

指導教員：杉立 徹 教授  
主 査：三好 隆博 助教  
副 査：川端 弘治 准教授

クォーク・グルーオン・プラズマ状態方程式を用いた  
相対論的流体シミュレーションの精度評価

広島大学 理学部 物理科学科  
クォーク物理学研究室

B120198 本田 知宏

平成 28 年 2 月 10 日

## 概要

高エネルギー重イオン衝突実験によって生成される高温・高密度物質は、極初期宇宙において存在したと予想されるクォーク・グルーオン・プラズマ (QGP) 状態であると考えられており、そのダイナミクスは粘性が非常に小さい相対論的流体モデルによってよく記述される。近年、相対論的流体シミュレーション研究が進んできたが、QGP 流体に対する高精度な数値解法の開発は未だ十分ではない。そこで本研究では、QGP 状態方程式を適用した相対論的流体モデルに対する高精度かつロバストな数値解法を開発し、その精度評価を行う。

本研究では、QGP 相における大きな物理量変化を数値的に安定に取り扱うため、衝撃波などの大振幅波を安定に捕獲する近似リーマン解法について検討を行った。特に、接触不連続を平滑化する Local Lax-Friedrichs 法、HLL(Harten-Lax-van Leer) 近似リーマン解法、および接触不連続を考慮し高い解像度を持つ HLLC(HLL-Contact) 近似リーマン解法を適用した。また、MUSCL(Monotonic Upstream-Centered Scheme for Conservation Laws) および WENO(Weighted Essentially Non-Oscillatory) 補間により高次精度化を実現した。1次元問題に対する詳細な精度評価の結果、QGP 流体に対する HLLC 法および WENO 補間の有効性を明らかにした。

# 目次

概要	i
第 1 章 序論	1
1.1 クォーク・グルーオン・プラズマ (QGP)	1
1.2 相対論的流体力学	1
1.3 QGP と流体力学	2
第 2 章 状態方程式	4
2.1 相対論的理想気体	4
2.2 MIT バッグモデル	4
第 3 章 近似 Riemann 解法	6
3.1 Riemann 問題	6
3.2 近似 Riemann 解法	7
3.3 Local Lax-Friedrichs スキーム	8
3.4 HLL 近似 Riemann 解法	8
3.5 HLLC 近似 Riemann 解法	9
第 4 章 高次精度化	10
4.1 一次精度	10
4.2 MUSCL	11
4.3 WENO	13
4.4 時間高次精度化	15
第 5 章 結果	16
5.1 相対論的理想流体に関する評価	16
5.2 QGP 状態方程式に関する評価	22
第 6 章 結論	27
謝辞	28
参考文献	29

# 目次

1.1	重イオン衝突実験の時空発展 . . . . .	2
2.1	MIT バッグモデル . . . . .	4
3.1	Riemann 問題 . . . . .	6
3.2	保存形式 . . . . .	7
3.3	特性線 . . . . .	7
3.4	近似 Riemann 解法 . . . . .	8
3.5	近似 Riemann 解法における中間状態 . . . . .	8
4.1	一次精度風上差分による線形移流問題の数値解 . . . . .	11
4.2	一次精度と二次精度による格子境界上の物理量の計算 . . . . .	11
4.3	MUSCL を適用した風上差分による線形移流問題の数値解 . . . . .	13
4.4	WENO を適用した風上差分による線形移流問題の数値解 . . . . .	14
5.1	衝撃波管問題の数値解 . . . . .	17
5.2	衝撃波管問題に関するスキームの評価 . . . . .	17
5.3	理想気体の衝撃波管問題に関する精度評価 . . . . .	18
5.4	理想気体の衝撃波管問題に関する MUSCL の異なる流束制限関数による精度評価 . . . . .	19
5.5	理想気体の滑らかな波に対する数値解 . . . . .	20
5.6	理想気体の滑らかな波に対するスキームの評価 . . . . .	21
5.7	理想気体の滑らかな波に対する MUSCL の異なる流束制限関数による精度評価 . . . . .	21
5.8	QGP 流体の衝撃波管問題に対する数値解 . . . . .	23
5.9	QGP 流体の衝撃波管問題に関する精度評価 . . . . .	23
5.10	QGP 流体の衝撃波管問題に関する MUSCL の異なる流束制限関数による精度評価 . . . . .	24
5.11	QGP 流体の滑らかな波に対する数値解 . . . . .	25
5.12	QGP 流体の滑らかな波に対する評価 . . . . .	25
5.13	QGP 流体の滑らかな波に対する MUSCL の異なる流束制限関数による精度評価 . . . . .	26

# 表目次

5.1	衝撃波管問題に対するスキームの評価 . . . . .	18
5.2	理想気体の衝撃波管問題に対するスキームの精度評価 . . . . .	20
5.3	理想気体の滑らかな波に対するスキームの精度評価 . . . . .	22
5.4	QGP 流体の衝撃波管問題に対するスキームの精度評価 . . . . .	24
5.5	QGP 流体の滑らかな波に対するスキームの精度評価 . . . . .	26

# 第 1 章

## 序論

この章では、本研究のテーマとなるクォーク・グルーオン・プラズマ、相対論的流体力学、そしてそのつながりを概観する。また、章末で本論文の目的と構成を述べる。

### 1.1 クォーク・グルーオン・プラズマ (QGP)

誕生から間もない宇宙は非常な高温高密度であったと考えられている。その初期宇宙を探ることは物理学の大きな使命の一つであり、様々な側面から研究が進められている。その中でも、地上において物質をその状態に近づけることのできる高エネルギー重イオン衝突実験は、宇宙探索の重要な手がかりである。

量子色力学によれば、単独のクォークは低温、低密度状態では取り出すことができないとされている。これをクォークの閉じ込めというが、超相対論的速度で衝突する原子核中の核子を構成するクォークは、衝突による高温・高密度状態においてクォークの閉じ込めから解放され、クォークとグルーオンが強い相互作用により影響しあう QGP 相へと相転移すると考えられる。QGP は外部との圧力差によって外側に向かって膨張する。膨張と共に温度が下がり、QGP 相の相転移温度を下回ると、ハドロンガスへと相転移する。

### 1.2 相対論的流体力学

流体全体の運動エネルギーや、内部エネルギーが非常に大きい場合、流体の振る舞いを適切に表すためには、相対論的な影響を考慮する必要がある。以下、自然単位系を用いて 1 + 1 次元の相対論的流体について議論する。本研究では、未だ定式化の模索が続く散逸過程を含む方程式については考慮しない。

流体の静止系で考えたとき、計量テンソル  $\eta^{\mu\nu} = (-1, 1)$  と 1+1 元速度  $u^\mu$  を用いて連続の式は

$$\partial_\mu(\rho u^\mu) = 0 \quad (1.1)$$

である。連続の式は、単位体積内における物理量の保存を表す。ここでは質量密度の保存を連続の式としたが、QGP 流体を扱う場合、粒子数密度  $n^\mu$  で考える。なお、その際、粒子の生成、消滅は考慮しない。エネルギー・運動量の保存はエネルギー運動量テンソル  $T^{\mu\nu}$  を用いて

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0 \quad (1.2)$$

となる。エネルギー・運動量テンソルは、 $T^{\mu\nu} = \rho(1 + \frac{p}{\rho} + \epsilon)u^\mu u^\nu + p\eta^{\mu\nu} = \rho h u^\mu u^\nu + p\eta^{\mu\nu}$  で表される。ここで  $h$  は単位質量あたりのエンタルピー密度、 $\epsilon$  は単位質量あたりのエネルギー密度である。加え

