

非粘性バーガーズ方程式に対する
MUSCL 法の評価

広島大学理学部物理科学科
クォーク物理学研究室

B104301

宮崎 安史

指導教官 : 杉立徹 教授

主査 : 三好隆博 助教

副査 : 佐々木茂美 教授

概要

初期宇宙や高エネルギー原子核衝突実験によって実現すると予想されるクォーク・グルーオン・プラズマのダイナミクスは、粘性率が極めて小さい相対論的流体力学モデルによってよく記述されると考えられている。相対論的流体力学方程式は高度に非線形な偏微分方程式であるため、解析解を得ることは一般に困難である。それ故、数値シミュレーションによる解析が不可欠な研究手段となる。しかし、相対論的流体力学方程式に対する高精度かつ安定な数値解法は未だ発展途上にある。

そこで本研究では、流体力学方程式における非線形性と保存性を抽出し、簡約化した非粘性バーガーズ方程式に対する数値解法の特徴について基礎研究を行った、予備的数値実験から、衝撃波解を正しく再現するためには、保存形式による風上方の数値解放が必須であることが分かった。続いて、標準的な風上型数値解法である Roe 法を MUSCL 法(Monotone Upstream-centered Schemes for Conservation Laws)により高次精度化した。MUSCL 法に対して様々な流束制限関数を適用し、精度の比較評価を行った。

目次

1. 序論

| | |
|-----------------------|----|
| 1-1. バーガーズ方程式..... | 5p |
| 1-1-2. 基本的な概念..... | 5p |
| 1-1-3. 衝撃波の速度..... | 6p |
| 1-1-4. 衝撃波の形成時間..... | 8p |
| 1-2. 数値解法の必要性和課題..... | 8p |
| 1-3. 研究目的..... | 8p |

2. 非粘性バーガーズ方程式に対する差分法

| | |
|-------------------------------|-----|
| 2-1. 差分法..... | 9p |
| 2-2. FTCS スキーム..... | 10p |
| 2-2-1. 境界条件..... | 10p |
| 2-3. Lax-Friedrichs スキーム..... | 11p |
| 2-4. 一次精度風上差分..... | 11p |

3. 差分法の数値計算結果および考察

| | |
|-------------------------------|-----|
| 3-1. FTCS スキーム..... | 13p |
| 3-2. Lax-Friedrichs スキーム..... | 13p |
| 3-3. 一次精度風上差分スキーム..... | 15p |
| 3-4. 保存性..... | 17p |

4. 有限体積法

| | |
|-----------------------------------|-----|
| 4-1. 基本的な概念..... | 19p |
| 4-4-1. Roe スキームと一次精度風上差分スキーム..... | 20p |

5. 有限体積法の数値計算結果および考察

| | |
|---------------|-----|
| 5-1. 衝撃波..... | 22p |
| 5-2. 膨張波..... | 25p |

5-3. $u(x, t = 0.3) = \frac{1}{2} + \sin(2\pi x)$28p

6. MUSCL 法

6-1. 基本的な概念.....30p
6-1-1. TVD 条件.....30p
6-1-2. 線形補間法.....30p
6-2. 計算方法.....30p
6-3. 流束制限関数.....33p

7. MUSCL 法を用いた高精度化

7-1. 衝撃波.....34p
7-2. $u(x, t = 0.3) = \frac{1}{2} + \sin(2\pi x)$36p

8. 結論.....44p

参考文献

謝辞

1. 序論

1-1. バーガーズ方程式

初期宇宙や高エネルギー原子核衝突実験によって実現すると予想されるクォーク・グルーオン・プラズマのダイナミクスは、粘性率が極めて小さい相対論的流体力学モデルによってよく記述されると考えられている。QGPの時間発展的な性質を理解するために、粘性がない流体の方程式が非粘性バーガーズ方程式である。

バーガーズ方程式とはどのようなものか。流体運動を支配する方程式にナビエ・ストークスの方程式があるが、それを簡単にしたものにバーガーズ方程式である。1次元のナビエ・ストークスの方程式は

$$\frac{du}{dt} + u \frac{du}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{d^2u}{dx^2}$$

($\rho (> 0)$: 流体の密度、 $u (> 0)$: 流体の速度、 $p (> 0)$: 圧力、 $\nu (> 0)$: 粘性係数)

と記述できる。1次元のナビエ・ストークスの方程式の圧力項を省略したものがバーガーズ方程式である。以下に記述する。

$$\frac{du}{dt} + u \frac{du}{dx} = \nu \frac{d^2u}{dx^2}$$

また、このバーガーズ方程式の粘性係数を無視したものを非粘性バーガーズ方程式という。

$$\frac{du}{dt} + u \frac{du}{dx} = 0 \tag{1.1}$$

また、非粘性バーガーズ方程式は保存形式と非保存形式で書くことができる。保存形式の場合、

$$\frac{du}{dt} + \frac{d}{dx} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0 \tag{1.2}$$

と表すことができる。

非保存形式の場合、(1.1)のように表すことができる。

保存形式と非保存形式の差異については以降に記述することにする。

1-1-2. 基本的な概念

バーガーズ方程式は、 u の値が速度 u で移流する。つまり、図 1-1 の \sin

関数の波が時間を経ると図 1-2 のように変化する。

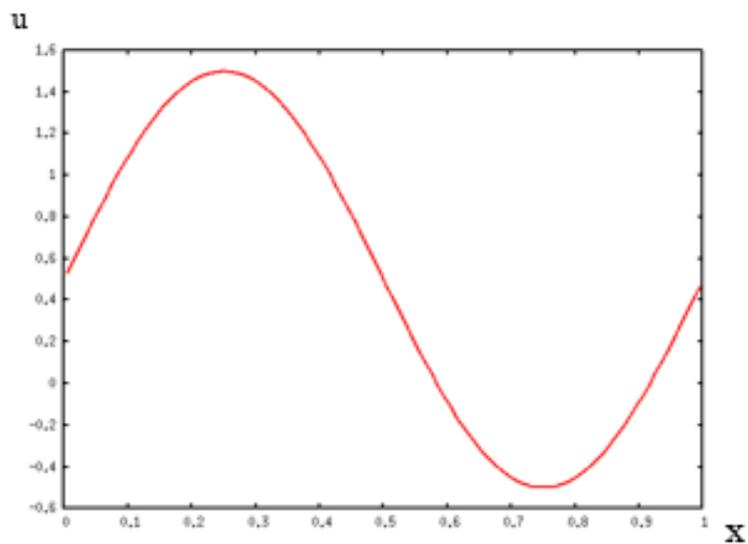


図 1-1 sin 関数の波

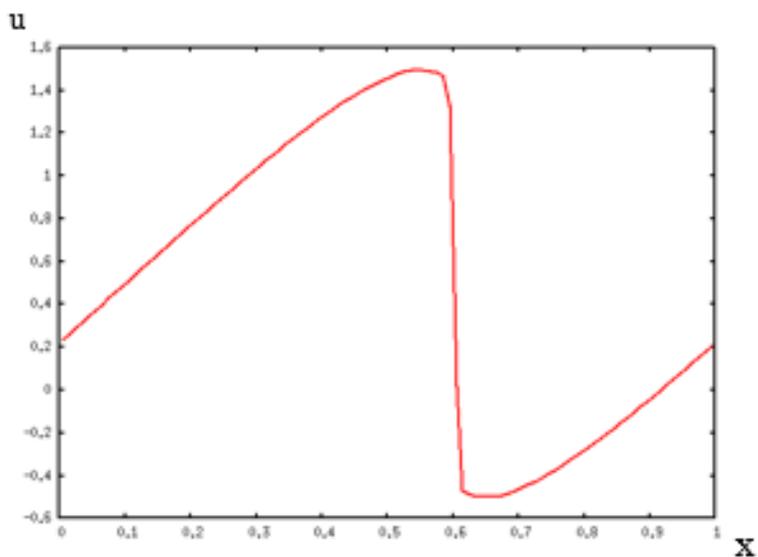


図 1-2 図 1-1 の波に衝撃波ができたとき

1-1-3. 衝撃波の速度

一般のスカラーの保存則の問題は

$$\frac{du}{dt} + \frac{d}{dx} f(u) = 0 \tag{1.3}$$

と表すことができる。ここで u は密度と定義し、 $f(u)$ は流束関数と呼ばれる。
式(1.3)は、微分形であり、 (x, t) の積分形は、

$$\oint (u dx - f dt) = 0 \quad (1.4)$$

である。特性線は、

$$\lambda = f'(u) = \frac{df}{du} \quad (1.5)$$

である。特性線とは、ある速度で移動する線のことである。衝撃波の速度は、

$$S = \frac{f_{up} - f_{down}}{u_{up} - u_{down}} \quad (1.6)$$

(f_{up}, f_{down} : 流速関数, u_{up}, u_{down} : 密度, $up, down$: 定数($up > down$))
である。

ここで簡単な初期値問題を考える。

$$u = 1 (x < 0), \quad u = 0 (x > 0) \quad (1.7)$$

するとこれから、図 1-3 のようになる。式(1.6)より、

$$S = \frac{f_{up} - f_{down}}{u_{up} - u_{down}} = \frac{\frac{1}{2}(u_R^2 - u_L^2)}{u_R - u_L} = \frac{1}{2}(u_R + u_L) \quad (1.8)$$

u_R, u_L : 密度, R, L : 定数($R > L$)

となる。つまり、この衝撃波の速度は $\frac{1}{2}$ である。

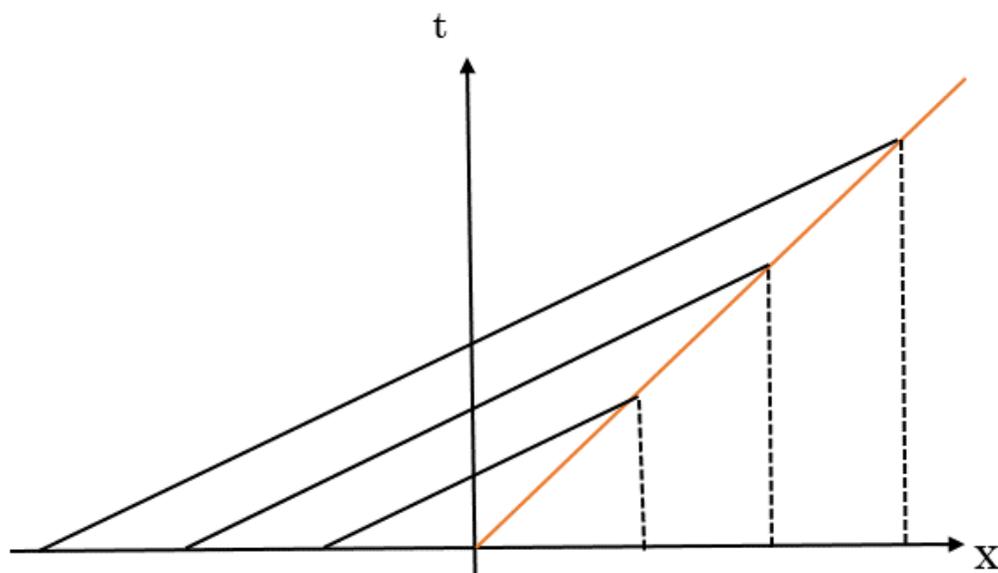


図 1-3 衝撃波の速度

黒線 : $u=1$ の特性線、黒点線 : $u=0$ の特性線、赤色 : 衝撃波の特性線

1-1-4. 衝撃波の形成時間

衝撃波が形成される時間は、

$$t = -\frac{1}{\min(u')} \quad (1.9)$$

で求めることができる。

ここで、初期値が $u = \frac{1}{2}\sin(2\pi x)$ の場合を考える。

$$u' = -2\pi \cos(2\pi x) \quad (1.10)$$

となり、衝撃波の形成時間は、

$$t = \frac{1}{2\pi} \quad (1.11)$$

となる。

1-2. 数値解法の必要性と課題

相対論的流体力学方程式は高度に非線形な偏微分方程式であるため、解析解を得ることは一般に困難である。それ故、数値シミュレーションによる解析が不可欠な研究手段となる。しかし、相対論的流体力学方程式に対する高精度かつ安定な数値解法は未だ発展途上にあり、相対論的流体力学方程式に対する高精度かつ安定な数値解法を発見することが課題である。

1-3. 研究目的

本研究では、第一に相対論的流体力学方程式の非線形性と保存性を抽出した非粘性バーガーズ方程式に対する数値解法の特長について理解するための基礎的研究を行う。

続いて、標準的な風上型数値解法である Roe 法を MUSCL 法 (Monotone Upstream-centered Schemes for Conservation Laws) により高次精度化を行う。そこで MUSCL 法に対して様々な流束制限関数を適用し、精度の比較評価を行い、その精度比較の結果から衝撃波間問題で必要となる流束制限関数を導く。

2. 非粘性バーガーズ方程式に対する差分法

2-1. 差分法

微分方程式の数値解析法の1つである。微分方程式の微分を差分に置き換えてできる差分方程式を解くことで、元となった微分方程式の近似解を得る方法である。以下に差分方程式の根拠を示すことにする。

空間1次元で時間的に変化する物理量 u を考え、その厳密解を $u(t, x)$ とすると有限体積法によって得られる値 $u(t, x)$ は、厳密解の離散点 (n, i) への写像に対する近似解 $u(n\Delta t, i\Delta x)$ である。ここで、差分を体系的に得るためにテイラー展開を用いる。例として、 Δx が十分小さいとする。このときの位置 $j\Delta x$ における物理量 u の値を u_j と表すとき、空間的な位置 $(i+1)\Delta x$ における u の値は u_{i+1} は、テイラー展開を用いて、

$$u_{i+1} = u_i + \Delta x \frac{du}{dt} + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \frac{d^2u}{dx^2} + \dots \quad (2.1)$$

