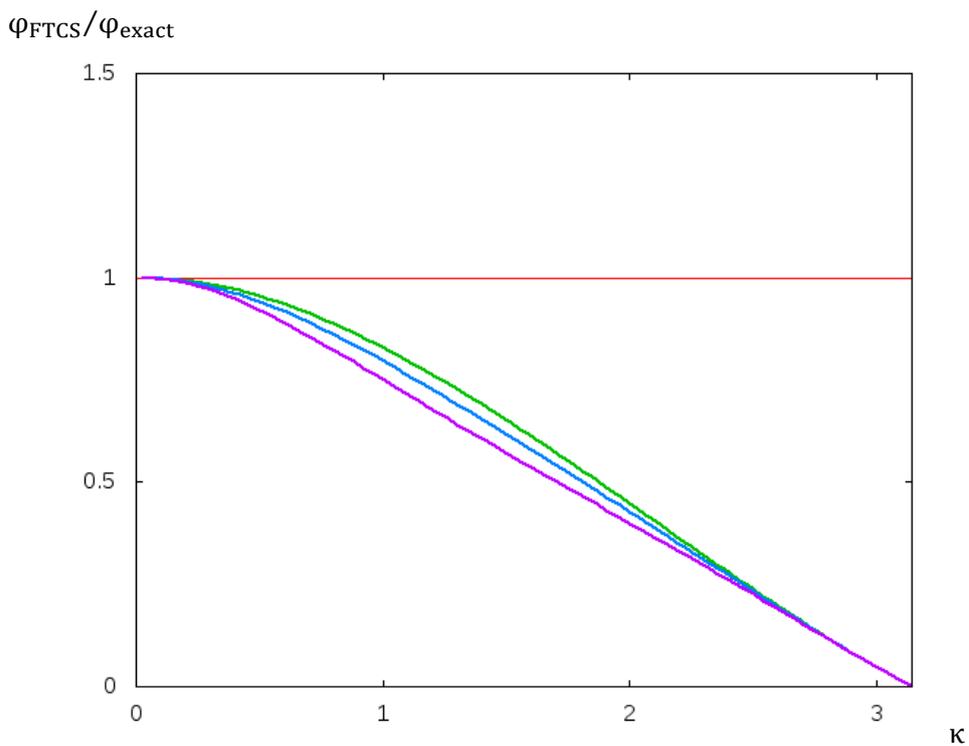


図 4 - 3 Lax 法で求めた数値解の増幅率 $|G|_{\text{Lax}}$ と κ との関係

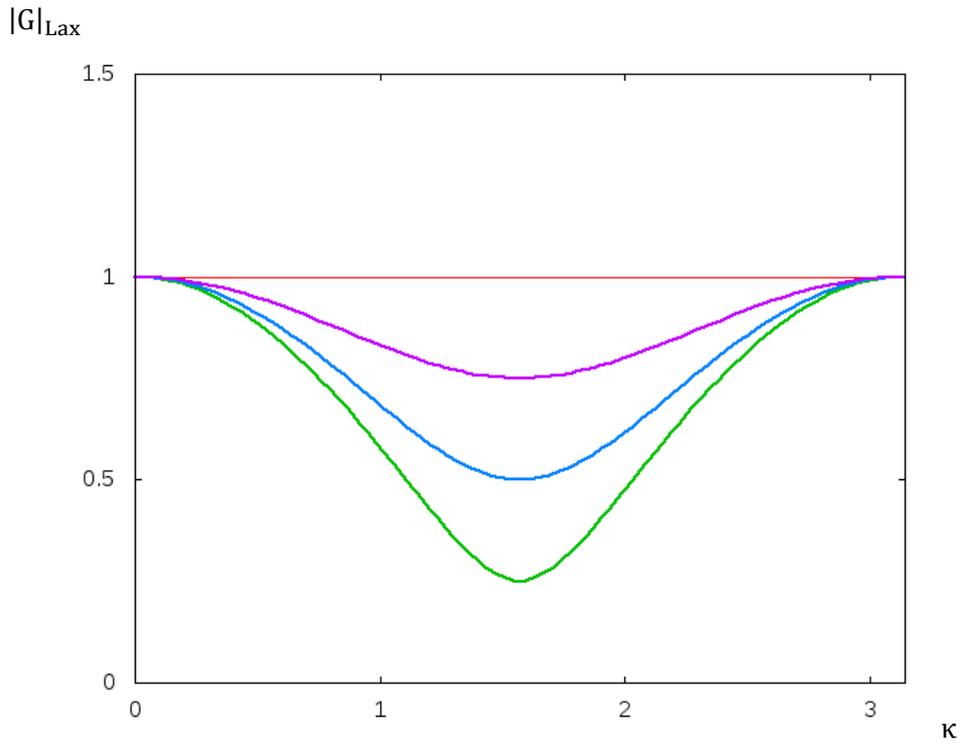


図 4 - 4 Lax 法で求めた数値解の相対位相誤差 $\varphi_{\text{Lax}}/\varphi_{\text{exact}}$ と κ との関係

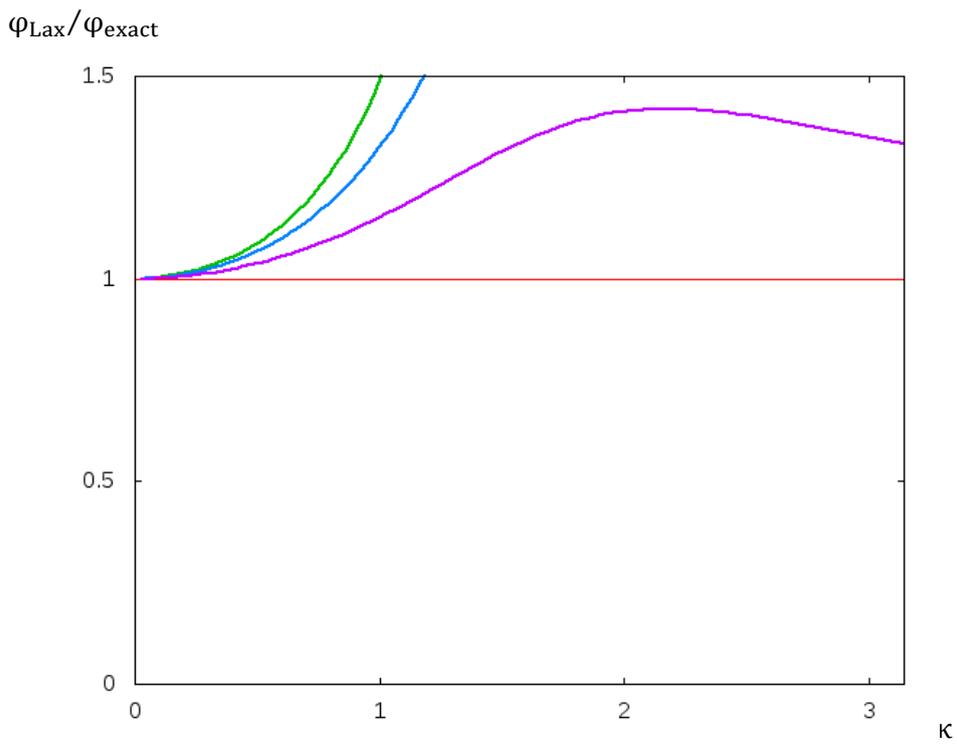


図 4-5 風上差分法で求めた数値解の増幅率 $|G|_{\text{風上}}$ と κ との関係 (緑線は紫線と重なっている。)