て，状態方程式

$$p = p(\rho, \epsilon) \tag{1.3}$$

によって方程式系は閉じる．

相対論的理想流体の運動学は，粒子，運動量，エネルギーの保存によって支配される．それぞれの保存則は，

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0 \tag{1.4}$$

という双曲形の保存方程式の要素となる．ローレンツ因子  $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$ ，圧力  $p$  を用いて

$$D = \rho\gamma \tag{1.5}$$

$$m = \rho h \gamma^2 v \tag{1.6}$$

$$\tau = \rho h \gamma^2 - p \tag{1.7}$$

とおくと，保存変数のベクトルは，

$$\mathbf{U} = (D, m, \tau)^T \tag{1.8}$$

であり，流束ベクトルは，

$$\mathbf{F} = (Dv, mv + p, m)^T \tag{1.9}$$

である．

### 1.3 QGP と流体力学

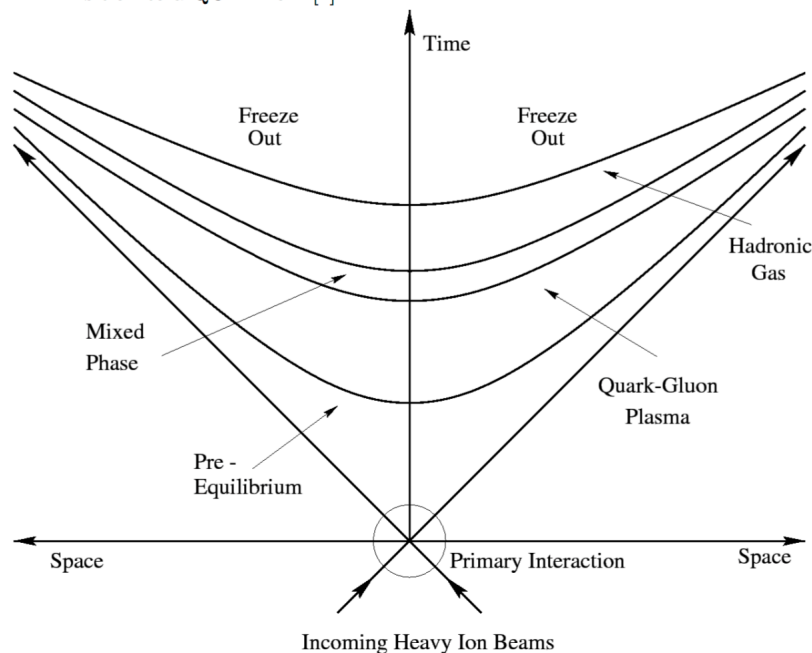


図 1.1 重イオンのビームが  $t=0$  で衝突したのち，QGP への相転移が起きる．流体力学は系が熱平衡に近い状態にある間のみ適用可能である．[13]

QGP の物性を探る研究は様々であるが，その中の一つとして，流体シミュレーションによるものがある．実験では，臨界温度付近の QGP の振る舞いは，クォークとグルーオンの完全流体に近いものであると

いう結果が出ている．相対論的流体モデルは，QGP の局所的な熱平衡を仮定することで，QGP の時空発展の過程で生じる粒子スペクトルや楕円型フロー等を理解することにおいて成功した．

しかし，QGP 解析への流体力学の適用が進む一方で，近年に至るまで計算の精度に払われる注意はそれほど大きくなかった．本研究が QGP 流体に対する高精度数値シミュレーションを試みる目的は，QGP 内部における流体不安定性や乱流現象，衝突ごとの初期条件の揺らぎのように，正確な計算のために高い精度が求められる状態の解析に向けた基礎的研究である．

本論文では，次章で MIT バッグモデルと，それをもとにした状態方程式について述べたのちに，3 章，4 章で本研究で用いる近似 Riemann 解法およびその高次精度化について述べる．その後，それぞれの解法，精度を 2 つのテスト問題によって評価することにより，高精度でかつ QGP 流体の計算を安定に解くことができる解法を研究する．



## 第 2 章

# 状態方程式

流体の振る舞いは粒子密度，エネルギー，運動量の保存則によって記述されるが，それだけでは方程式系は閉じない．よって，それらに加えて状態方程式を加えることで閉じた方程式をつくる．

本研究において，QGP のモデルとして MIT バッグモデルを用いる．このモデルは QGP の性質を単純ながら的確に表す．

### 2.1 相対論的理想気体

理想流体を仮定した場合，熱力学から，

$$p = (\Gamma - 1)\rho\epsilon \quad (2.1)$$

となる．ここで， $\Gamma$  は比熱比である．

### 2.2 MIT バッグモデル

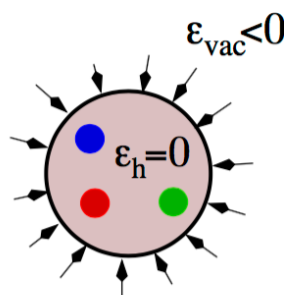


図 2.1 MIT バッグモデルを表している．ハドロン内部のエネルギー密度  $\epsilon_h$  に対して，外部のエネルギー密度は小さくなっている．[7]

本研究においては，最も単純な MIT バッグモデルから導かれる状態方程式を用いた流体シミュレーションを行う．MIT バッグモデルは，ハドロン内部と外部の真空を分けてモデル化する．MIT バッグモデルの描像においては，クォークの質量はゼロとし，クォークとグルーオンは強い相互作用の影響が十分小さく見積もることのできる領域のつくる「袋」の中で自由に動き回ることができる．

ハドロンの形成の結果生じる真空中でのグルーオンの凝縮は、真空のエネルギー密度をおし下げる。それによって、ハドロン内部の真空は、外部よりも高いエネルギー密度を持つことになる。その補正としてバグ定数を  $B$  とおいて、

$$\epsilon = \frac{37\pi^2}{30} T^4 + B \quad (2.2)$$

で表す。圧力は、

$$p = \frac{37\pi^2}{90} T^4 - B \quad (2.3)$$

である。これより、バグモデルにおける圧力とエネルギー密度は、

$$p = \frac{1}{3}(\epsilon - 4B) \quad (2.4)$$

という関係で結ばれる。本研究では、この式を状態方程式として用いる。

## 第 3 章

# 近似 Riemann 解法

本研究では、衝撃波などの急激な物理量変化の存在する状況を含めた数値シミュレーションを行うため、用いる計算スキームは激しい勾配を正確に捉えることのできるものでなくてはならない。そこで、その条件を満たす解法として近似 Riemann 解法を選択した。

本研究で取り扱うスキームは Local Lax-Friedrichs(LLF) スキーム、HLL 近似 Riemann 解法、HLLC 近似 Riemann 解法の 3 つである。物理量を平滑化する LLF スキーム、HLL 近似 Riemann 解法に対し、接触不連続を考慮した HLLC 近似 Riemann 解法は急な物理量変化の存在するような状況で優れた性能が期待できる。

この章の目的は、本研究に用いる近似 Riemann 解法を解説することにある。

### 3.1 Riemann 問題

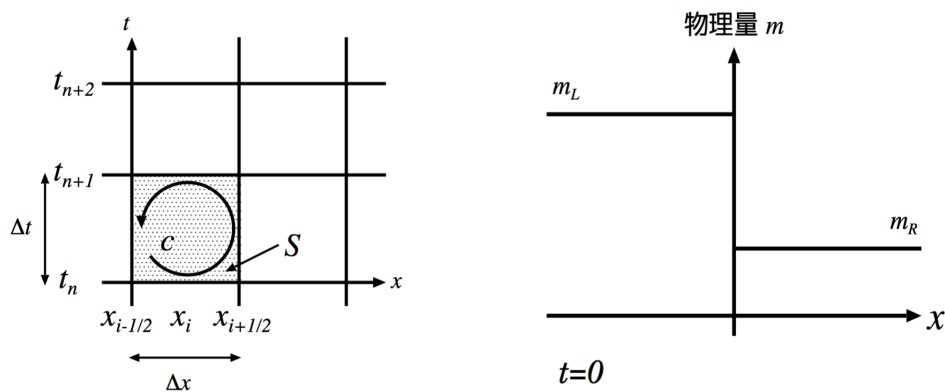


図 3.1 左は Riemann 問題の積分経路，右は Riemann 問題の初期値 [2]

図 3.1 の右のような物理量の不連続が存在する初期値を持つ状態の時間発展を考える問題を Riemann 問題という。

ここで、方程式を差分化するために、時空間を格子点とその境界で分割する。すなわち、時間に対しては  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ ，空間に対しては  $\Delta x = x_{i+1} - x_i$  のような大きさの格子で分け、その中心を格子点とする。図 3.1 の左において色付けされている格子内の物理量の保存に関して、図の矢印のような積分経路で

積分すると，

$$\int_S \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \right) dS = \int_C (\mathbf{U} dx + \mathbf{F} dt) = 0 \tag{3.1}$$

となり，積分を実行すると前式は

$$\mathbf{U}_i^{n+1} - \mathbf{U}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{F}_{i+1/2}^* - \mathbf{F}_{i-1/2}^*] = 0 \tag{3.2}$$

となる．ここで，時間の格子点番号を下付き，空間を上付きで示した．この式によって，下図のようにある時間ステップの保存変数とその格子境界における流束から次の時間ステップの保存変数を計算する．

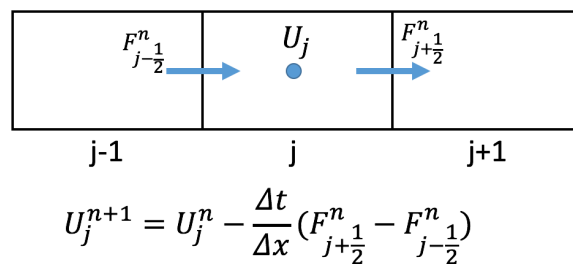


図 3.2 格子内の物理量を保存則により計算する．

### 3.2 近似 Riemann 解法

そのような衝撃波が発生した場合に，それを鋭く捉えることのできる解法を衝撃波捕獲法という．その中で，格子境界の特性速度をの情報をを用いて計算を行う方法として，近似 Riemann 解法が存在する．