と、近似することができる。

同様にして、 u_{i-1} は

$$u_{i-1} = u_i - \Delta x \frac{du}{dt} + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \frac{d^2u}{dx^2} + \dots \quad (2.2)$$

と、近似することができる。

式(2.1)より、1階微分に関する全身差分方程式を得ることができる。

$$\frac{du}{dx} = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (2.3)$$

また、(2.2)より、1階微分に関する後退差分方程式

$$\frac{du}{dx} = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (2.4)$$

を得ることができる。

式(2.1)から式(2.2)を引くと、1階微分に関する2次精度中心差分式

$$\frac{du}{dx} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x) \quad (2.5)$$

を得ることができる。

また、式(2.1)に式(2.2)を加えると、2階微分の差分式

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x^2) \quad (2.6)$$

を得ることができる。

このようにして、テイラー展開から差分方程式を得ることができた。

2-2. FTCS スキーム

FTCS スキームの非保存形式は、式(1.1)の時間微分と空間微分を、

$$u_t = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \quad (2.7)$$

$$u_x = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} \quad (2.8)$$

で置き換えたものである。ここでは、 n は時間刻み、 i は x 方向の空間位置を示す。

つまり、

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + u_i^n \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (2.9)$$

となる。

式(2.9)を変形して、 u_i^{n+1} について解くと、

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} u_i^n (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \quad (2.10)$$

と変形できる。

同様に FTCS スキームの保存形式は、式(1.2)の時間微分と空間微分を、非保存形式と同様に置き換えたものである。つまり、

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\frac{(u_{i+1}^n)^2 - (u_{i-1}^n)^2}{2} \right) \quad (2.11)$$

となる。

ここで、 $\frac{\Delta t}{2\Delta x} u_i^n$ が 1 より大きい場合は、そのスキームは不安定になる。このこ

とは CFL 条件と呼ばれている。この条件は、非線形方程式、線形方程式、両方とも満たさなければならない条件である。

2-2-1. 境界条件

境界部分の計算は上記で述べた方法では求めることはできない。そこで、境界部分の計算については、以下の観点を用いて求めることにする。 u_1^n 、 u_i^n が求まっているとした際に u_0^n 、 u_{i+1}^n を求める場合に、ノイマン条件を使うと

$$u_0^n = u_1^n, u_i^n = u_{i+1}^n \quad (2.12)$$

として求めることができる。

また、周期条件を使った場合、

$$u_0^n = u_i^n, u_{i+1}^n = u_1^n \quad (2.13)$$

として求めることができる。

2-3. Lax-Friedrichs スキーム

Lax-Friedrichs スキームの非保存形式は、式(1.1)の時間微分と空間微分を

$$u_t = \frac{u_i^{n+1} - \left(\frac{u_{i+1}^n + u_{i-1}^n}{2}\right)}{\Delta t} \quad (2.14)$$

$$u_x = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} \quad (2.15)$$

と置き換えることができる。これを、 u_i^{n+1} について解くと

$$u_i^{n+1} = \frac{u_{i+1}^n + u_{i-1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} u_i^n (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \quad (2.16)$$

となる。式(2.16)をさらに変形させると

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} u_i^n (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)}{2} \quad (2.17)$$

と変形できる。

同様に Lax-Friedrichs スキームの保存形式は、式(1.2)を非保存形式と同様に時間微分と空間微分について変形させる。つまり、

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\frac{(u_{i+1}^n)^2}{2} - \frac{(u_{i-1}^n)^2}{2} \right) + \frac{(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)}{2} \quad (2.18)$$

と置き換えることができる。

2-4. 一次精度風上差分スキーム

一次精度風上差分スキームの非保存形式は、式(1.1)の時間微分と空間微分を、

$$u_t = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \quad (2.19)$$

$$u_x = \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} \quad (2.20)$$

と置き換えることができる。これを u_i^{n+1} について解くと、

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} u_i^n (u_i^n - u_{i-1}^n) \quad (2.21)$$

となる。

同様に一次精度風上差分スキームの保存形式は、式(1.2)を非保存形式と同様に時間微分と空間微分について変形させる。つまり、

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{(u_i^n)^2}{2} - \frac{(u_{i-1}^n)^2}{2} \right) \quad (2.22)$$

と置き換えることができる。

3. 差分法の数値計算結果および考察

3-1. FTCS スキーム

初期条件を次のように設定する。 $(-1 < x < -0.5$ のとき、 $u = 1.5$ $-0.5 < x < 1$ のとき、 $u = 0.5$) 境界条件は、ノイマン条件とした。

図 3-1 の数値結果より、途中で計算が破綻していることが分かる。このことから、FTCS スキームは、不安定なスキームであることが分かる。

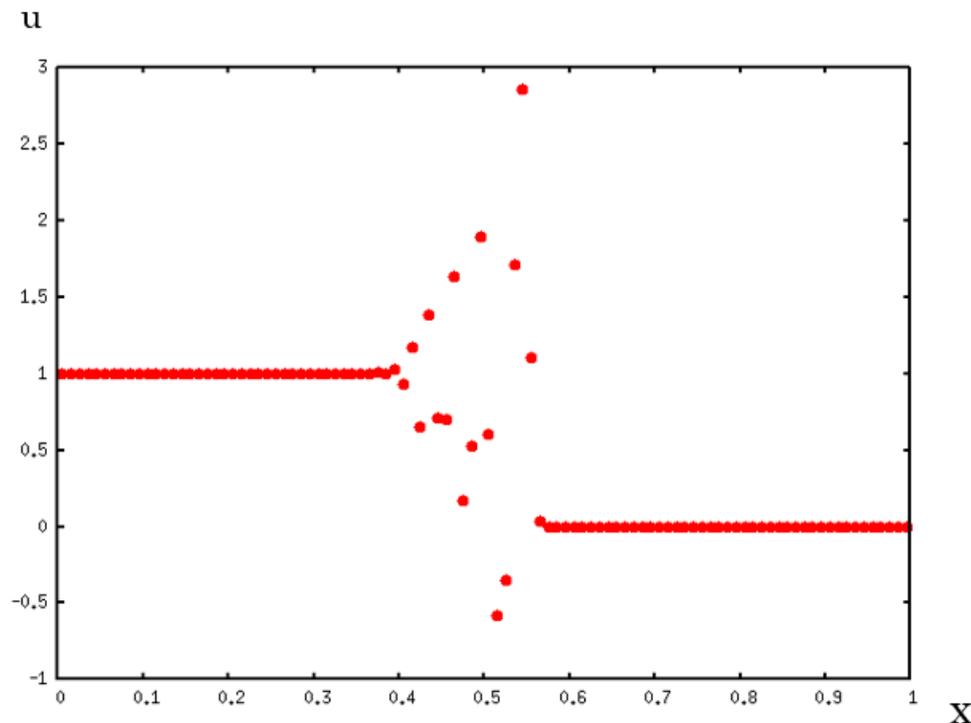


図 3-1 FTCS スキームで求めた数値結果

3-2. Lax-Friedrichs スキーム

図 3-2 で非保存形式と保存形式を比較すると非保存形式の数値結果がガタガタであることが分かる。もう少し比較をするために、衝撃波の変化が一番顕著な $t=1.0$ の値でそれぞれ厳密解と比較することにする。

図 3-3 と図 3-4 を比較してみると、衝撃波の発生する位置は変わらなかった。

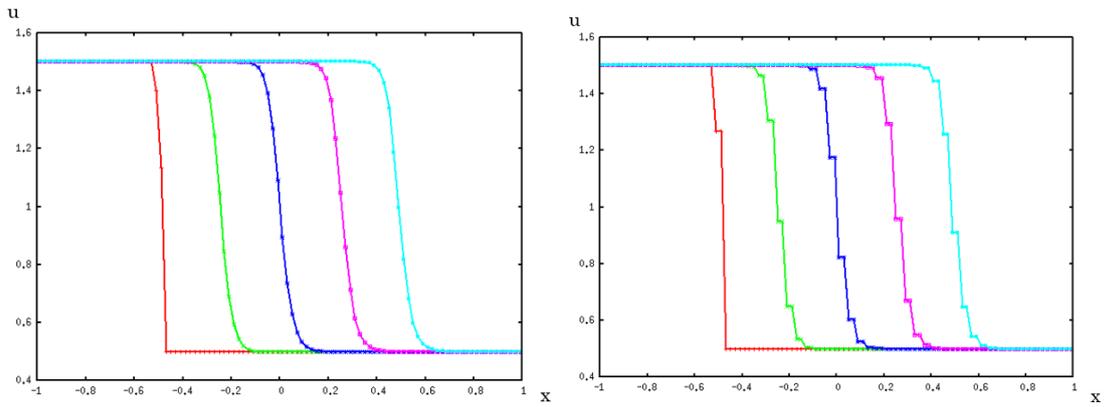


図 3-2 Lax-Friedrichs スキームで求めた数值結果

右図：保存形式、左図：非保存形式 赤色： $t = 0.0$ 、緑色： $t = 0.25$ 、
青色： $t = 0.50$ 、紫色： $t = 0.75$ 、水色： $t = 1.0$

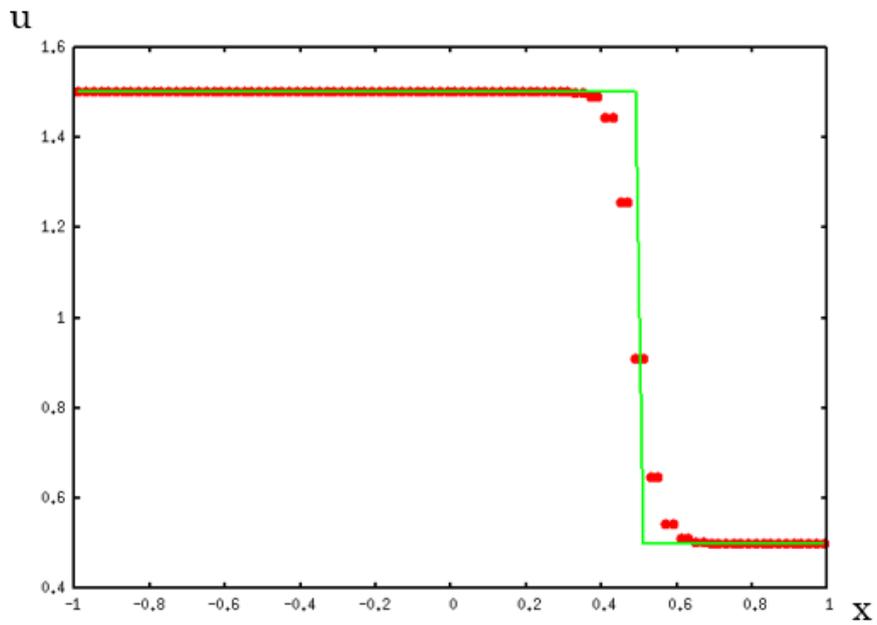


図 3-3 厳密解と保存形式の比較(Lax-Friedrichs スキーム)

赤色：数值結果、緑色：厳密解

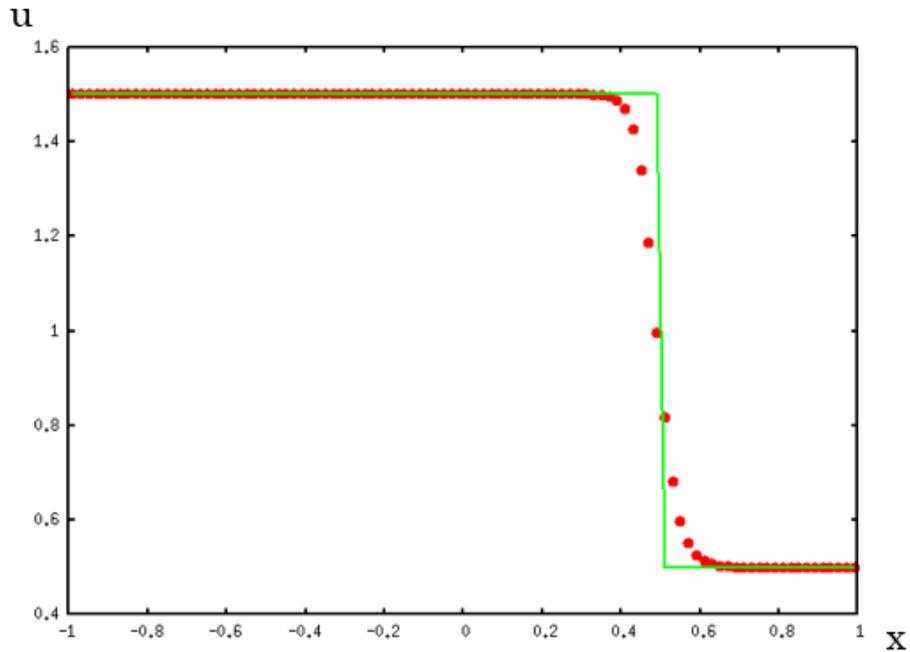


図 3-4 厳密解と非保存形式の比較(Lax-Friedrichs スキーム)
赤色：数値結果、緑色：厳密解

3-3. 一次精度風上差分スキーム

図 3-5 で保存形式と非保存形式を比較すると、 t の増加率に対する、 x の増加率が保存形式と非保存形式で違うことが分かる。

保存形式と非保存形式の衝撃波のできる位置をそれぞれ厳密解と比較すると、図 3-6 と図 3-7 より保存形式が厳密解の軌跡に近いことが分かる。

さらに、図 3-3 と図 3-6 を比較することで、厳密解の軌跡を表現しているのは風上差分であるということが分かる。

よって、一次精度風上差分スキームは Lax-Friedrichs スキームより精度が良いことが分かる。よって、Lax-Friedrichs スキームが保存形式と非保存形式の差異があまりなかった点は、精度が悪いからという結論に至った