$|G|_{\text{風上}}$

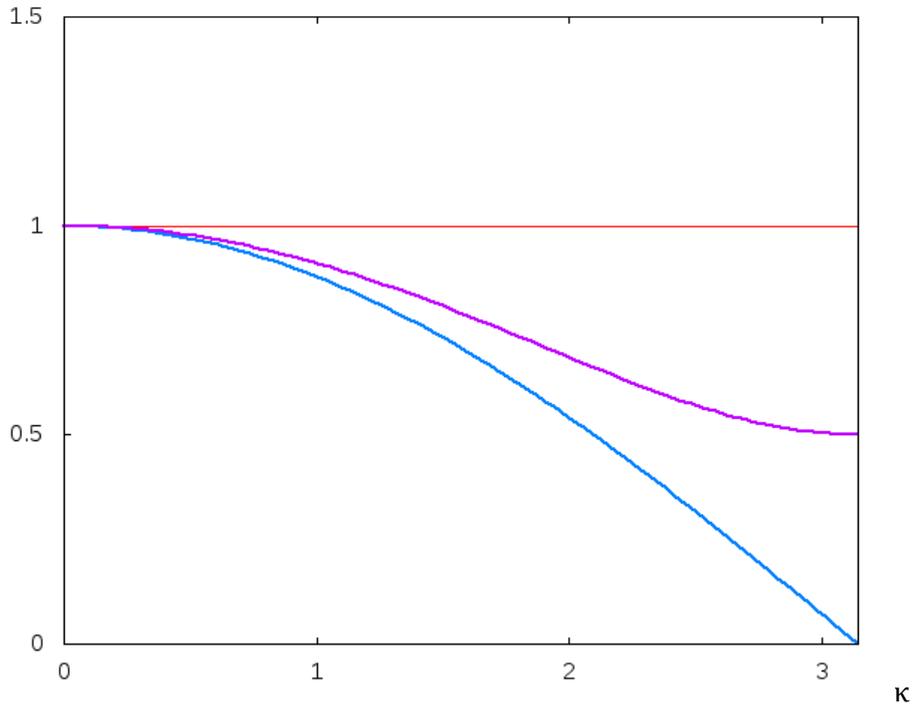


図 4-6 風上差分法で求めた数値解の相対位相誤差 $\varphi_{\text{風上}}/\varphi_{\text{exact}}$ と κ との関係

$\varphi_{\text{風上}}/\varphi_{\text{exact}}$

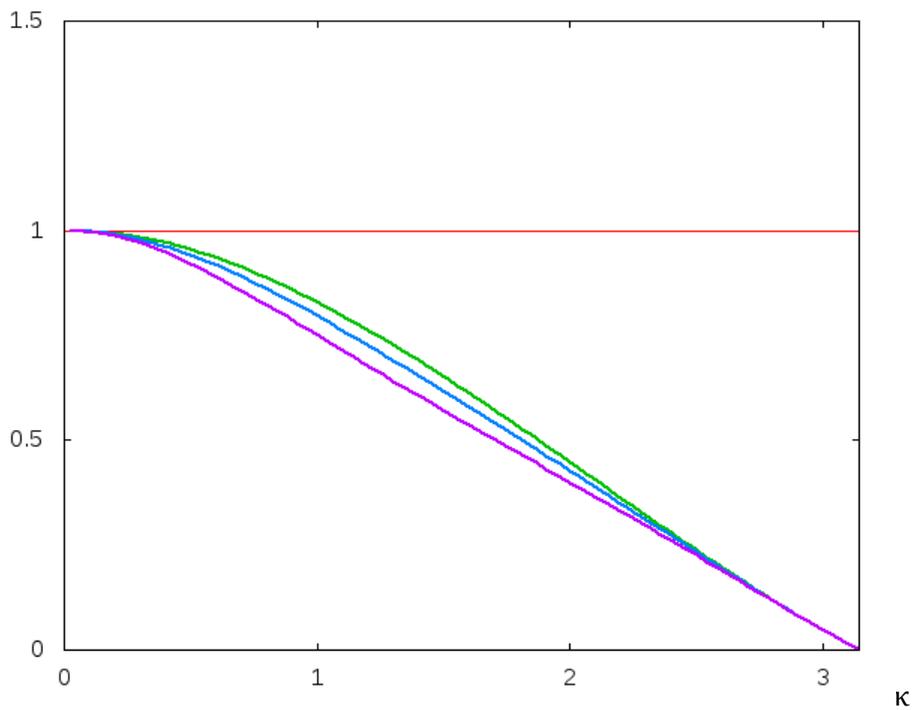