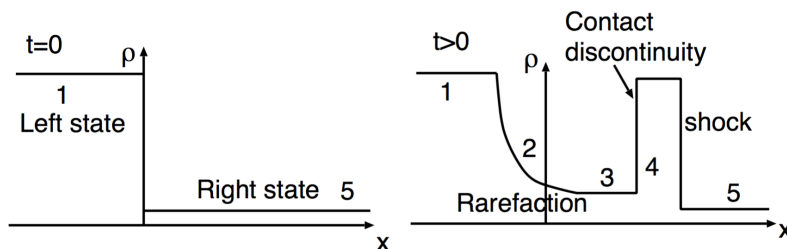


図 3.3 左は Riemann 問題の初期値，右はその後の波を表している．[2]

図 3.3 の左のような不連続な初期条件があった時，その後の解は右ようになる．右の波は 3 種類に波によって特徴付けられていることがわかる．すなわち，膨張波 (rarefaction wave)，接触不連続 (contact discontinuity)，衝撃波 (shock wave) である．それぞれの波が伝わる速度を特性速度といい， $a = \frac{\partial F(U)}{\partial U}$  で与えられる．

格子境界で発生する衝撃波を捉えることは，格子境界ごとに Riemann 問題を解くことに他ならない．近似 Riemann 解法は Riemann 問題を図 3.4 の手順で近似的に解くことにより各時間ステップの物理量を計算する．

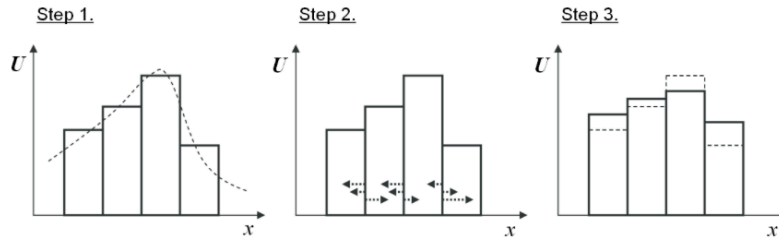


図 3.4 近似 Riemann 解法の手順を示す．step1 である時間ステップにおける物理量の関数を近似し，step2 において格子境界上で Riemann 問題を近似的に解き，step3 において次の時間ステップの物理量を計算する．[4]

### 3.3 Local Lax-Friedrichs スキーム

(3.2) 式における流速として，

$$F_{i+1/2}^* = \frac{1}{2}[f(u_i) + f(u_{i+1}) - \alpha_{i+1/2}(u_{i+1} - u_i)] \tag{3.3}$$

を与えるような解法を Local Lax-Friedrichs スキームという．ここで  $\alpha$  は  $\alpha_{i+1/2} = \max(|a_i|, |a_{i+1}|)$  で与えられる．本研究で用いる解法の中では最も数値粘性が大きく物理量の変化を抑える傾向が強い．

### 3.4 HLL 近似 Riemann 解法

Schneider et al.[12] では，Harten,Lax,van Leer による HLL 近似 Riemann 解法の相対論的流体への適用がなされている．この手法は単一の間状態を用いた Riemann 問題の近似解に基づいている．すなわち，格子境界上の状態を，

$$\mathbf{U} = \begin{cases} \mathbf{U}_L & \text{for } 0 < a_L, \\ \mathbf{U}^{HLL} & \text{for } a_L \leq 0 \leq a_R, \\ \mathbf{U}_R & \text{for } a_R < 0, \end{cases} \tag{3.4}$$

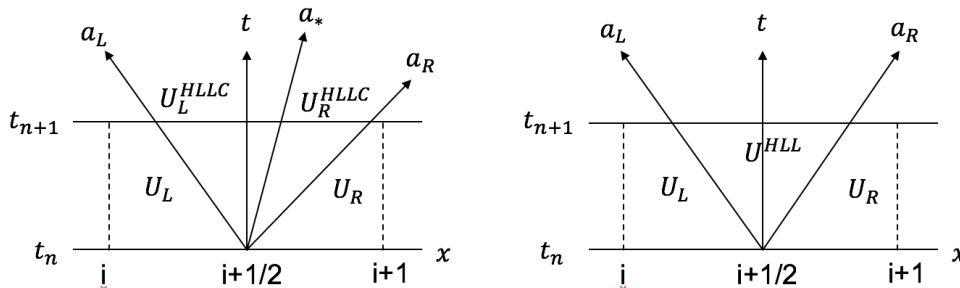


図 3.5 近似 Riemann 解法における中間状態：左は HLLC，右は HLL の状態の取り方を示している．

に分割する．ここで， $a_R, a_L$  はそれぞれ最も速い信号と最も遅い信号を表している．ここで

$$S_R = \max(0, a_{R,i-1/2}, a_{R,i+1/2}) \quad (3.5)$$

$$S_L = \max(0, a_{L,i-1/2}, a_{L,i+1/2}) \quad (3.6)$$

を用いると， $\mathbf{U}$  は

$$\mathbf{U} = \frac{S_R \mathbf{U}_R - S_L \mathbf{U}_L - \mathbf{F}_R + \mathbf{F}_L}{S_R - S_L} \quad (3.7)$$

と書くことができる．流束については，

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^* = \frac{S_R \mathbf{F}_L - S_L \mathbf{F}_R + S_R S_L (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L)}{S_R - S_L} \quad (3.8)$$

となる．

### 3.5 HLLC 近似 Riemann 解法

HLLC 解法は，HLL 解法における中間状態を2つに分割する．すなわち，図 3.5 におけるように  $S_*$  で  $\mathbf{U}_L^{HLLC}$  と  $\mathbf{U}_R^{HLLC}$  に場合分けする．HLLC 解法における状態は，

$$\mathbf{U} = \begin{cases} \mathbf{U}_L & \text{for } 0 < a_L, \\ \mathbf{U}_L^{HLLC} & \text{for } a_L \leq 0 < a_*, \\ \mathbf{U}_R^{HLLC} & \text{for } a_* \leq 0 \leq a_R, \\ \mathbf{U}_R & \text{for } a_R < 0, \end{cases} \quad (3.9)$$

と場合分けすることができる．中間状態と左右の状態の接続条件は Rankine-Hugoniot 条件といい，

$$D_K^{HLLC}(a_K - a_*) = D_K(a_K - v) \quad (3.10)$$

$$m_K^{HLLC}(a_K - a_*) = m_K(a_K - v) + p_* - p_K \quad (3.11)$$

$$\tau_K^{HLLC}(a_K - a_*) = \tau_K(a_K - v) + p_* a_* - p_K v \quad (3.12)$$

である．ここで  $K$  は  $L$  もしくは  $R$  を表す．この値を用いて，

$$S_R = \max(a_{R,i+1/2}, a_{R,i-1/2}) \quad (3.13)$$

$$S_L = \max(a_{L,i+1/2}, a_{L,i-1/2}) \quad (3.14)$$

とすると，HLLC 解法における状態と流束は，

$$\mathbf{U} = \frac{(a_* - a_L) \mathbf{U}_L^{HLLC} + (a_R - a_*) \mathbf{U}_R^{HLLC}}{a_R - a_L} \quad (3.15)$$

$$a_* \mathbf{F}_{i+1/2}^* = \frac{\mathbf{F}_L^{HLLC} a_R (a_* - a_L) + \mathbf{F}_R^{HLLC} a_L (a_R - a_*)}{a_R - a_L} \quad (3.16)$$

となる．

## 第 4 章

# 高次精度化

ここでは、用いる解法ををより高精度なものにすることを考える。単純化のために一次元の波に関する移流問題を考える。

### 4.1 一次精度

移流速度  $a(> 0) = \text{const}$  の単純な移流問題を表す方程式

$$\frac{\partial U}{\partial t} + a \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (4.1)$$

について、時間、空間ともに後退差分を施した、

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + a \frac{U_i^n - U_{i-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad (4.2)$$

$$U_i^{n+1} = U_i^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (U_i^n - U_{i-1}^n) \quad (4.3)$$

という式を考える。この式によって移流問題を解くとき、その解法を一次精度の風上差分法という。

ここで、 $a \frac{\Delta t}{\Delta x}$  はクーラン数といい、数値的な安定性に関して重要な値である。クーラン数を CFL とおくと、

$$0 \leq CFL \leq 1 \quad (4.4)$$

がクーラン数の保証する数値解の安定条件である。これをクーラン条件という。この意味は、計算上の流体の速度が物理的な流体の速度を超えないということであり、非物理的な解を与えないための必要条件である。

以下の図 4.1 は、青のような初期条件の波を一定速度で移流させた時の一次精度風上差分による数値解を緑で示したものである。境界で周期境界条件を課すことにより、波の終状態は初期条件と一致させるよう設定してある。[0.0,1.0] の範囲を格子点数 50 で分割した。波は図右側に  $a=1.0$  の速度で進み、終時間は 2.0 とした。