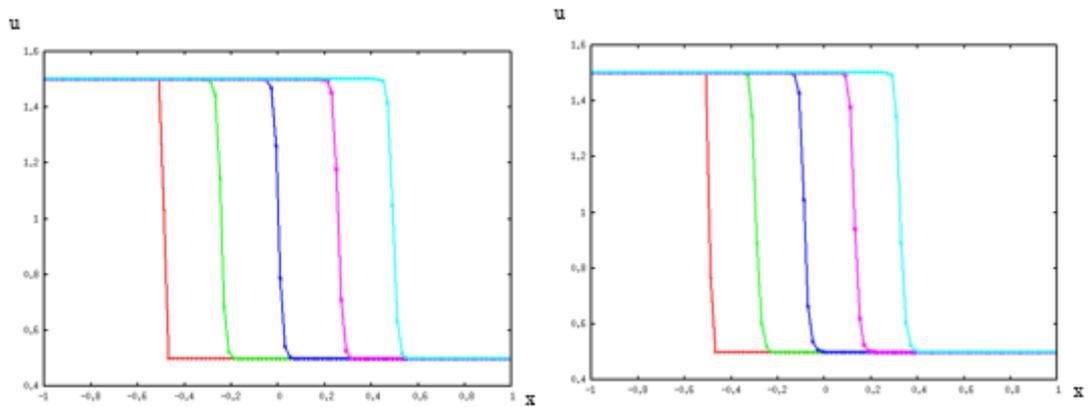


図 3-5 一次精度風上差分スキームで求めた数値計算結果
 右図：保存形式、左図：非保存形式 赤色： $t = 0.0$ 、緑色： $t = 0.25$ 、
 青色： $t = 0.50$ 、紫色： $t = 0.75$ 、水色： $t = 1.0$

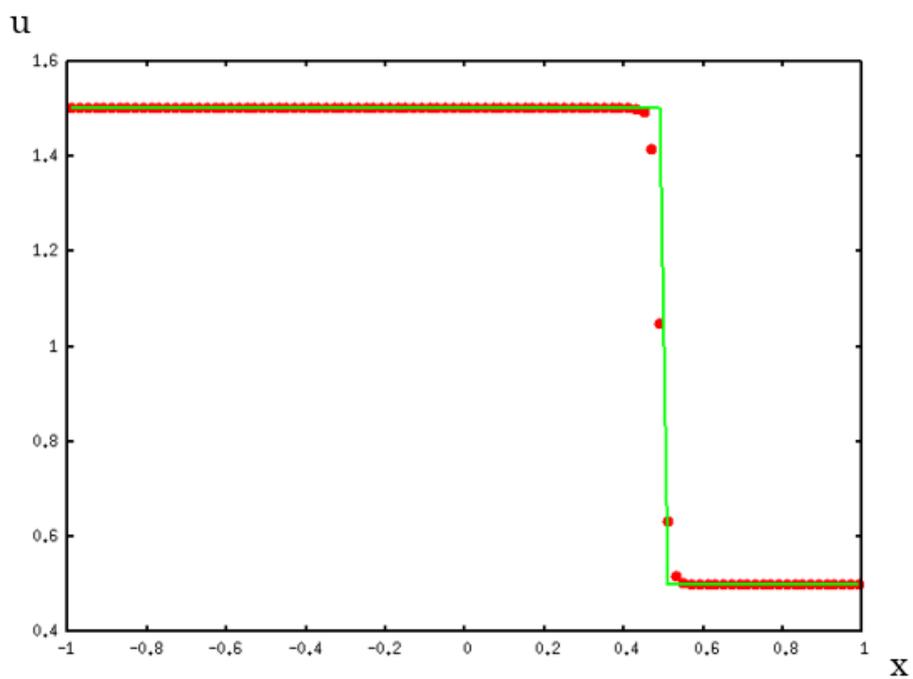


図 3-6 厳密解と保存形式の比較(一次精度風上差分スキーム)
 赤色：数値計算結果、緑色：厳密解

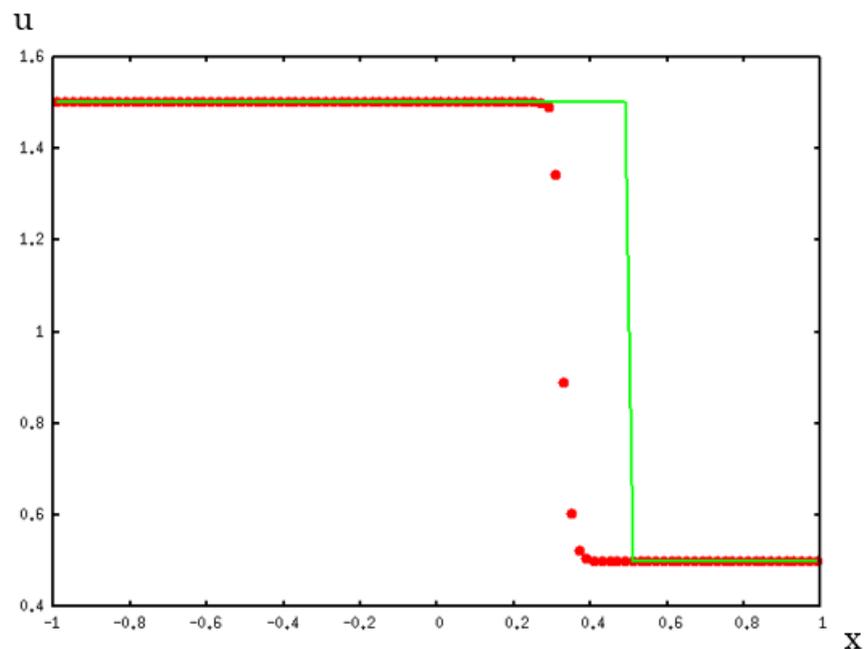


図 3-7 厳密解と非保存形式の比較(一次精度風上差分スキーム)
赤色：数値計算結果、緑色：厳密解

3-4. 保存性

一次精度風上差分スキームを用いて、周期境界条件で保存形式と非保存形式の差異を見ていくことにする。

バーガーズ方程式の厳密解が

$$S = \int_{x_{min}}^{x_{max}} u \, dx = const \quad (3.1)$$

を満足する。しかし、図 3-8 で計算された非保存形式は S が変化している。この結果から非保存形式と保存形式とは、差異があることが分かる。つまり、保存性の式を満たしている保存形式を使わなければならないことが分かった。

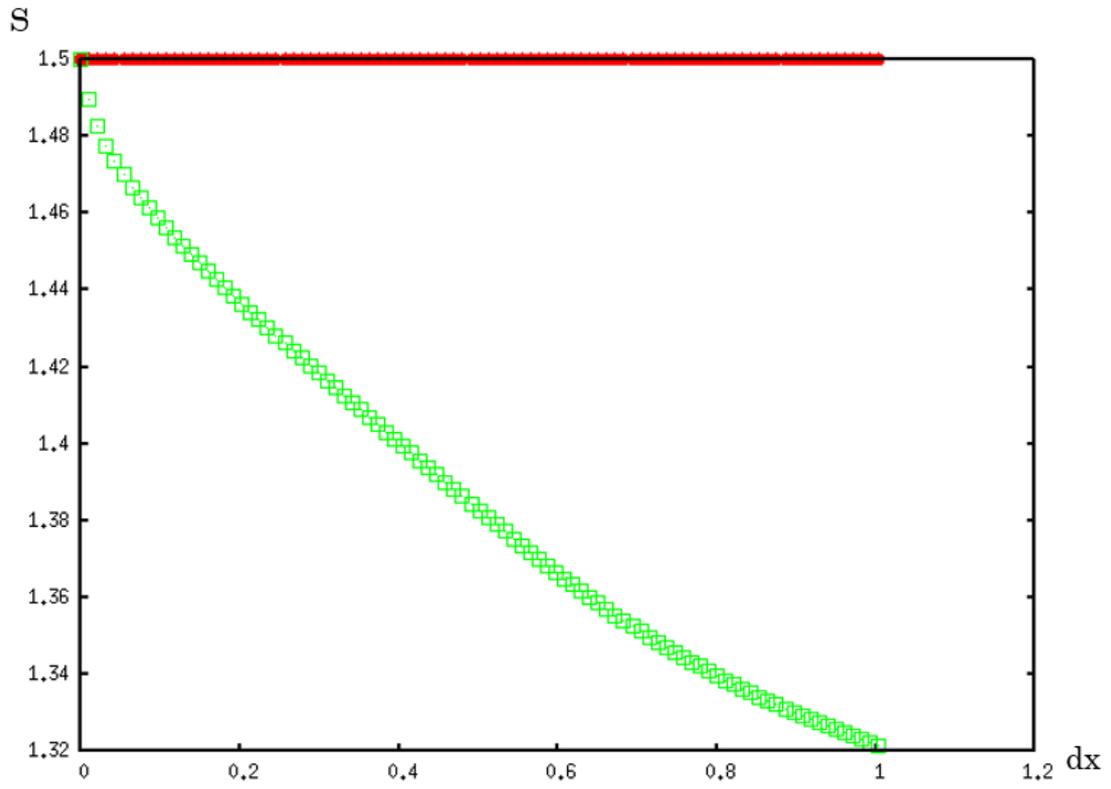


図 3-8 保存性の比較
赤色：保存形式、緑色：非保存形式

4. 有限体積法

4-1. 基本的な概念

非粘性バーガーズ方程式

$$\frac{du}{dt} + u \frac{du}{dx} = 0 \quad (4.1)$$

の形を変形すると、

$$\frac{du}{dt} + \frac{df}{dx} = 0 \quad (4.2)$$

と書き直せる。ここで、

$$f = uu_x \quad (4.3)$$

である。

式(4.2)を図 4-1 の四角で囲った領域($x_{i-1} < x < x_{i+1}$)にける保存量 u の時間変化を求める。

方程式(4.2)を $x = x_{i-1/2}$ から $x = x_{i+1/2}$ まで積分すると

$$\frac{d}{dt} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u dx + f(x_{i+1/2}) - f(x_{i-1/2}) = 0 \quad (4.4)$$

したがって、保存量 u の積分量

$$u_i^n = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t_n) dx \quad (4.5)$$

の時間変化は、この時間内に左右の境界を通過して出入りする流束の差に等しいため、

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{f}_{i+1/2}^n - \tilde{f}_{i-1/2}^n) \quad (4.6)$$

を求めることができる。

\tilde{f} は数値流束と呼ばれている。各種差分スキームの差分式から数値流束を求めることができる。以下に各種差分スキームについて求めることにする。

・ FTCS スキーム

$$\tilde{f}_{i+1/2}^n = \frac{1}{2} (f_{i+1}^n + f_i^n) \quad (4.7)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{(u_{i+1}^n)^2}{2} + \frac{(u_i^n)^2}{2} \right) \quad (4.8)$$

• Lax-Friedrichs スキーム

$$\tilde{f}_{i+1/2}^n = \frac{1}{2}(f_{i+1}^n + f_i^n) - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x}(u_{i+1}^n - u_i^n) \quad (4.9)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{(u_{i+1}^n)^2}{2} + \frac{(u_i^n)^2}{2} \right) - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x}(u_{i+1}^n - u_i^n) \quad (4.10)$$

• Roe スキーム

$$\tilde{f}_{i+1/2}^n = \frac{1}{2}(f_{i+1}^n + f_i^n) - \frac{1}{2} \left| \frac{u_{i+1}^n + u_i^n}{2} \right| (u_{i+1}^n - u_i^n) \quad (4.11)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{(u_{i+1}^n)^2}{2} + \frac{(u_i^n)^2}{2} \right) - \frac{1}{2} \left| \frac{u_{i+1}^n + u_i^n}{2} \right| (u_{i+1}^n - u_i^n) \quad (4.12)$$

• 一次精度風上差分スキーム

$$\tilde{f}_{i+1/2}^n = \frac{1}{2}(f_{i+1}^n + f_i^n) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} |u_{i+1}^n| u_{i+1}^n - \frac{1}{2} |u_i^n| u_i^n \right) \quad (4.13)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{(u_{i+1}^n)^2}{2} + \frac{(u_i^n)^2}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} |u_{i+1}^n| u_{i+1}^n - \frac{1}{2} |u_i^n| u_i^n \right) \quad (4.14)$$