図 4-7 二次精度の風上差分法で求めた数値解の増幅率 $|G|_{\text{風上2}}$ と κ との関係

$|G|_{\text{風上2}}$

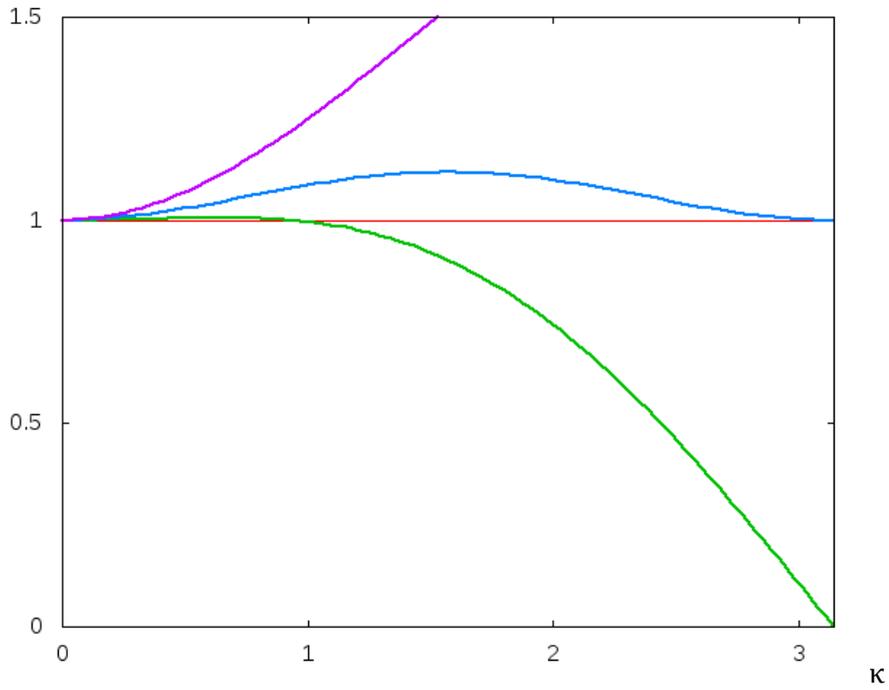


図 4-8 二次精度の風上差分法で求めた数値解の相対位相誤差 $\varphi_{\text{風上2}}/\varphi_{\text{exact}}$ と κ との関係