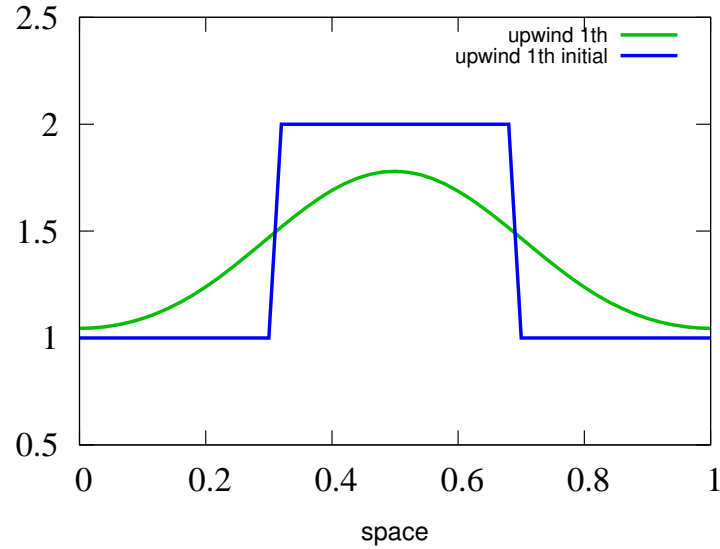


図 4.1 一次精度風上差分法による計算．青が初期条件（終状態と一致），緑が計算結果．数値粘性により波が潰れる様子が見られる．

## 4.2 MUSCL

前節で述べた 1 次精度は，格子内で物理量が一定とした場合である．すなわち，図 4.2 の (a) のように，ある格子境界上の左右の値は，境界に接する 2 つの格子内の平均値をそのまま引き継いだものになる．

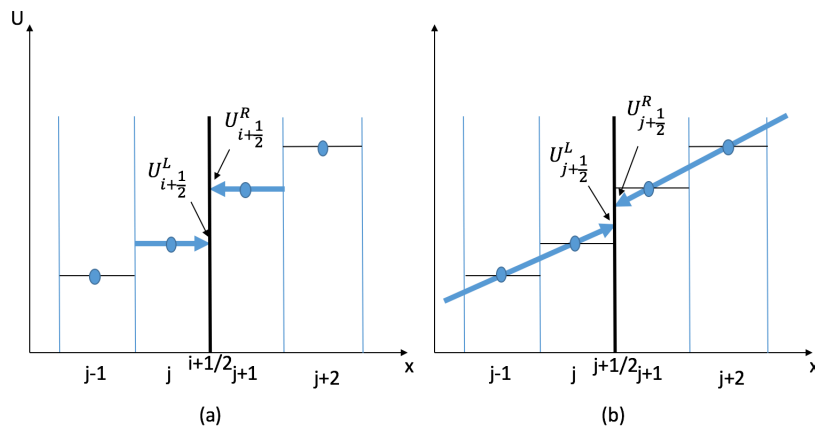


図 4.2 (a) は一次精度，(b) は二次精度による格子境界上の物理量の近似を表す．

それに対して MUSCL は図 4.2(b) のような補間によって，2 次精度から 3 次精度の計算を行う．図のような線形補間では 2 次精度であり，2 次曲線による補間を用いれば 3 次精度が可能である．

格子内の物理量の平均を

$$U_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{i-1/2}^{i+1/2} U(x) dx \tag{4.5}$$



で与えた時、格子内の物理量の分布は、

$$U(x) = U_i + \frac{1}{\Delta x}(x - x_i)\delta_i U + \frac{3\kappa}{2(\Delta x)^2}[(x - x_i)^2 - \frac{(\Delta x)^2}{12}]\delta_i^2 U \quad (x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}) \quad (4.6)$$

で表される。κ は、精度によって変わる数で、例えば κ = -1 の時 2 次精度、κ = 1/3 の時 3 次精度となる。ここで、

$$\delta_i U = \frac{1}{2}(U_{i+1} - U_{i-1})$$

$$\delta_i^2 U = u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}$$

のような差分を考えると、格子境界の値は、境界左を L, 右を R で表し、

$$(U_L)_{i+1/2} = U_i + \frac{1-\kappa}{4}(U_i - U_{i-1}) + \frac{1+\kappa}{4}(U_{i+1} - U_i) \quad (4.7)$$

$$(U_R)_{i-1/2} = U_i - \frac{1-\kappa}{4}(U_{i+1} - U_i) - \frac{1+\kappa}{4}(U_i - U_{i-1}) \quad (4.8)$$

となる

ここで、数値的安定のために流束制限関数を導入し、

$$(U_L)_{i+1/2} = U_i + \frac{1-\kappa}{4}B_{i-1/2}(U_i - U_{i-1}) + \frac{1+\kappa}{4}B_{j+1/2}(U_{i+1} - U_i) \quad (4.9)$$

$$(U_R)_{i-1/2} = U_i - \frac{1-\kappa}{4}B_{i+1/2}(U_{i+1} - U_i) - \frac{1+\kappa}{4}B_{i-1/2}(U_i - U_{i-1}) \quad (4.10)$$

と書く。流束制限関数は、物理量の急激な変化に対して精度をおとし、安定性を保つために導入される。本研究では、

- minimod limiter

$$B_{i+1/2} = \max(0, \min(1, r)) \quad (4.11)$$

- monotized central limiter

$$B_{i+1/2} = \max(0, \min(2r, 1), \min(r, 2)) \quad (4.12)$$

- Koren limiter

$$B_{i+1/2} = \max(0, \min(2r, (2+r)/3, 2)) \quad (4.13)$$

を用い、その比較も行う。ここで r は、

$$r = \frac{U_i^n - U_{i-1}^n}{U_{i+1}^n - U_i^n} \quad (4.14)$$

である。

以下が、上で一次精度の場合に用いた問題を MUSCL を用いて解いた時の結果である。一次精度に比べて終状態を正しく計算できていることを見て取ることができる。

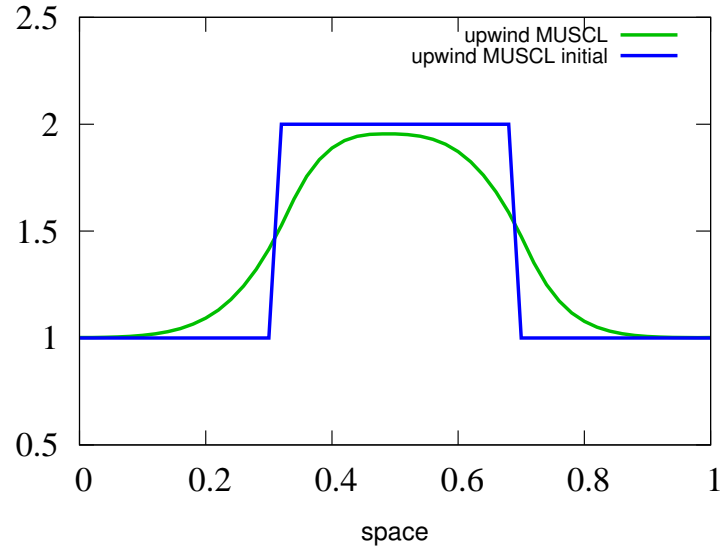


図 4.3 MUSCL を適用した風上差分法による計算．青が初期条件（終状態と一致），緑が計算結果．流速制限関数として minimod limiter を用いた．

### 4.3 WENO

ここでは，WENO によって 5 次精度の解法を実現する．必要なのは，格子上の物理量から，格子境界の物理量を計算することである．

WENO の元となった ENO は，5 つの格子点上の物理量から 3 つの多項式による補間を求め，その中で最も滑らかなものを採用するという手法であった．すなわち，5 つの点を用いるにもかかわらず 3 次精度までしか実現できない．その改良である WENO では，その 3 つの多項式に重みをつけ足し合わせることで 5 次精度を達成している．

ここでは，格子境界の左側の物理量を求める．右側に関しては，左右対称な値をとることで，以下の手順と同様に得られる．まず，補間関数として，以下の 3 つを考える．

$$U_L^1 = \frac{1}{3}U_{i-2} - \frac{7}{6}U_{i-1} + \frac{11}{6}U_i \quad (4.15)$$

$$U_L^2 = -\frac{1}{6}U_{i-1} + \frac{5}{6}U_i + \frac{1}{3}U_{i+1} \quad (4.16)$$

$$U_L^3 = \frac{1}{3}U_i + \frac{5}{6}U_{i+1} - \frac{1}{6}U_{i+2} \quad (4.17)$$