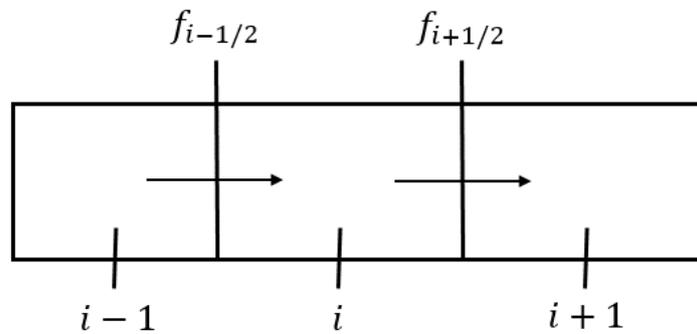


図 4-1 格子境界を通る流束について

4-2. Roe スキームと一次精度風上差分スキーム

一次精度風上差分スキームはセル中心の特性速度 u_i を利用してセル境界における数値流束の風上化を行っている。

一方、セル境界における特性速度 $u_{i+1/2}$ を用いて数値流束の風上化を行うこともできる。特に Roe スキームでは、 $u_{i+1/2}$ をセル境界における衝撃波速度によって近似される。

$$u_{i+1/2} = \frac{(f_{i+1} - f_i)}{(u_{i+1} - u_i)}$$

となる。なお、線形移流方程式においては特性速度が一定のため、一次精度風上差分スキームと Roe スキームは完全に一致する。

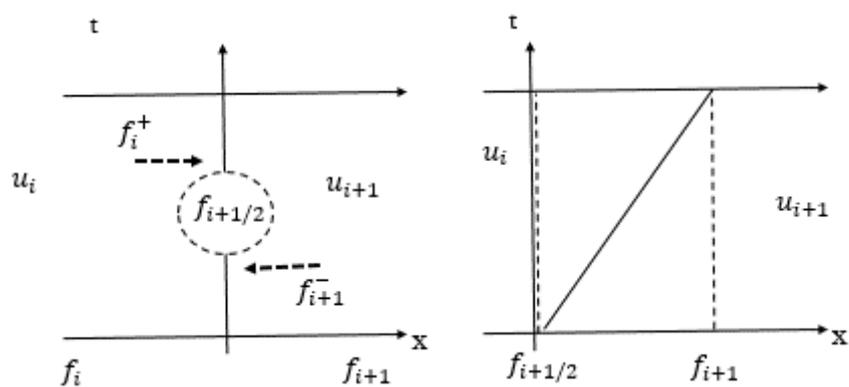


図 4-2 一次精度風上差分スキームと Roe スキーム
 左図：一次精度風上差分スキーム、右図：Roe スキーム

5. 数値流束を利用した数値計算結果および考察

ここでは、初期条件を以下のように統一する。領域範囲が
 $0.0 < x < 1.0, 0.0 < t < 1.0$ である。

$0.0 < x < 0.25$ のとき $u = 1.0$, $0.25 < x < 1.0$ のとき、 $u = 0.0$ とする。
境界条件はノイマン条件とする。

5-1. 衝撃波

FTCS スキームに関しては、先の式(4.8)を利用して、数値計算を行う。すると、式(2.11)と同じになることが分かった。よって、数値結果は、図 3-1 と同様である。

図 5-1 と図 5-2、図 5-3 の比較から、Lax-Friedrichs スキームは ROE スキーム、一次精度風上差分スキームより精度が低いことが分かる。

Roe スキームと一次精度風上差分の比較については、ほとんど同じ精度のように思える。そこで誤差から判断することにする。図 5-4 の誤差値からも分かるように Lax-Friedrichs スキームの誤差が Roe スキームと一次精度風上差分スキームより大きいことが分かる。Roe スキームと一次精度風上差分スキームに関しては、同じ値をとっている。

つまり、衝撃波の精度に関しては Roe スキームと一次精度風上差分スキームの差異が無く、Lax-Friedrichs スキームの精度は他 2 つより悪いことが分かった。

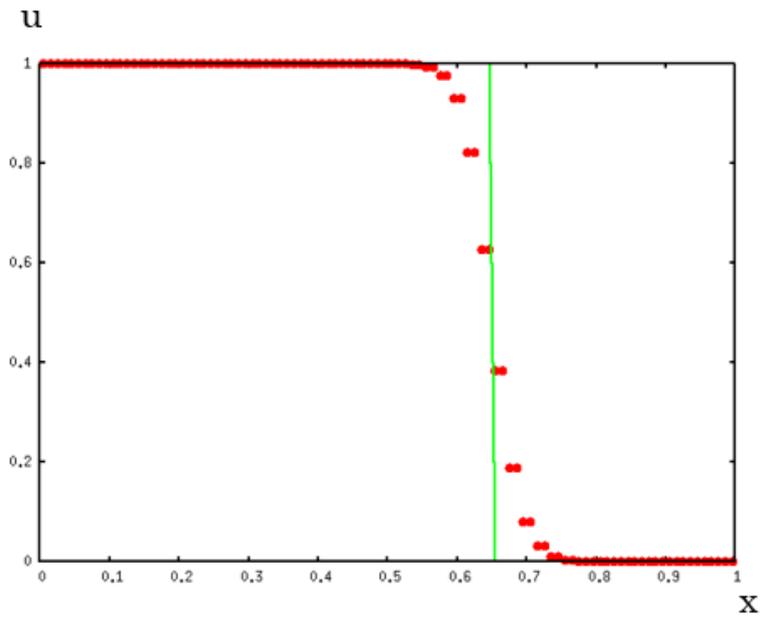


図 5-1 Lax-Friedrichs スキームと厳密解の比較($t=0.8$)
赤色：数値計算結果、緑色：厳密解

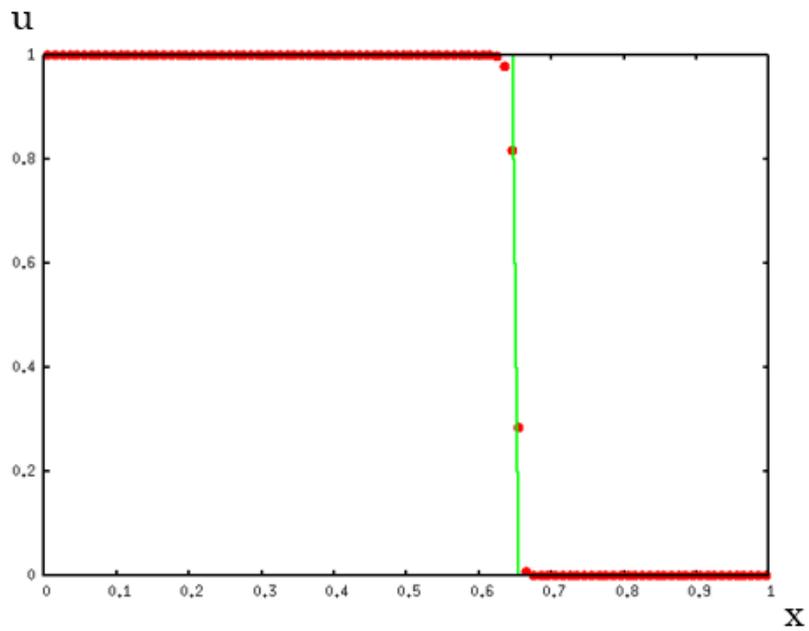


図 5-2 Roe スキームと厳密解の比較($t=0.8$)
赤色：数値計算結果、緑色：厳密解

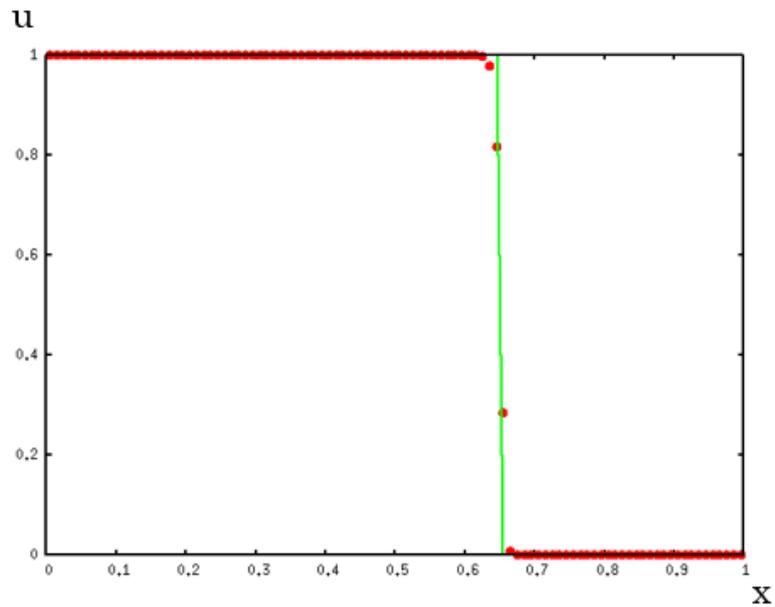


図 5-3 一次精度風上差分スキームと厳密解の比較($t=0.8$)
赤色：数値計算結果、緑色：厳密解

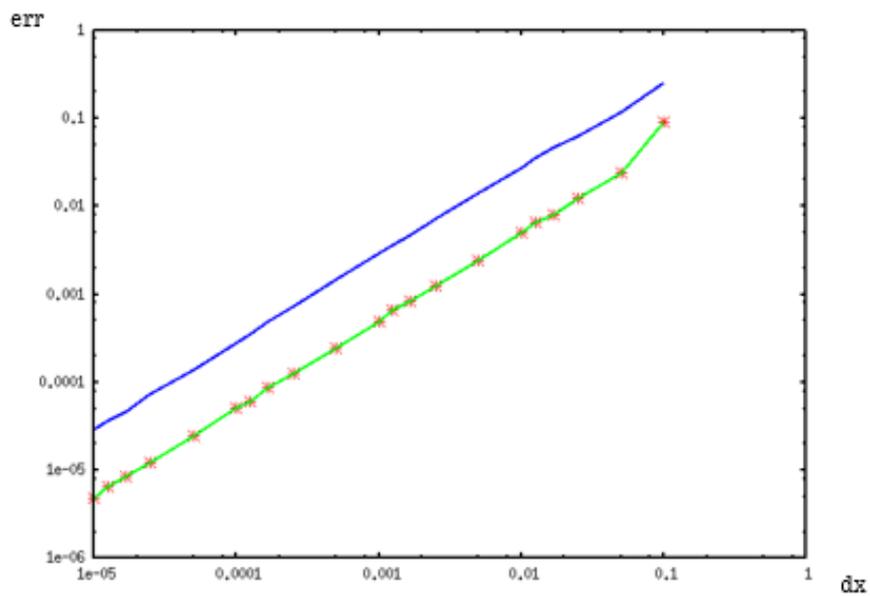


図 5-4 衝撃波に関する誤差
赤色：Roe スキーム、緑色：一次精度風上差分スキーム、
青色：Lax-Friedrichs スキーム

5-2. 膨張波

初期条件、領域範囲を以下のように設定する。

領域範囲 $0.0 < x < 1.0, 0.0 < t < 1.0$

初期条件 $0.0 < t < 0.5$ のとき $u = 0.0, 0.5 < t < 1.0$ のとき、 $u = 1.0$

境界条件はノイマン条件とする。

図 5-5 より、膨張波でも FTCS スキームは不安定になることがわかる。

図 5-6、図 5-7、図 5-8 より、Lax-Friedrichs スキームが Roe スキーム、一次精度風上差分スキームよりも精度が悪いことは簡単に分かる。

次に、Roe スキームと一次精度風上差分スキームの膨張波を比較してみる。

図 5-9 より、Roe スキームに比べ、一次精度風上差分スキームは大きな広がりがある。よって、厳密解とのずれが一次精度風上差分スキームのほうが大きくなった。つまり、Roe スキームのほうが一次精度風上差分スキームよりも精度が良いことが分かる。