$\varphi_{\text{風上2}}/\varphi_{\text{exact}}$

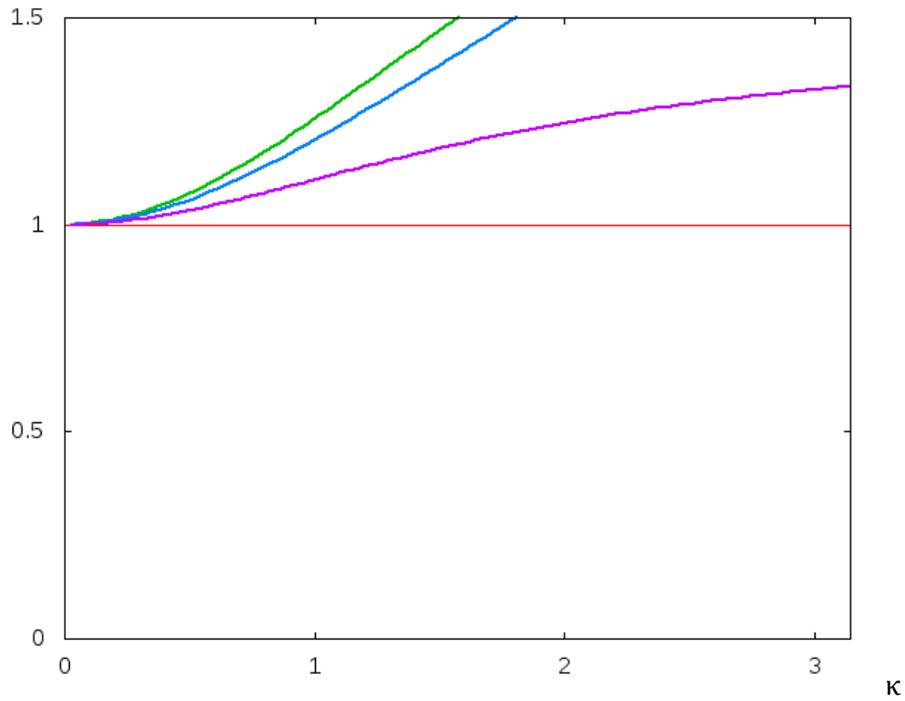


図 4-9 三次精度の風上差分法で求めた数値解の増幅率 $|G|_{\text{風上3}}$ と κ との関係

$|G|_{\text{風上3}}$

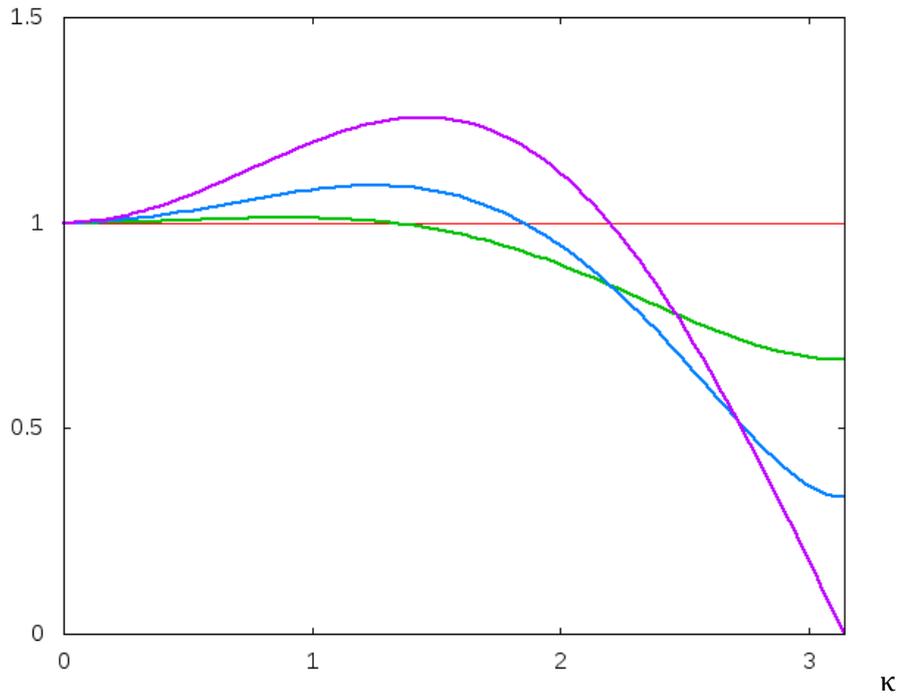
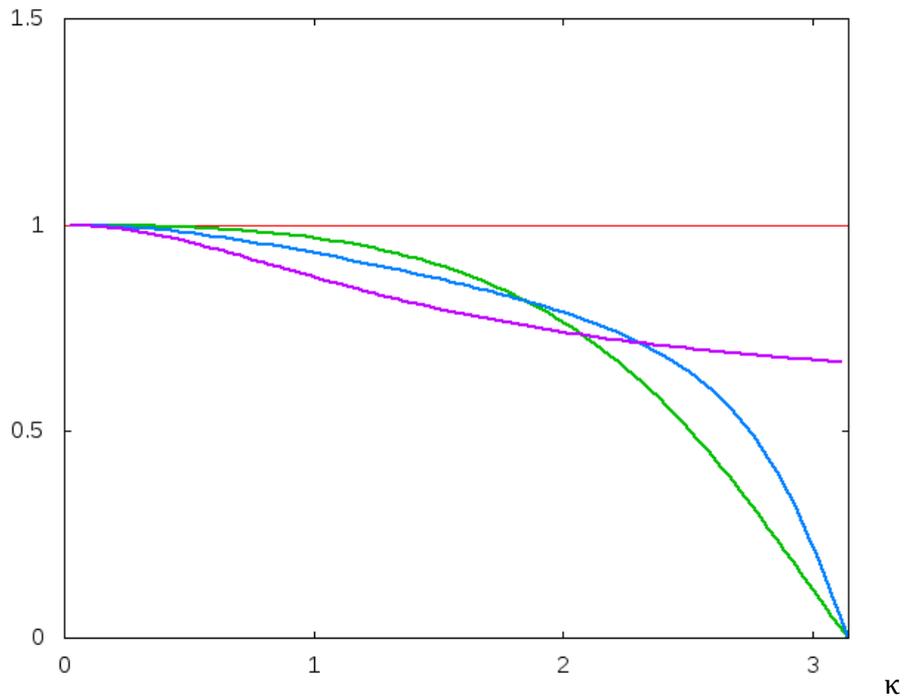