それぞれの補間関数の滑らかさは，以下の smoothness indicator で評価する．

$$S_1 = \frac{13}{12}(U_{i-2} - 2U_{i-1} + U_i)^2 + \frac{1}{4}(U_{i-2} - 4U_{i-1} + 3U_i)^2 \quad (4.18)$$

$$S_2 = \frac{13}{12}(U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1})^2 + \frac{1}{4}(U_{i-1} - U_{i+1})^2 \quad (4.19)$$

$$S_3 = \frac{13}{12}(U_i - 2U_{i+1} + U_{i+2})^2 + \frac{1}{4}(3U_i - 4U_{i+1} + U_{i+2})^2 \quad (4.20)$$

以上を用いて、格子境界左の値は、

$$(U_L)_{i+1/2} = w_1 U_L^1 + w_2 U_L^2 + w_3 U_L^3 \quad (4.21)$$

で求まる。ここで、

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{0.1}{S_1 + \epsilon} \\ \alpha_2 &= \frac{0.6}{S_2 + \epsilon} \\ \alpha_3 &= \frac{0.3}{S_3 + \epsilon} \\ \epsilon &= 10^{-6} \end{aligned} \quad (4.22)$$

であり、 $\alpha$  により

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \\ w_2 &= \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \\ w_3 &= \frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \end{aligned} \quad (4.23)$$

で  $w$  を求める。  $\epsilon$  は、 $\alpha$  の発散を防ぐために導入した微小量である。

以下が、他の精度と同様な問題を WENO を用いて解いた時の結果である。3つの精度の中で終状態をもっとも正しく表現することが可能である。

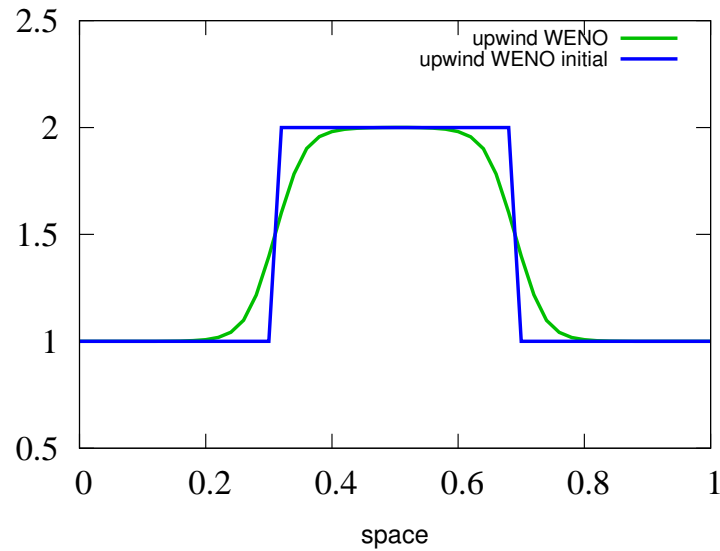


図 4.4 WENO を適用した風上差分法による計算。青が初期条件（終状態と一致）、緑が計算結果。

以上が数値解法を高次精度化する手順である。流体方程式においては、本章で述べた手順をすべての基本変数に適用することで高次精度化を行う。

## 4.4 時間高次精度化

空間の高次精度化の際には、時間方向の高次精度化も重要である。なぜなら、空間を高次精度化すると、解の安定性のために同程度の時間高次精度化が必要だからである。本研究では、時間高次精度化に TVD ルンゲクッタ法を用いた。

$$\frac{dU}{dt} = L(U) \quad (4.24)$$

とすると、2 次のルンゲクッタ法は、

$$\begin{aligned} U^{(1)} &= U^n + \Delta t L(U^n) \\ U^{n+1} &= \frac{1}{2}U^n + \frac{1}{2}(U^{(1)} + \Delta t L(U^{(1)})) \end{aligned} \quad (4.25)$$

であり、3 次のルンゲクッタ法は

$$\begin{aligned} U^{(1)} &= U^n + \Delta t L(U^n) \\ U^{(2)} &= \frac{3}{4}U^n + \frac{1}{4}(U^{(1)} + \Delta t L(U^{(1)})) \\ U^{n+1} &= \frac{1}{3}U^n + \frac{2}{3}(U^{(2)} + \Delta t L(U^{(2)})) \end{aligned} \quad (4.26)$$

である。2 次のルンゲクッタ法は Koren limiter に、3 次のルンゲクッタ法は WENO に適用する。

## 第 5 章

# 結果

この章では、スキーム、精度を変えた幾つかの計算手法で精度評価を行う。扱うテスト問題は 2 つで、一つは急激な物理量変化の存在する衝撃波管問題、もう一つは粒子密度に関して微小で滑らかな揺らぎが存在するような問題である。

評価は L1 ノルムという値によって行う。横軸が格子数、縦軸が L1 ノルムという対数グラフにプロットした際、精度によって格子数の変化に対する L1 ノルムの変化の傾きが異なることが期待される。

### 5.1 相対論的理想流体に関する評価

この節では、QGP を考慮しない相対論的理想気体について評価を行う。テスト問題としては、以下の 2 つの初期条件と終時間について行う。クーラン数は、どちらの問題に対しても 0.2 としてある。

(a) 衝撃波管問題 (Riemann 問題) [2]

x 軸上に物理量の不連続面がある初期条件でテストを行う。この問題は、コードテストとしてよく用いられており、以下のような条件を課す。

$$\begin{aligned} (0.0 < x < 0.5) : \rho_L = 10.0, p_L = 13.3, v_L = 0.0 \\ (0.5 < x < 1.0) : \rho_R = 1.0, p_R = 1e - 5, v_R = 0.0 \end{aligned}$$

(b) 密度の滑らかな揺らぎ

もう一つは、密度にガウス関数で表現される揺らぎが存在し、圧力、速度は一定値であるような初期条件である。圧力、速度が一定であることから、揺らぎは、一定速度で移動していくはずである。初期条件は以下のように与えた。

$$\begin{aligned} \rho &= 1.0 + 0.01 \exp\left[-\frac{(x - 2.0)^2}{0.1^2}\right] \\ p &= 1.0 \\ v &= 0.997 \end{aligned}$$

精度の評価は、L1 ノルムで行う。L1 ノルムは、注目する物理量を  $u$  として、

$$(\Delta u)_{L1} = \sum_j |u_j^{\text{numerical}} - u_j^{\text{exact}}| / N \quad (5.1)$$

で定義され、厳密解  $u_j^{\text{exact}}$  と数値解  $u^{\text{numerical}}$  との差の指標となるものである。本章における L1 ノルムはすべて粒子密度に対して計算した。

### 5.1.1 スキームによる比較

この節では、衝撃波管問題に対して LLF, HLL, HLLC のそれぞれの解法を評価する。

図 3.1 で見られるように、(a) のような初期条件から得られる数値解は以下のようなになる。

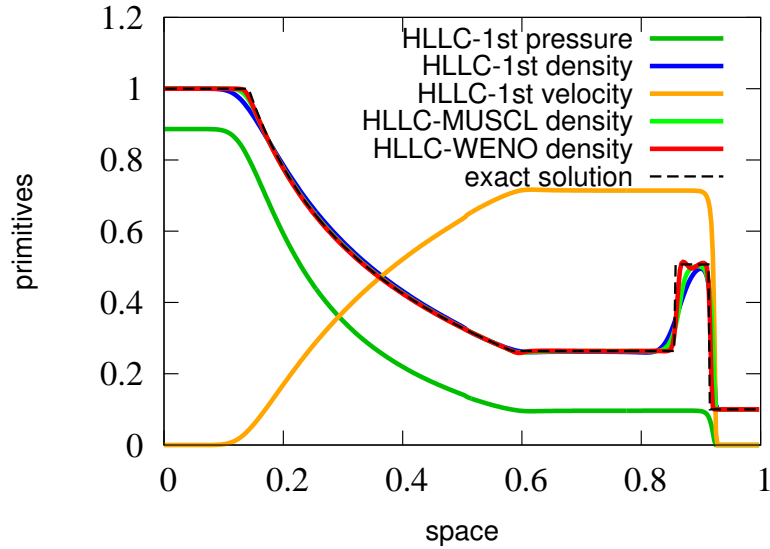


図 5.1  $t=0.5$  における数値解を示す。  $N = 400$ ,  $CFL=0.7$ 。

L1 ノルムは以下のようなになる。

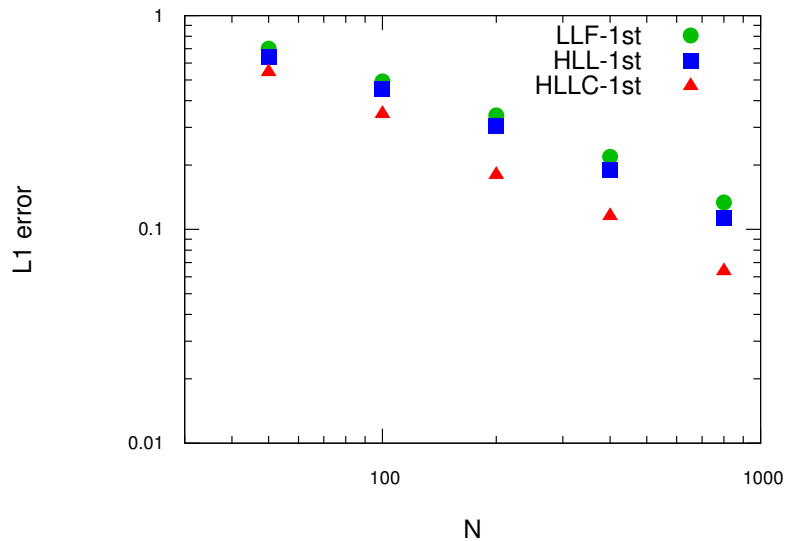


図 5.2 異なる格子点に対する L1 ノルムの変化を示す。すべてのスキームは 1 次精度で評価した。

この結果より、衝撃波の発生するような状況において、HLLC 解法が優れた数値解をもたらすことが示された。

表 5.1 図 5.2 の値を表に示す .