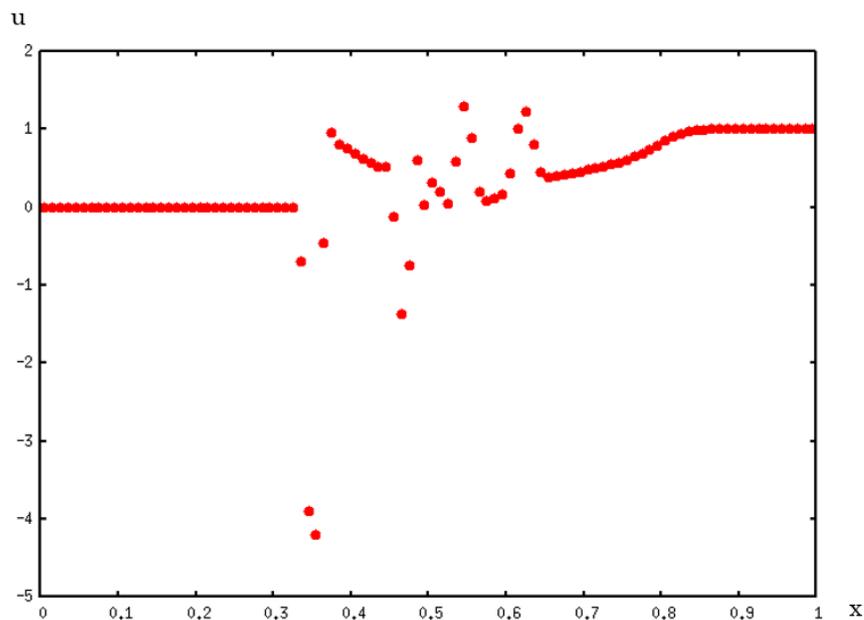


図 5-5 FTCS スキームの計算結果

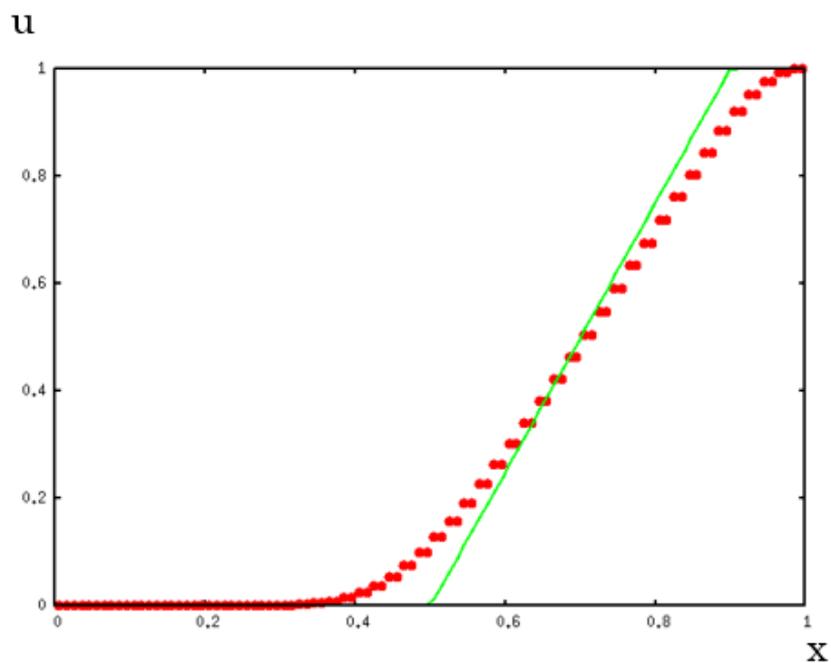


図 5-6 Lax-Friedrichs スキームと厳密解の比較($t=0.4$)
赤色 : Lax-Friedrichs スキーム、緑色 : 厳密解

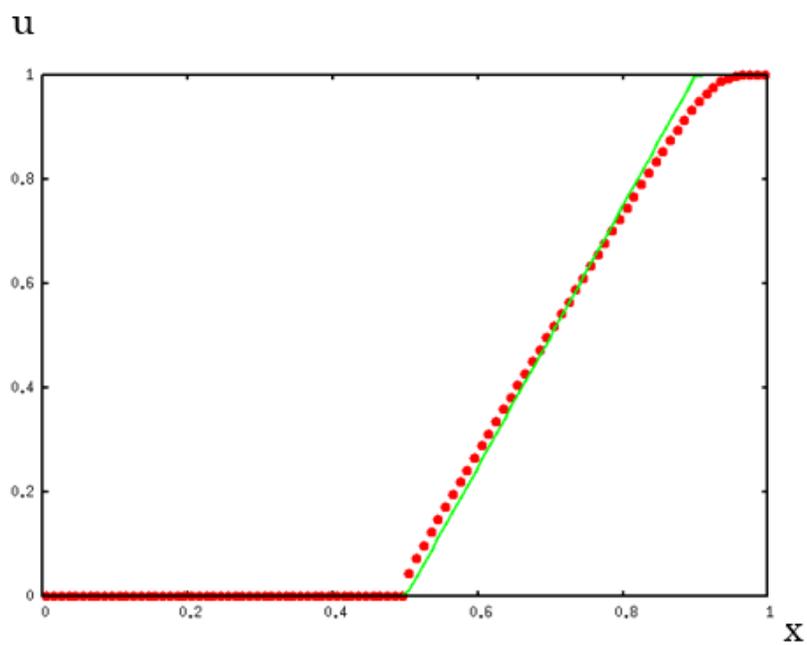


図 5-7 Roe スキームと厳密解の比較($t=0.4$)
赤色 : Roe スキーム、緑色 : 厳密解

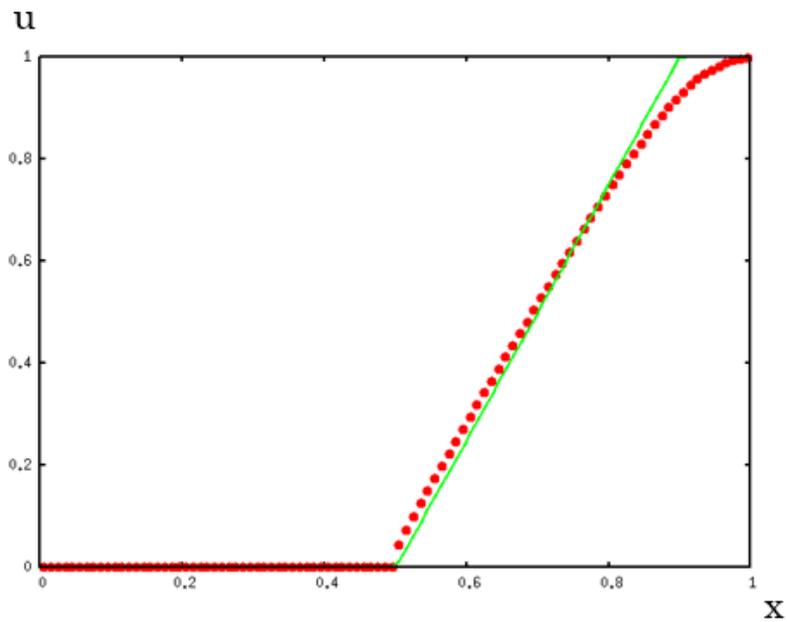


図 5-8 一次精度風上差分スキームと厳密解の比較($t=0.4$)
赤色：一次精度風上差分スキーム、緑色：厳密解

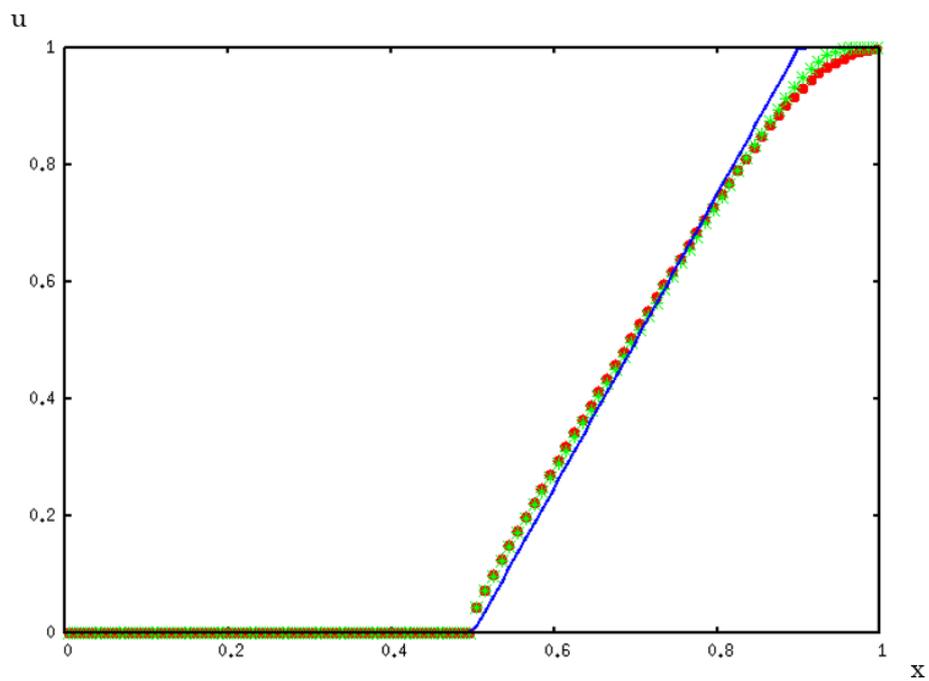


図 5-9 一次精度風上差分スキームと Roe スキームと厳密解の比較($t=0.4$)
赤色：一次精度風上差分スキーム、緑色：Roe スキーム、青色：厳密解

5-3. $u(x, t=0) = \frac{1}{2} + \sin(2\pi x)$

図 5-10 より、Lax-Friedrichs スキームが Roe スキームと一次精度風上差分スキームよりも悪いことが分かる。図 5-10 では、Roe スキームと一次精度風上差分スキームについては、同じような結果である

図 5-11 より、初期の値を比較すると若干、一次精度風上差分スキームのほうが Roe スキームよりも精度が良いことが分かる。しかし、プロット数を増やしていくと両スキームとも精度が同じ値になっていることが分かる。

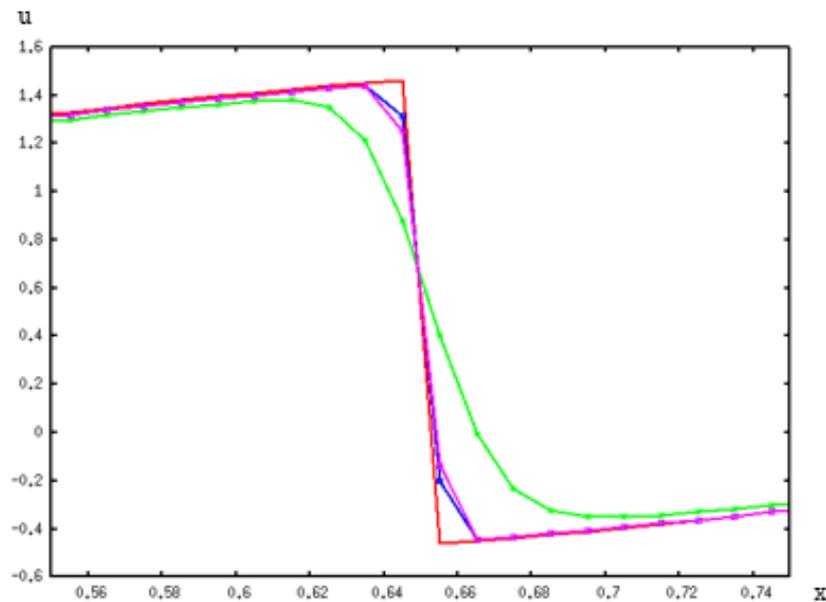


図 5-10 厳密解と各種数値解法の結果 (t=0.3)

赤色 : 厳密解、緑色 : Lax-Friedrichs スキーム、青色 : Roe スキーム、
 紫色 : 一次精度風上差分スキーム

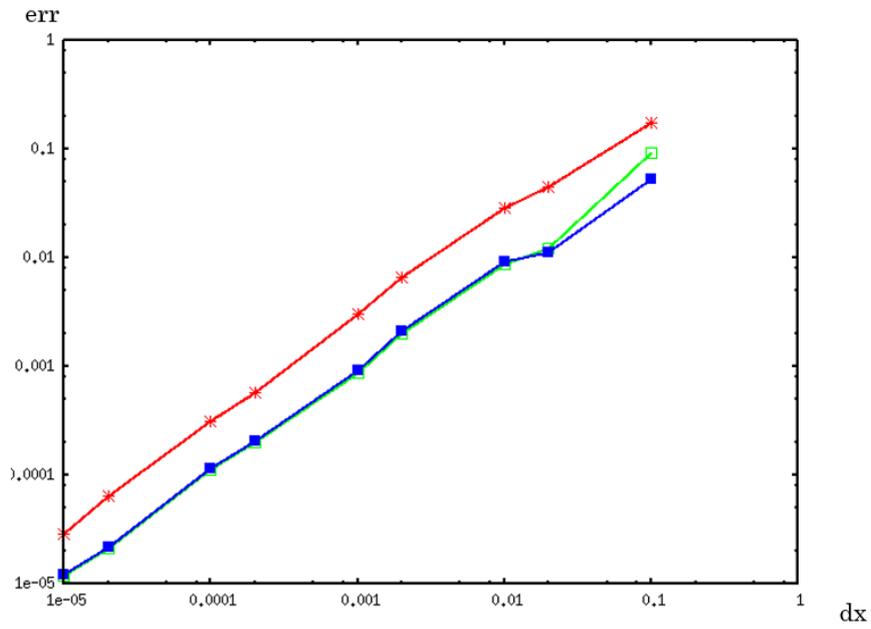


図 5-11 各種数値解法の誤差

赤色 : Lax-Friedrichs スキーム、緑色 : Roe スキーム、
 青色 : 一次精度風上差分スキーム

6. MUSCL 法

6-1. 基本的な概念

MUSCL 法とは、高精度化を維持する方法である。一次精度風上差分スキームが TVD 条件を満たすため単調整を維持することに着目し、その性質を妨げない非線形補間法を利用する。つまり、 $i + 1/2$ の右と左の物理量 u の状態 (u_L, u_R) を囲むいくつかの位置での物理量から内挿によってきめ、それを用いて数値流束を計算する。

6-1-1. TVD 条件

線形のスキームにおいては単調スキームと単調整を維持できるスキームは同じである。しかし、非線形のスキームになると単調整を維持できなくなる。この単調であるという条件を緩めて、全変動が増加しない。全変動は

$$TV(u^n) = \sum_i |u_{i+1}^n - u_i^n| \quad (6.1)$$

として表すことができる。

線形方程式と非線形方程式は、安定解析に von Neumann の解析方法がある。非線形の保存形式の方程式においても安定解析が必要であり、そのために導入されたのが、TV-stability という概念である。この概念の条件は、全変動が t と Δx について一様有界であることであるが、実質的には全変動が増加しないことと考える。つまり、

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n) \quad (6.2)$$

のように表すことができる。これを TVD 条件と呼ぶ。

6-1-2. 線形補間法

線形補間法は、ある関数値から、それらの中間の関数値を近似値で算出する方法である。

6-2. 計算方法

図 6-1 を参考にして説明する。このとき分かっているのは、格子点上の物

理量 u の値、つまり $u_{i-2}, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}$ などである。有限体積法では、物理量を格子点上の値ではなく、それを囲むセルの代表値として定義されている。この定義理由は、セル内で物理量がセル内で一定であるということ考えからである。セル内で一定であると仮定することは、一次精度の近似に相当する。仮に物理量がセル内を一定の分布であるならば、この近似精度の結果は正しい。一次精度と同様に考えていくと二次精度、三次精度も求めることができる。二次精度の場合、セル内で線形を仮定すると、線形な物理量分布に対しては、完全な解の射影を求めることができる。三次精度の場合、セル内で二次曲線の分布を仮定すれば、求めることができる。セル内の物理量の分布は

$$u(x) = u_i + \frac{1}{\Delta x}(x - x_i)\delta_i u + \frac{3\beta}{2(\Delta x)^2} \left[(x - x_i)^2 - \frac{(\Delta x)^2}{12} \right] \delta_i^2 u \quad (6.3)$$

$$(x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2})$$

ただし、

$$u_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x) dx \quad (6.4)$$

と表すことができる。これは、一次精度ではセル内を一定の分布を示しているからである。 $\beta = 1/3$ のとき、これは、二次曲線の分布となり、三次精度を与える。差分表示を以下のようにとるとすれば、

$$\delta_i u = \frac{1}{2} (u_{i+1} - u_{i-1})$$

$$\delta_i^2 u = u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} \quad (6.5)$$