図 4-10 三次精度の風上差分法で求めた数値解の相対位相誤差 $\varphi_{\text{風上3}}/\varphi_{\text{exact}}$ と κ との関係

$\varphi_{\text{風上3}}/\varphi_{\text{exact}}$



まず、FTCS 法では、 $|G|_{\text{FTCS}} \geq 1$ となっており、解が発散してしまうので、不安定な数値解となっている。

Lax 法では、FTCS 法と比べ、 $|G|_{\text{Lax}} \leq 1$ となっており、数値解は発散せず安定となる。しかし $\Phi_{\text{Lax}}/\varphi_{\text{exact}}$ は v が小さくなるにつれて大きくなるため厳密解からのずれが大きくなる。

次に、風上差分法について考える。

一次精度では $|G|_{\text{風上}} \leq 1$ である。高周波領域 (κ が大きい領域) では $\varphi_{\text{風上}}/\varphi_{\text{exact}}$ が小さくなり、近似精度が悪くなるが、低周波領域では 1 に近く、よく近似されている。

二次精度では、 v が 0.75 や 0.5 と大きいときに $|G|_{\text{風上}_2} \geq 1$ となり、不安定となる。0.25 と小さい時は $\kappa=1.5$ 付近で $|G|_{\text{風上}_2}$ が 1 に近くなり安定するが、このとき $\varphi_{\text{風上}_2}/\varphi_{\text{exact}}$ が 1 より大きくなってしまうので、不安定となる。

三次精度でも、高周波領域を除くと $|G|_{\text{風上}_3} \geq 1$ となっており、不安定である。高周波領域でも、 $\varphi_{\text{風上}_3}/\varphi_{\text{exact}}$ が急激に減少し、結果的に不安定となる。

以上から、風上差分法においては、精度を上げるとその数値解は不安定になる。

一次精度の場合、二点間を直線で近似することから数値的な振動が発生しないが、二次や三次の場合はそれが発生してしまう。そのため、安定性の変化が起ると考えられる。

よって、ある時間の物理量 u を決める際に多くの過去（風上）の情報を用いると、精度はよくなるものの、 u の分布に数値的な振動が影響してくることでより不安定になると考えられる。

5. まとめ

本研究では、流体方程式の基礎となる線形移流方程式に対する各種数値解法の基本的性質について比較研究を行った。さらに、高次精度の差分法も含む様々な数値解法に対し von Neumann の安定性解析を行い、その結果から、数値解法の精度と安定性に関する議論を行った。精度の上昇と共に安定性を欠くという結論に至ったが、実際の数値シミュレーションにおいては精度は非常に重要であり、ここから安定性をどう高めるかが問題となってくる。今後の展望として、その方法の研究を進めることがあげられる。

参考文献

藤井孝藏 著 流体力学の数値計算法 東京大学出版会

謝辞

卒業研究、本論文の執筆にあたり、ご指導していただいた皆様、支えていただいた皆様に心から感謝いたします。

杉立先生には、卒業論文についてのみならず学生生活においても多大な迷惑と心配をおかけしたにもかかわらず、親身になって接していただきました。

三好先生には、卒業論文の作成において全般的に指導していただき、身勝手な自分に対して多方面からケアをしていただきました。

志垣先生、本間先生には、ラボエクササイズにおいて機器の使用手法や実験手法、ミーティングではその内容や発表方法など、の指導をしていただきました。

院生の先輩方には、ラボエクササイズなどででた疑問質問に丁寧に答えていただくのみならず、昼食やコーヒープレイクに誘ってくださるなど、様々な方面から支援をしていただきました。

四年生の皆様には、共にラボエクササイズを進行させるにあたり大人気ない自分にも惜しめない協力をしていただきました。

自分の両親と弟、妹には、苦しい時に精神的に助けてもらいました。

本当にありがとうございました。