スキーム	格子数	L1 ノルム
LLF-1st	50	7.01e-1
	100	4.93e-1
	200	3.41e-1
	400	2.19e-1
	800	1.34e-1
	1600	8.24e-2
HLL-1st	50	6.43e-1
	100	4.52e-1
	200	3.04e-1
	400	1.90e-1
	800	1.13e-1
	1600	6.95e-2
HLLC-1st	50	5.44e-1
	100	3.47e-1
	200	1.80e-1
	400	1.15e-1
	800	6.38e-2
	1600	4.08e-2

### 5.1.2 精度による比較

この節では、前節のテスト問題で有用性が示された HLLC 解法に関して、1 次精度、MUSCL、WENO という異なった精度で評価を行った。

#### (a) 衝撃波管問題

L1 ノルムは以下のようになる。

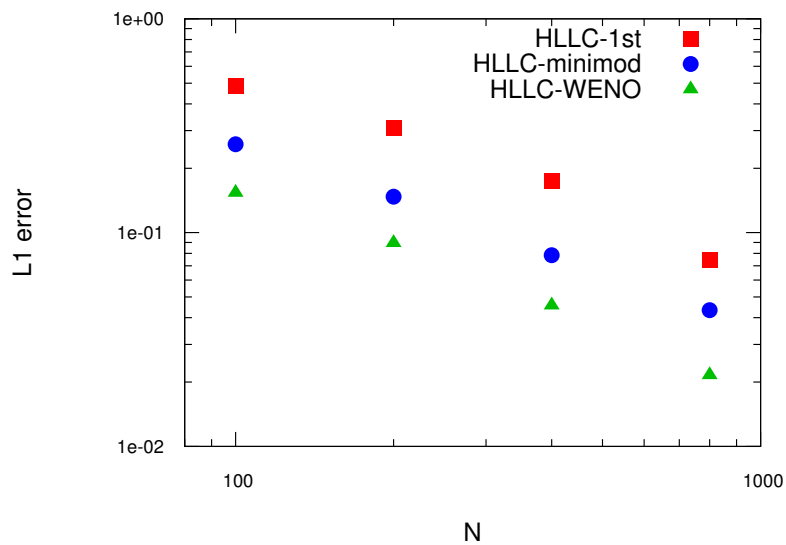


図 5.3 異なる格子点に対する L1 ノルムの変化を示す . MUSCL については、流束制限関数として minimod 関数を用いた。

精度の変化にかかわらず傾きが変わらないのは、高次精度解法が衝撃波付近において、あえて精度を落とすことで数値的安定を優先しているからである。衝撃波管問題の解は、衝撃波付近以外で単純なものであるため、L1 の傾きに変化が見られない。

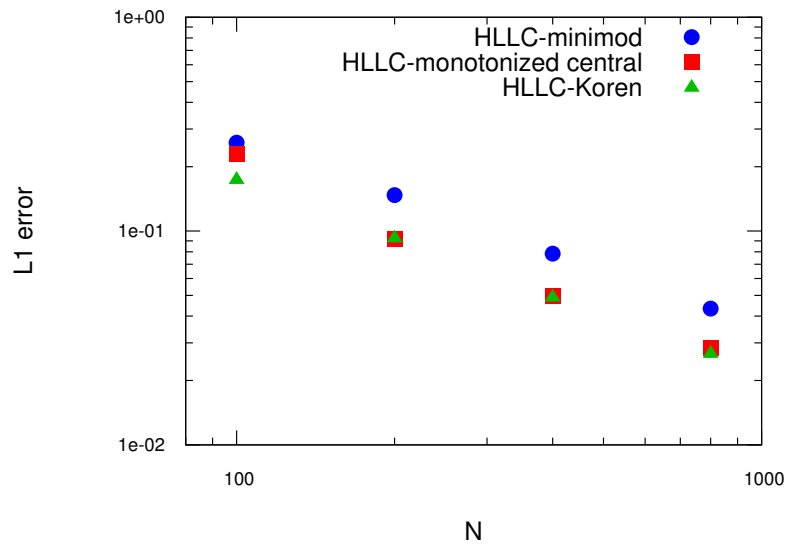


図 5.4 異なる格子点に対する L1 ノルムの変化を示す。流束制限関数として ,minimod ,monotonized central , Koren の 3 種類を用いた。

minimod limiter は物理量の変化を抑える働きが強いため、誤差が大きくなる。衝撃波管問題に対しては、Koren limiter と Monotonized central limiter は同程度の性能となる。



表 5.2 図 5.3 , 図 5.4 の値を表に示す .

スキーム	格子数	L1 ノルム
HLLC-1st	100	4.84e-1
	200	3.09e-1
	400	1.72e-1
	800	7.48e-2
HLLC-minimod	100	2.48e-1
	200	1.32e-1
	400	7.03e-2
	800	3.83e-2
HLLC-monotnized central	100	2.28e-1
	200	9.23e-2
	400	5.00e-2
	800	2.85e-2
HLLC-Koren	100	1.73e-1
	200	9.25e-2
	400	4.89e-2
	800	2.66e-2
HLLC-WENO	100	1.53e-1
	200	8.94e-2
	400	4.56e-2
	800	2.15e-2

続いて、粒子密度の揺らぎに対する精度評価を行う。

(b) 密度の滑らかな揺らぎ

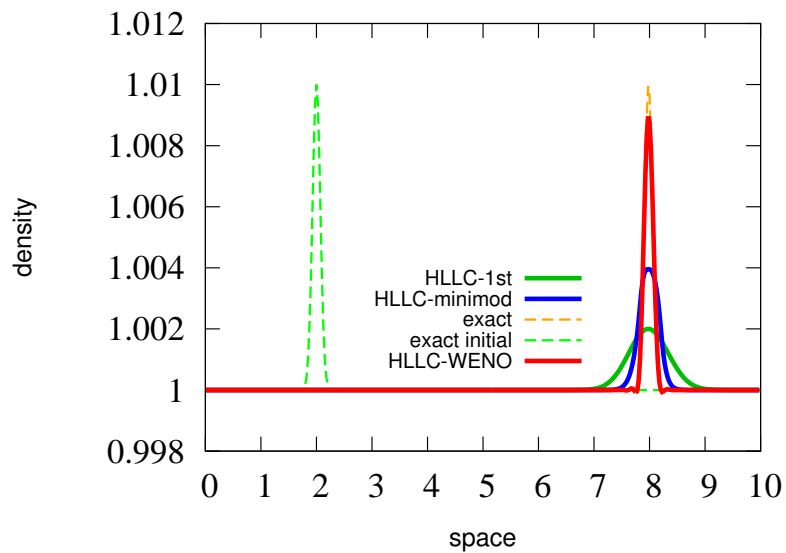


図 5.5  $t=6.0$  における数値解を示す . 用いた解法は , 1 次精度 , MUSCL , WENO である . MUSCL の流速制限関数としては minimod を選択した .  $N=400, CFL=0.2$

L1 ノルムは以下のようなになる .

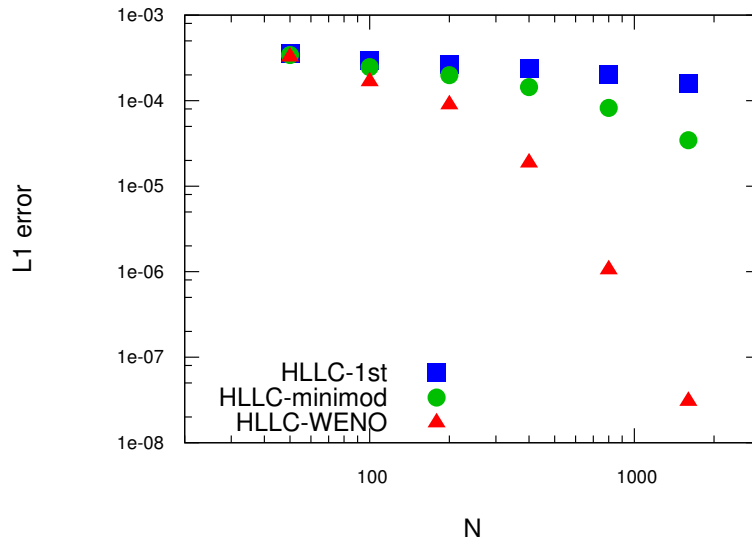


図 5.6 異なる格子点に対する L1 ノルムの変化を示す . MUSCL については , 流束制限関数として minimod 関数を用いた .