セル境界での物理量は

$$(u_L)_{i+1/2} = u_i + \frac{1}{2} \delta_i u + \frac{\beta}{4} \delta_i^2 u$$

$$= u_i + \frac{1}{4} (1 - \beta) (u_i - u_{i-1}) + \frac{1}{4} (1 + \beta) (u_{i+1} - u_i) \quad (6.6)$$

$$(u_R)_{i+1/2} = u_{i+1} - \frac{1}{2} \delta_{i+1} u + \frac{\beta}{4} \delta_{i+1}^2 u$$

$$= u_{i+1} - \frac{1}{4} (1 + \beta) (u_{i+1} - u_i) - \frac{1}{4} (1 - \beta) (u_{i+2} - u_{i+1}) \quad (6.7)$$

となる。L と R は境界の左、右の値を示している。ここで、一次精度と高次精度を使い分けるために、パラメータ ε を導入して示す。

$$(u_L)_{i+1/2} = u_i + \frac{\varepsilon}{4} [(1 - \beta)(u_i - u_{i-1}) + (1 + \beta)(u_{i+1} - u_i)] \quad (6.8)$$

$$(u_R)_{i+1/2} = u_{i+1} - \frac{\varepsilon}{4} [(1 + \beta)(u_{i+1} - u_i) + (1 - \beta)(u_{i+2} - u_{i+1})] \quad (6.9)$$

二次精度を求めたいときには、 $\beta = -1, \varepsilon = 1$ のときに

$$(u_L)_{i+1/2} = u_i + \frac{1}{2} (u_i - u_{i-1}) \quad (6.10)$$

$$(u_R)_{i+1/2} = u_{i+1} - \frac{1}{2} (u_{i+2} - u_{i+1}) \quad (6.11)$$

となり、二次精度を表していることが分かる。

このようにすることで内、外挿の係数を選ぶことで、一次から三次までの精度のない内挿法を定義できる。内挿法を用いてセル境界での物理量を評価でき、それを利用することで流束を、

$$\tilde{f}_{i+1/2} = \frac{1}{2} [(cu)_R + (cu)_L - (|c|u_R - |c|u_L)] \quad (6.12)$$

と評価すると高次精度の Roe スキームを定義できる。

式(6.12)は、線形方程式なので、Roe スキームに直すと、

$$\tilde{f}_{i+1/2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2} * u_R^2 \right) + \left(\frac{1}{2} * u_L^2 \right) \right] - \frac{1}{2} \left| \frac{1}{2} (u_R + u_L) \right| (u_R - u_L) \quad (6.13)$$

式(6.13)に u_L 、 u_R は式(6.8)、(6.9)と同じで各々の流束制限関数を代入することで、数値流束を求めることができる。

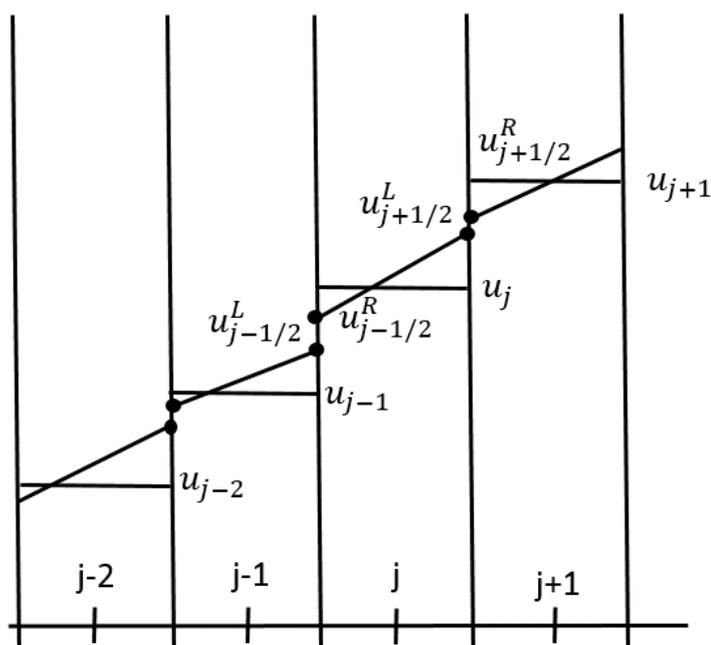


図 6-1 セル内の物理量分布の精度

6-3. 流束制限関数

式 6.8 と式 6.9 の右辺第 2 項を次のように補正すると、

$$(u_L)_{i+1/2} = u_i + \frac{\varepsilon}{4} \left[(1 - \beta) B_{j-1/2} (u_i - u_{i-1}) + (1 + \beta) B_{j+1/2} (u_{i+1} - u_i) \right] \quad (6.13)$$

$$(u_R)_{i+1/2} = u_{i+1} - \frac{\varepsilon}{4} \left[(1 + \beta) B_{j+1/2} (u_{i+1} - u_i) + (1 - \beta) B_{j+3/2} (u_{i+2} - u_{i+1}) \right] \quad (6.14)$$

ここで導入した $B_{j+1/2}$ を流束制限関数と呼ぶ。

この制限関数を変化させていくことで、1 次から 3 次精度までの値を得ることができる。このとき r_j は次のように表される。

$$r_j = \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{u_{j+1}^n - u_j^n} \quad (6.15)$$

- minmod limiter

$$B_{j+1} = \max[0, \min(1, r)]$$

- superbee limiter

$$B_{j+1} = \max[0, \min(2r, 1), \min(r, 2)]$$

- monotized limiter

$$B_{j+1} = \max[0, \min(2r, 0.5(1 + r), 2)]$$

- Koren limiter

$$B_{j+1} = \max[0, \min(2r, (2 + 1r)/3, 2)]$$

7. MUSCL 法を用いた高精度化

今後の記述で、高精度化を行うスキームは Roe スキームである。

7-1. 衝撃波

厳密解とそれぞれの流束制限関数について比較していくことにする。

図 7-2 より、流束制限関数の無い一次精度が流束制限関数のある数値解法よりも精度が悪いことが分かる。このことから流束制限関数が必要であることが分かった。しかし、衝撃波に関しては、流束制限関数を変えてもあまり差異がないように見える。

次にそれぞれの誤差を比較する。

図 7-3 から衝撃波に関しては、流束制限関数を変えてもほとんど差異が無いことが分かった。その理由として、図 7-4 から衝撃波が一次精度であることが分かった。

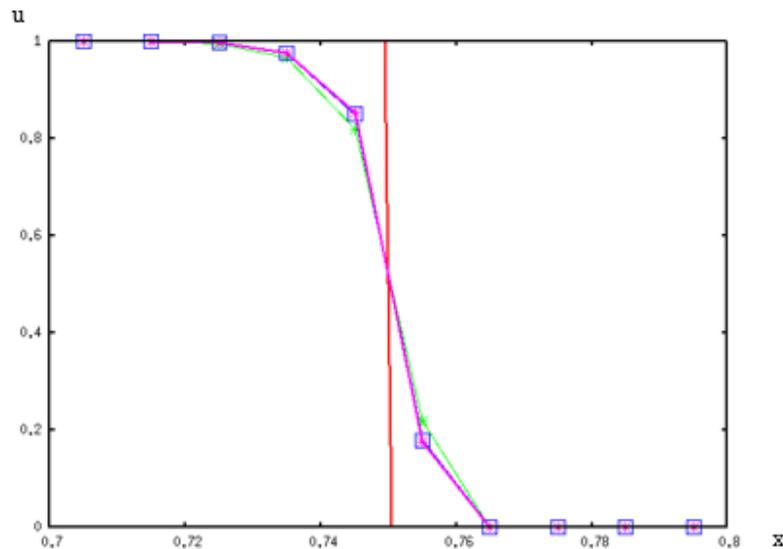


図 7-1 厳密解と 2 次精度

赤色：厳密解、緑色：minmod limiter、青色：superbee limiter、
紫色：monotonized limiter

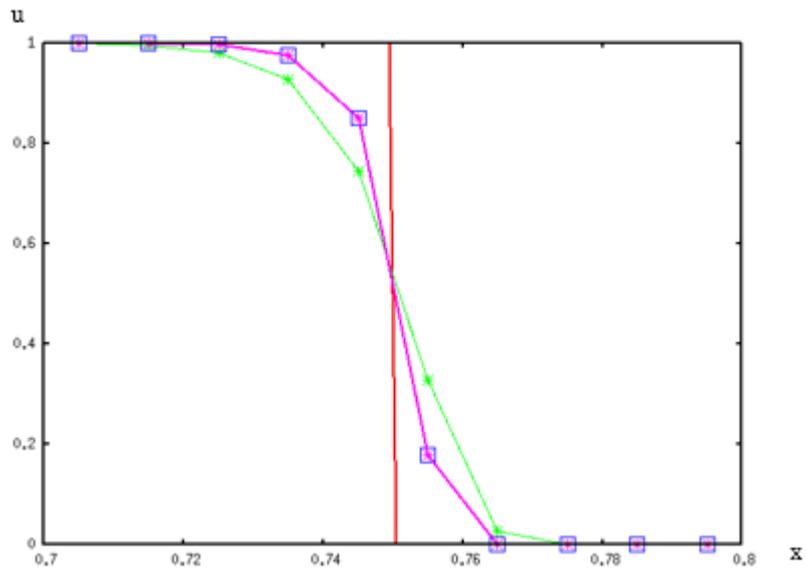


図 7-2 精度比較

赤色：厳密解、緑色：一次精度、青色：superbee limiter、
紫色：Koren limiter

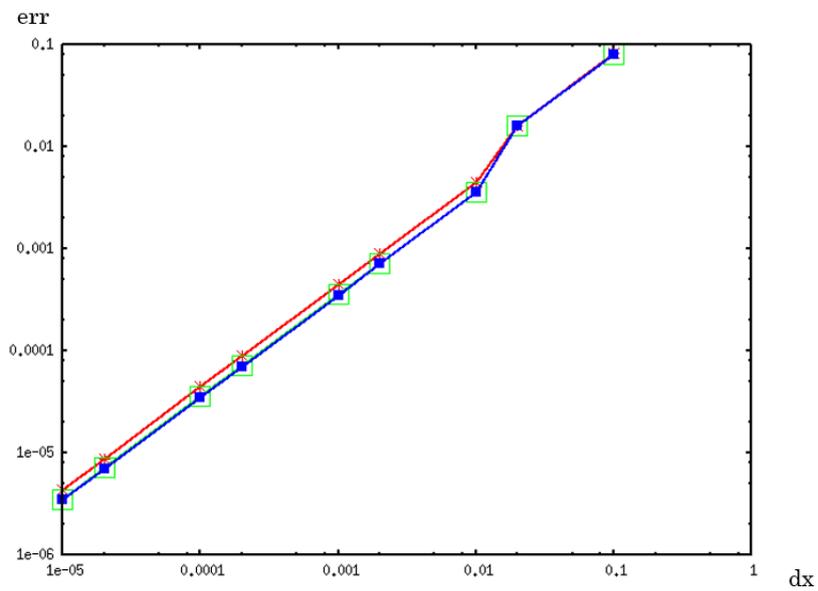


図 7-3 2次精度の誤差

赤色：minmod limiter、緑色：superbee limiter、青色：mononized limiter

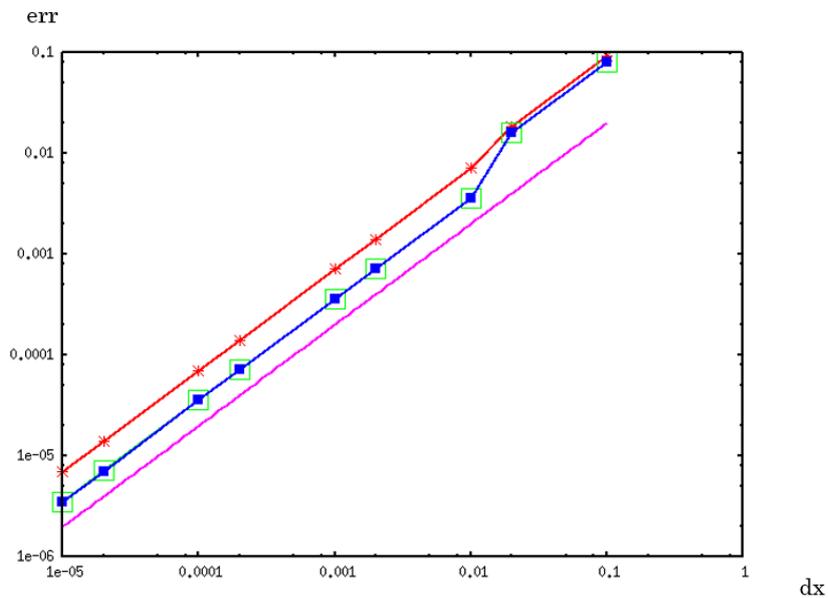


図 7-4 精度ごとによる誤差比較

赤色：一次精度、緑色：superbee limiter、青色：Koren limiter、紫色：x

7-2. $u(x, t) = \frac{1}{2} + \sin(2\pi x)$

t を 0.1, 0.2, 0.3 と分けて分析する。

時間を分けた理由は、衝撃波のできる前とできた後での精度を比較するためである。

T=0.1

図 7-6 より 1 次精度と 2 次精度と 3 次精度はあまり差異が無いように見られる。しかし、誤差で 2 次精度と 3 次精度について比較すると、図 7-8 より波の点数を増やすごとの精度が 1 次精度よりも 2 次精度、3 次精度のほうが良い。1 次精度の誤差は、x の 1 乗になり、2 次精度、3 次精度の誤差は x の 2 乗になることが分かった。