衝撃波に比べ , 高次精度化による効果大きい .

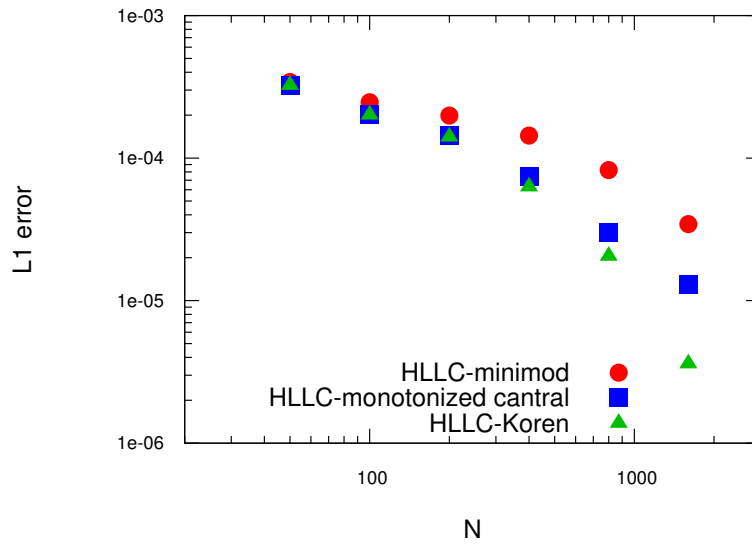


図 5.7 異なる格子点に対する L1 ノルムの変化を示す . 流束制限関数として , minimod ,monotonized central , Koren の 3 種類を用いた .

この問題に対しては Koren limiter が良い性能を持っていることがわかる .

表 5.3 図 5.6, 図 5.7 の値を表に示す.

スキーム	格子数	L1 ノルム
HLLC-1st	50	3.53e-4
	100	2.93e-4
	200	2.67e-4
	400	2.37e-4
	800	2.02e-4
	1600	1.58e-4
HLLC-minimod	50	3.42e-4
	100	2.47e-4
	200	1.99e-4
	400	1.44e-4
	800	8.23e-5
	1600	3.44e-5
HLLC-monotonized central	50	3.24e-4
	100	2.02e-4
	200	1.44e-4
	400	7.38e-5
	800	3.02e-5
	1600	1.30e-5
HLLC-Koren	50	3.24e-4
	100	2.01e-4
	200	1.41e-4
	400	6.28e-5
	800	2.05e-5
	1600	3.60e-5
HLLC-WENO	50	3.24e-4
	100	1.67e-4
	200	8.93e-5
	400	1.87e-5
	800	1.05e-6
	1600	3.05e-8

## 5.2 QGP 状態方程式に関する評価

この節では, バッグモデルによる状態方程式を適用した QGP 流体に対する HLLC 解法の精度評価を行う. 扱うテスト問題は前節と同様である.

ただ, 前節の問題をそのまま QGP 流体に対して行うには, バッグ定数の規格化が必要である. 本研究では, バッグ定数を  $B^{1/4} = 200 \text{ MeV}$  とし, QGP の初期条件としてエネルギー密度を  $10^5 \text{ MeV}/\text{fm}^3$  とした. (2.4) 式より,  $p=1.0$  に対して  $B=0.002$  となる.

まず, 衝撃波管問題に関する精度評価を行う. 初期条件は同様であるが, 終時間は  $t=0.35$  とした. 以下の図が  $t=0.35$  における結果である.

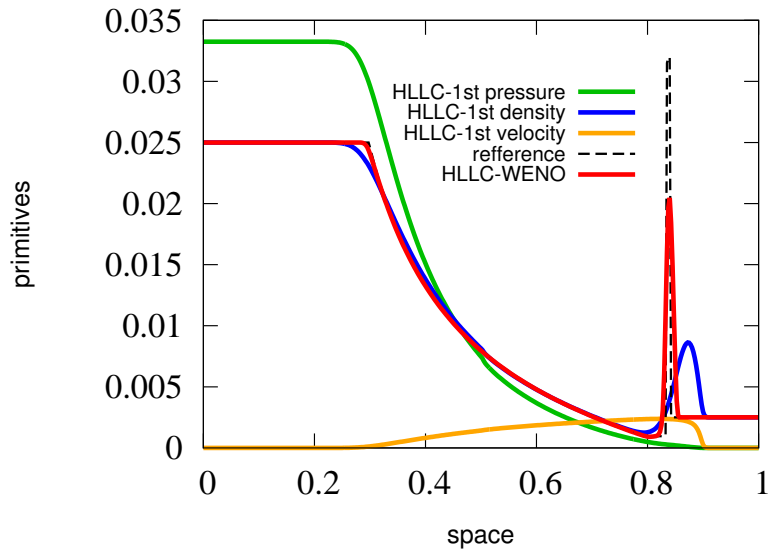


図 5.8  $t=0.35$  における数値解を示す．用いた解法は，HLLC 解法の 1 次精度，MUSCL(minimod)，WENO である． $N = 400, CFL=0.2$ .

L1 ノルムは以下のようになる．

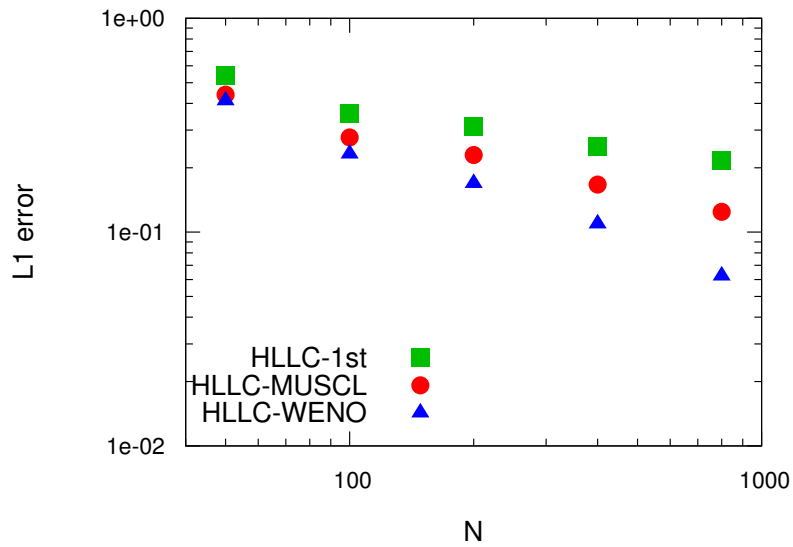


図 5.9 異なる格子点に対する L1 ノルムの変化を示す．MUSCL については，流束制限関数として minimod 関数を用いた．

理想気体と同様に高次精度化による誤差の減少がみてとれる．

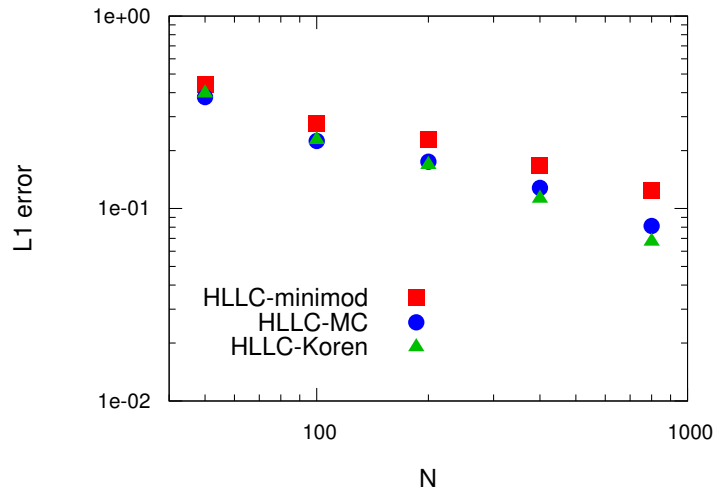


図 5.10 異なる格子点に対する L1 ノルムの変化を示す．流束制限関数として，minimod，monotonized central，Koren の 3 種類を用いた．