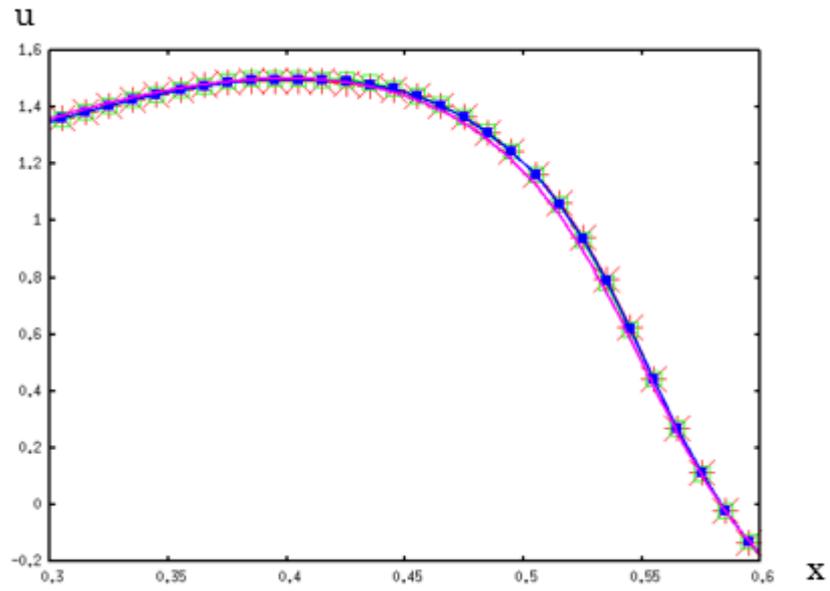


図 7-5 厳密解と流束制限関数の比較(2次精度)($t=0.1$)

赤色 : minimod limiter、緑色 : superbee limiter、
 青色 : mononized limiter、紫色 : 厳密解

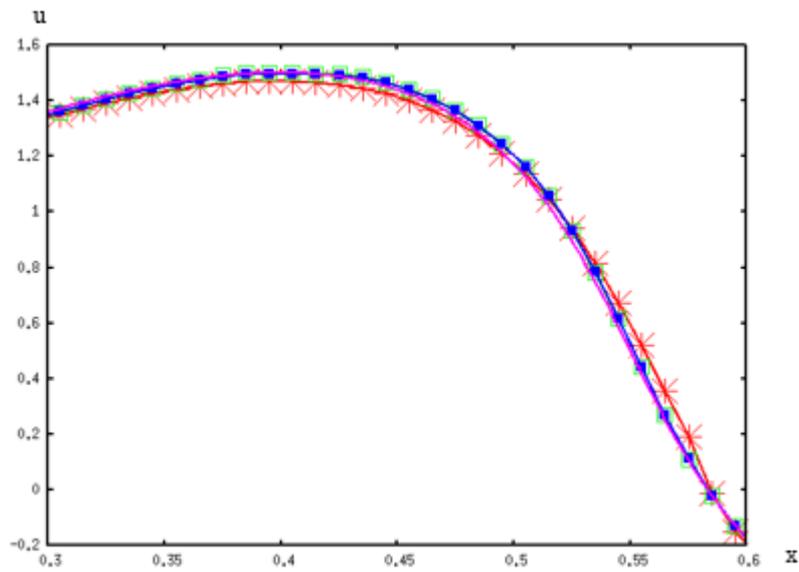


図 7-6 厳密解と精度比較($t=0.1$)

赤色 : 一次精度、緑色 : superbee limiter、青色 : Koren limiter、
 紫色 : 厳密解

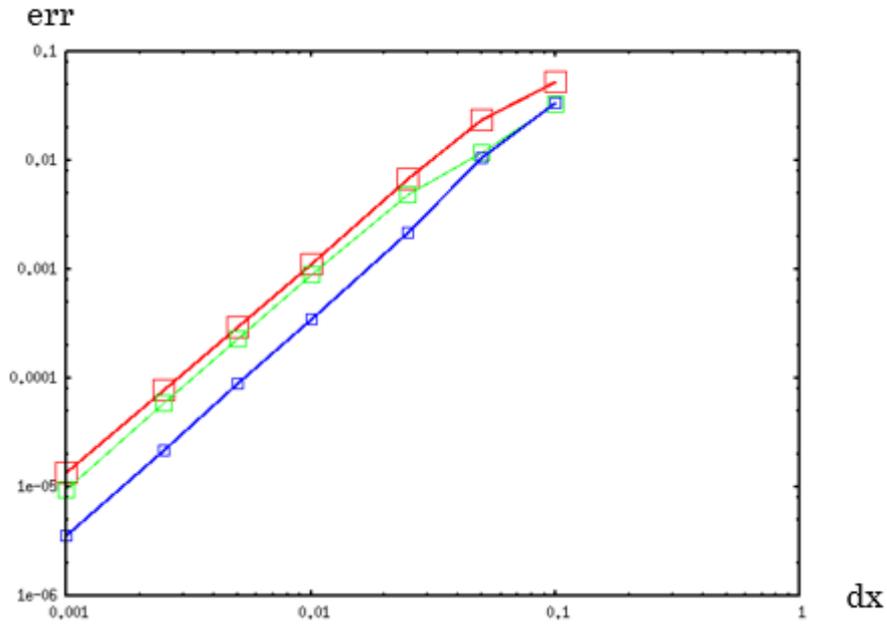


図 7-7 2次精度の誤差(t=0.1)

赤色 : minimod limiter、緑色 : superbee limiter、青色 : mononized limiter

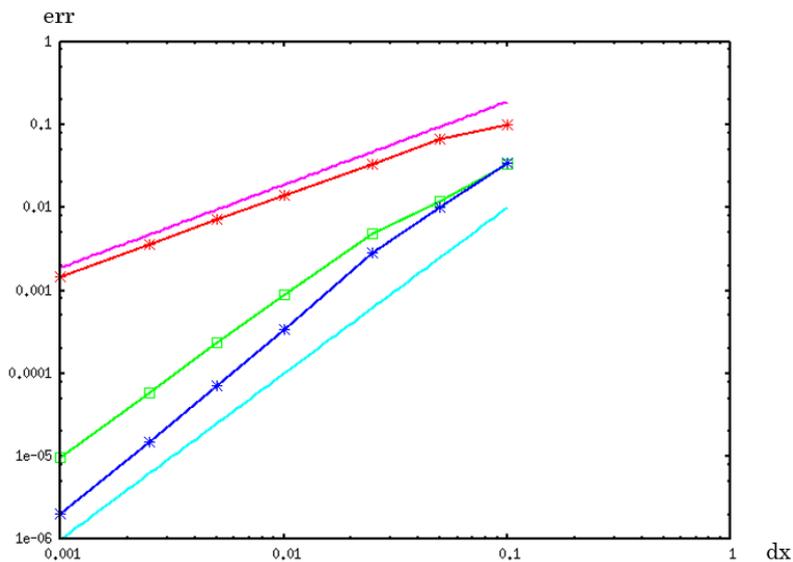


図 7-8 誤差の精度比較(t=0.1)

赤色 : 一次精度、緑色 : superbee limiter、青色 : Koren limiter、紫色 : x 、
水色 : x^2

T=0.2

図 7-10、1次精度と2次精度、3次精度の間には、少し差異があるように見られる。図 7-12 の誤差を比較すると誤差の大きさは1次精度のほうが2次

精度、3次精度よりも悪いことが分かる。しかし、2次精度も3次精度も図7-8のようなxの2乗に誤差精度がならないことが分かる。

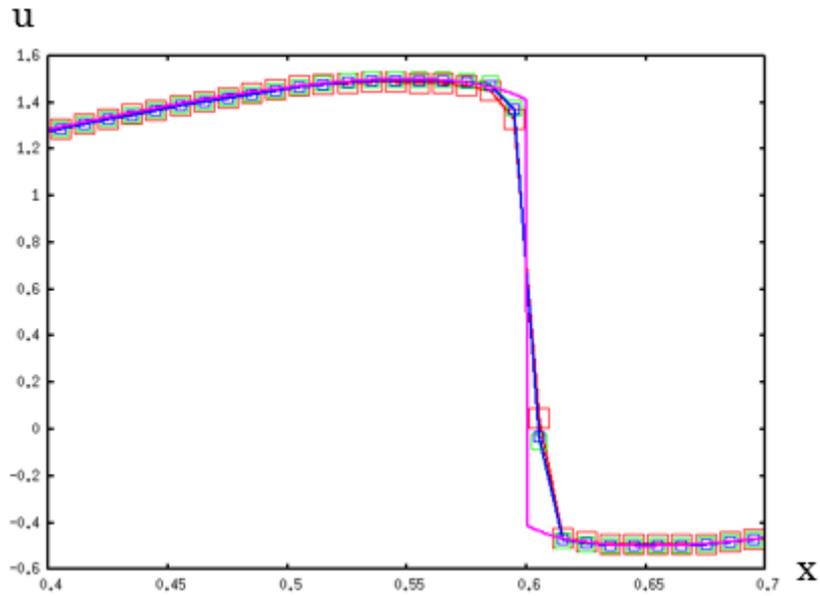


図7-9 厳密解と流束制限関数の比較(2次精度)($t=0.2$)

赤色：minimod limiter、緑色：superbee limiter、青色：mononized limiter、紫色：厳密解

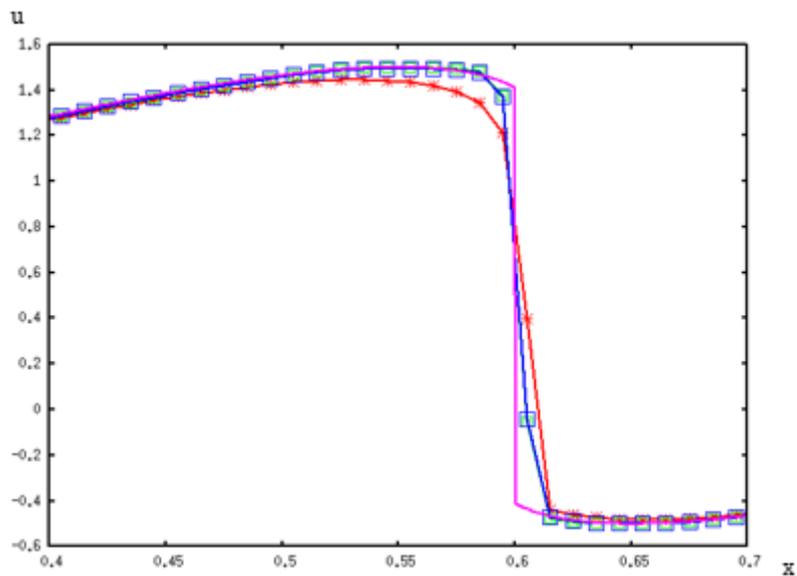


図7-10 厳密解と精度比較($t=0.2$)

赤色：一次精度、緑色：superbee limiter、青色：Koren limiter、紫色：厳密解

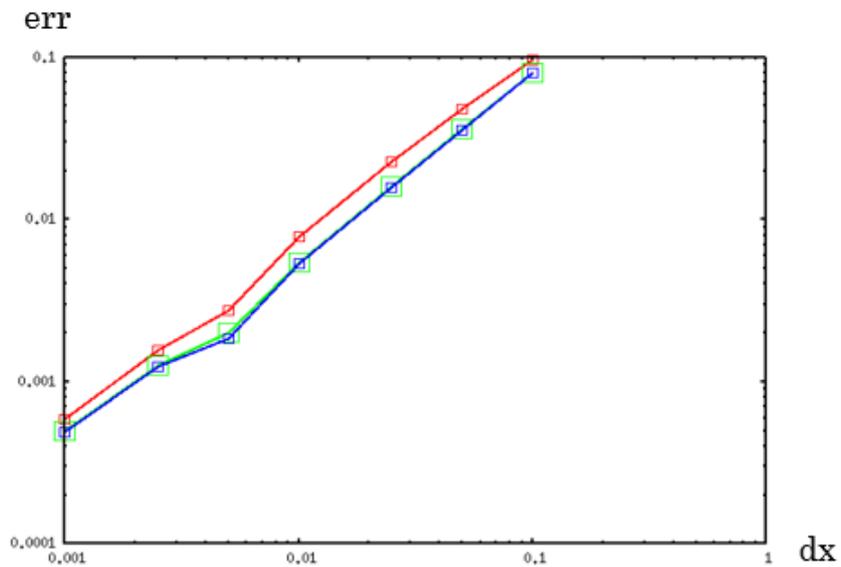


図 7-11 2次精度の誤差(t=0.2)

赤色 : minimod limiter、緑色 : superbee limiter、青色 : mononized limiter

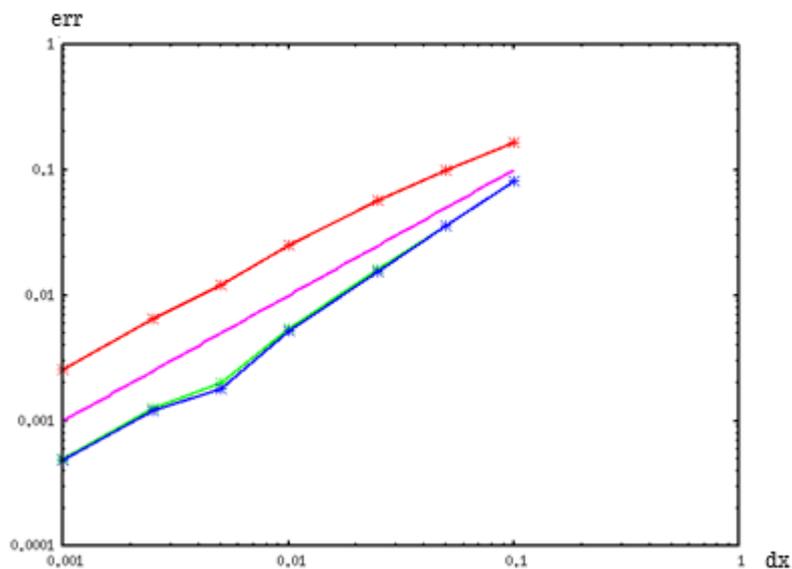


図 7-12 誤差の精度比較(t=0.2)

赤色 : 一次精度、緑色 : superbee limiter、青色 : Koren limiter、紫色 : x

T=0.3

t=0.2 のときと同様に、図 7-14 より、1次精度と2次精度、3次精度の間には、少し差異があるように見られる。図 7-16 の誤差を比較すると誤差の大きさは1次精度のほうが2次精度、3次精度よりも悪いことが分かる。しか

し、2次精度も3次精度も図7-8のような x の2乗に誤差精度がならないことが分かる。

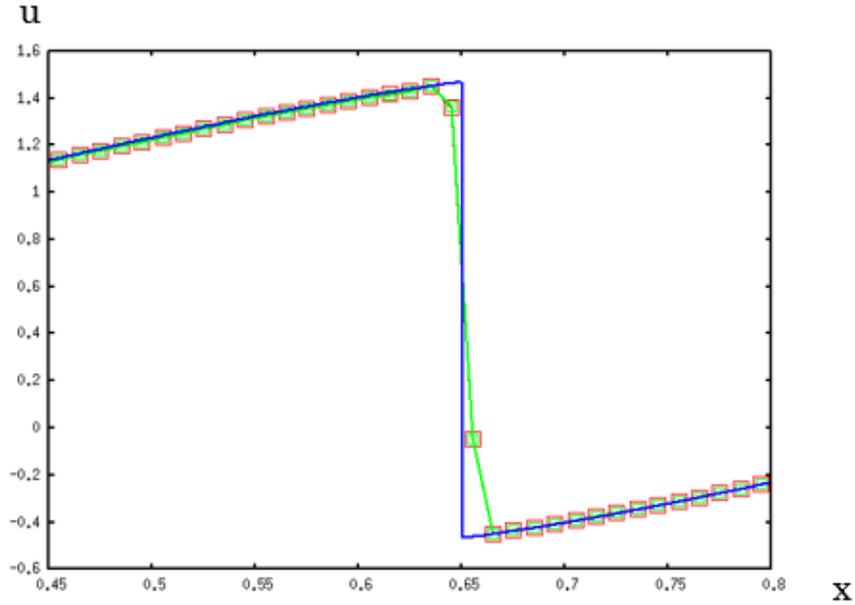


図7-13 厳密解と流束制限関数の比較(2次精度)($t=0.3$)

赤色：minimod limiter、緑色：superbee limiter、
青色：mononized limiter、紫色：厳密解

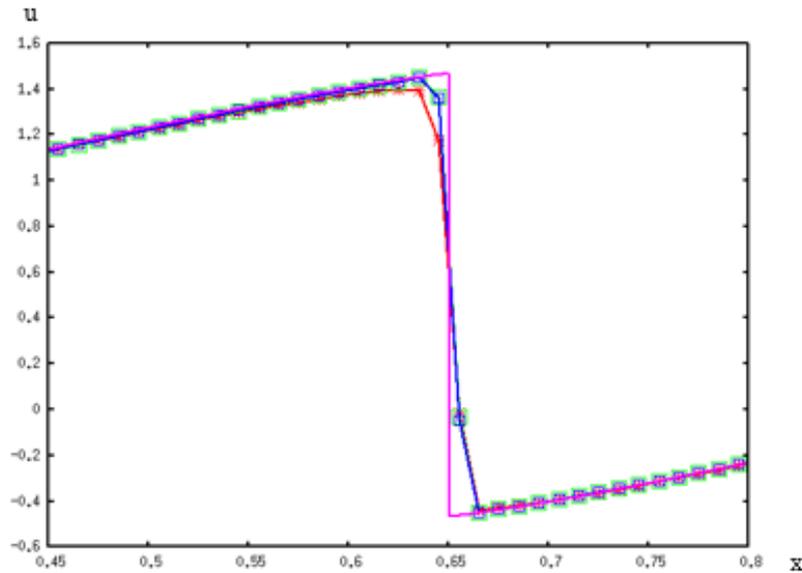


図7-14 厳密解と精度比較($t=0.3$)

赤色：一次精度、緑色：superbee limiter、青色：Koren limiter、
紫色：厳密解

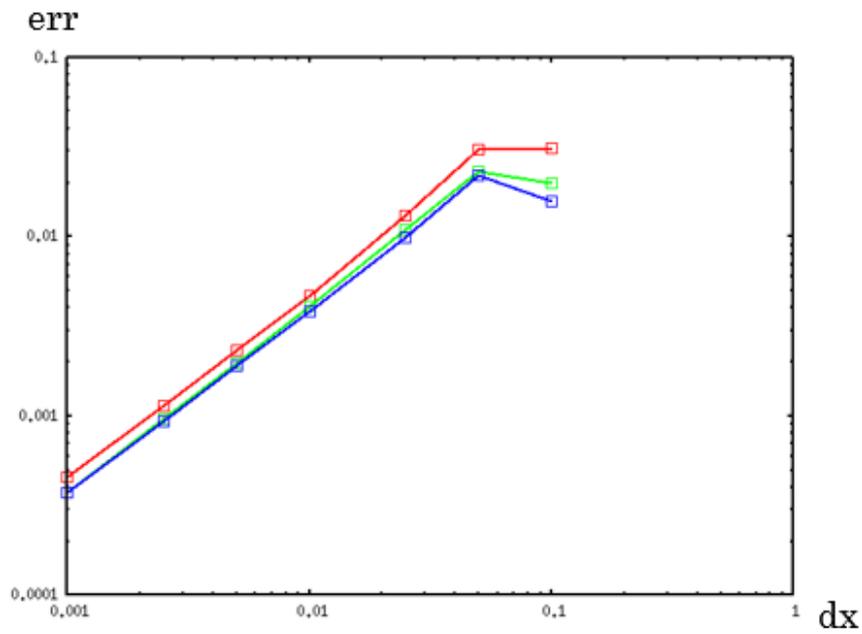


図 7-15 2次精度の誤差(t=0.3)

赤色 : minimod limiter、緑色 : superbee limiter、青色 : mononized limiter

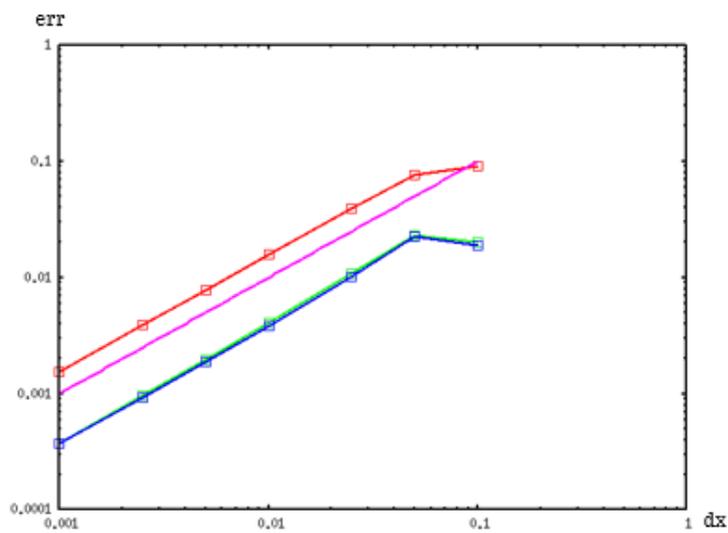


図 7-16 誤差の精度比較(t=0.3)

赤色 : 一次精度、緑色 : superbee limiter、青色 : Koren limiter、紫色 : x

時間ごとの比較

minimod limiter で時間ごとの精度を比較する。図 7-17 より衝撃波ができる前には、2次精度、3次精度は意味を成す。しかし、衝撃波ができた後に

は、誤差を抑えることはできるが、誤差の精度は1次精度と変わらないことが分かった。

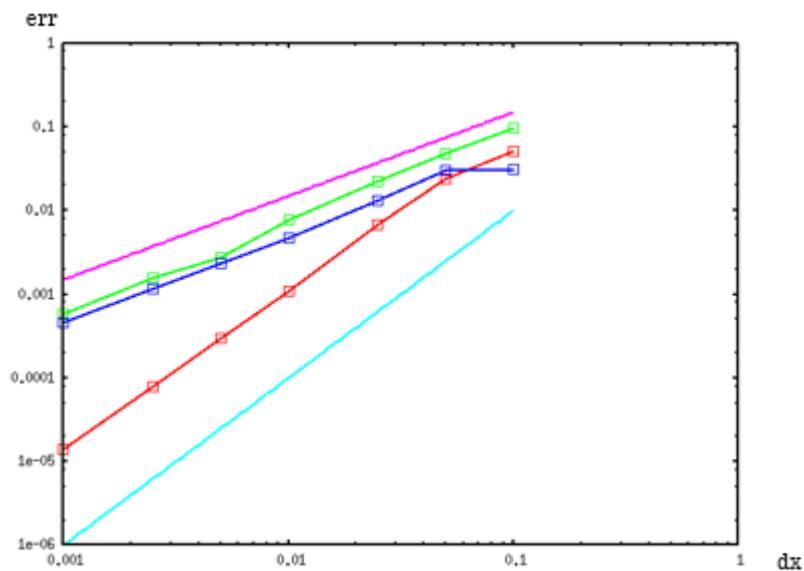


図 7-17 時刻ごとの精度比較 (minimod limiter)
赤色 : $t = 0.1$ 、緑色 : $t = 0.2$ 、青色 : $t = 0.3$ 、紫色 : x 、水色 : x^2

結論

差分方程式、有限体積法から、非保存形式と保存形式の違いについて言及した。その結果、保存形式との差異がはっきりあり、保存形式を使わなければならないことが分かった。

差分方程式については、一次精度風上差分スキームが **Lax-Friedrichs** スキームより精度がいいことが分かる。

有限体積法については、衝撃波と膨張波について調べた。その結果、衝撃波に関しては、一次精度風上差分スキームと **Roe** スキームが同じくらいの精度の良さを示し、**Lax-Friedrichs** スキームがその 2 つより精度が低いことが分かった。膨張波に関しては、**Roe** スキームと一次精度風上差分スキームの精度比較を行なうことができ、**Roe** スキームが一次精度風上差分スキームよりも精度が良いことが分かった。

初期値を $u(x, t) = \frac{1}{2} + \sin(2\pi x)$ の場合も同様に一次精度風上差分スキームと **Roe** スキームが同じくらいの精度の良さを示し、**Lax-Friedrichs** スキームがその 2 つより精度が低いことが分かった。

FTCS スキームに関しては、差分方程式、有限体積法ともに不安定なスキームになる。

MUSCL 法については、衝撃波では高次精度化は誤差を抑えるだけで、誤差の精度は一次精度のままであった。つまり、数値流束間が u で一定であることが分かった。

初期値を $u(x, t) = \frac{1}{2} + \sin(2\pi x)$ の場合、衝撃波発生前の高次精度化は、誤差の精度を良くする働きがあることが分かった。しかし、衝撃波発生後は、誤差の精度は 1 次精度のときと同様であった。このことから、流束について表すのに、高次精度化する必要性はある。

初期値を $u(x, t) = \frac{1}{2} + \sin(2\pi x)$ の場合、衝撃波発生前 3 次精度が 2 次精度になった理由は、時間方向を 2 次精度にしていたためである。時間方向と空間方向は **CFL** 条件の式から、時間精度 \propto 空間精度となる。このため、3 次精度が 3 次精度化されなかったのである。

今後は、衝撃波の形成後に精度が落ちない方法を検討する必要がある。

参考資料

- [1] 藤井孝蔵：著流体力学の数値計算法(東京負大学出版会、1994)
- [2] 三好隆博、草野完也：高速プラズマ流を伴う計算機シミュレーションの基礎(広島大学大学院理化学研究科、独立行政法人海洋研究開発機構地球シミュレータセンター、2007)
- [3] P. L. Roe, "Characteristic-based schemes for the Euler equations",
Ann. Rev. Fluid Mech., 18 (1986) 337-365
- [4] B. Van Leer, "Towards the ultimate conservative difference scheme III.
Upstream-centered finite-difference schemes for ideal compressible
flow", J. Comput. Phys., 23 (1977) 263-275
- [5] B. Koren, "A robust upwind discretisation method for advection,
diffusion and source terms", in Koren Vreugdenhil (Ed.), Numerical
Methods for Advection-Diffusion Problems, Vieweg,
Braunschweig, 1993,117-138
- [6] 松元亮治、富坂幸治、花輪知幸：流体・磁気流体方程式の差分解法(2003)
<http://www.astro.phys.s.chiba-u.ac.jp/netlab/summer-school/TEXTBOOK/TEXT-1.pdf>
- [7] 江川慎之助：線形移流方程式に対する各種数値解法の安定性解析(広島大学理学部物理科学科クオーク物理学研究室、2013)
http://www.hepl.hiroshima-u.ac.jp/thesis/bachelor/13egawa_thesis.pdf
- [8] 渡邊伸征：衝撃波による非粘性バーガーズ方程式の差分の比較(情報電子工学科竹野研究室、2003) <http://takeno.iee.niit.ac.jp/~foo/thesis/2000/nabe-2.pdf>

謝辞

本論文を作成するにあたり、素晴らしい研究環境をご用意してくださいましてありがとうございます。三好先生には、卒業研究に関する知識を教えていただき、大変ありがとうございます。並びにご指導やアドバイスをくださいましたクォーク研究室の皆様に深く感謝いたします。