衝撃波の存在する解に対しては，Koren limiter と Monotonized central limiter は同程度の性能となる．

表 5.4 図 5.9，図 5.10 の値を表に示す．

スキーム	格子数	L1 ノルム
HLLC-1st	50	5.38e-1
	100	3.59e-1
	200	3.13e-1
	400	2.51e-1
	800	2.17e-1
HLLC-minimod	50	4.40e-1
	100	2.77e-1
	200	2.29e-1
	400	1.67e-1
	800	1.24e-1
HLLC-monotonized central	50	3.79e-1
	100	2.24e-1
	200	1.75e-1
	400	1.28e-1
	800	8.12e-2
HLLC-Koren	50	3.97e-1
	100	2.27e-1
	200	1.69e-1
	400	1.13e-1
	800	6.73e-2
HLLC-WENO	50	4.11e-1
	100	2.32e-1
	200	1.69e-1
	400	1.09e-1
	800	6.24e-2

続いて，粒子密度の揺らぎに対する精度評価を行う．

(b) 密度の滑らかな揺らぎ

$t=6.0$  における移流問題の結果を以下に示す．

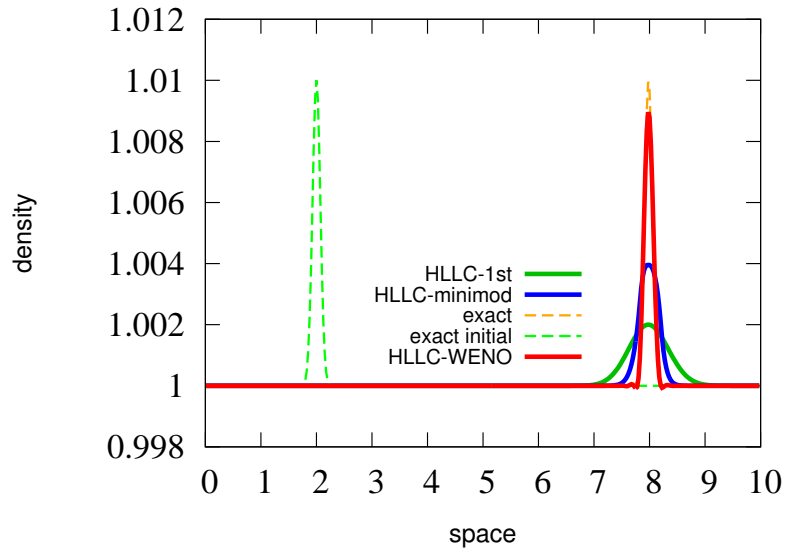


図 5.11  $t=6.0$  における数値解を示す．用いた解法は，1 次精度，MUSCL(minimod),WENO である． $N=400, CFL=0.2$

数値粘性により，揺らぎが抑えられていることがわかる．L1 ノルムは以下のようなになる．

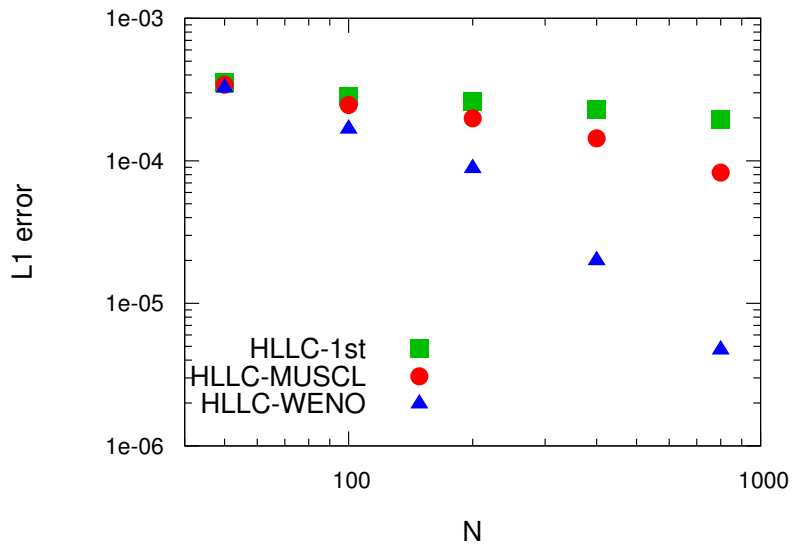


図 5.12 異なる格子点に対する L1 ノルムの変化を示す．MUSCL については，流束制限関数として minimod 関数を用いた．

高次精度化により誤差を抑えることができています．

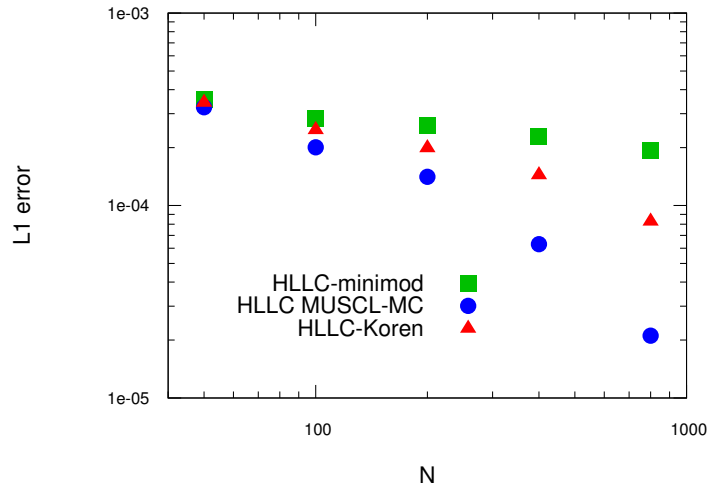


図 5.13 異なる格子点に対する L1 ノルムの変化を示す．流束制限関数として，minimod，monotonized central，Koren の 3 種類を用いた．

滑らかな波に対しては，Koren limiter が良い効果を持っていることがわかる．

表 5.5 図 5.12，図 5.13 の値を表に示す．

スキーム	格子数	L1 ノルム
HLLC-1st	50	3.55e-4
	100	2.85e-4
	200	3.59e-4
	400	2.29e-4
	800	1.94e-4
HLLC-minimod	50	3.42e-4
	100	2.47e-4
	200	1.99e-4
	400	1.44e-5
	800	8.27e-5
HLLC-monotonized central	50	3.24e-4
	100	2.02e-4
	200	1.46e-4
	400	7.69e-5
	800	3.29e-5
HLLC-Koren	50	3.24e-4
	100	2.01e-4
	200	1.41e-4
	400	6.30e-5
	800	2.11e-5
HLLC-WENO	50	3.24e-4
	100	1.67e-4
	200	8.82e-5
	400	1.99e-5
	800	4.70e-6

## 第 6 章

# 結論

本研究は、QGP 流体に対する高精度の流体シミュレーションに向けた研究である。扱う対象としては、相対論的理想気体とバッグモデルをもとにした QGP 状態方程式を適用した流体である。

まず、定性的な議論として、理想気体に対する衝撃波管問題に対する評価により、HLLC 近似 Riemann 解法が激しい物理量変化に対して優れていることを確認した。続いて、HLLC 解法の精度をあげ、格子点の数に対する誤差が小さくなることを確認した。そして QGP 状態方程式を適用した流体に対しても同様の傾向を確認することができた。

次に、計算時間と計算誤差について述べる。1 次精度に比べて、5 次精度の計算は数倍の時間を要する。しかし、例えば QGP 流体の滑らかな揺らぎの問題に関して、 $N=800$  のとき 5 次精度が実現する誤差を 1 次精度で得ようとすれば、およそ  $10^7$  個の格子点を用いなければならない。そのような膨大な数の格子点を用いることは 1 次元の問題でさえ非現実的であるし、2 次元、3 次元となると、一層その差は開くことになる。

以上から、QGP 流体に対して HLLC 解法、高次精度解法が有効であることが確認できた。今後は、多次元で、より実際の現象に近い状況を用いたシミュレーションを行うことが必要であると考えられる。



# 謝辞

本研究において，本学三好隆博助教には，研究に必要な数値流体力学の基礎知識から継続的指導をしていただきました．ここに感謝申し上げます．本学杉立徹教授，志垣賢太准教授，本間謙輔助教，先輩方，4年生の皆様には，研究室ミーティング等において研究の不備に対する指摘や有益な助言を多数いただきました．また，本学川端弘治准教授には，お忙しい中副査として時間を割いていただきました．併せて感謝申し上げます．

本研究を行うにあたり，多くの方々に支えていただきました．重ねてお礼申し上げます．

## 参考文献

- [1] 水田晃 : “相对論的流体方程式の数値的解法 I”, 原子核研究, vol. 55, No. 2, (2011), pp. 60-74.
- [2] 水田晃 : “相对論的流体方程式の数値的解法 II”, 原子核研究, vol. 56, No. 1, (2011), pp. 59-78.
- [3] 水田晃 : “相对論的流体方程式の数値的解法 III”, 原子核研究, vol. 56, No. 2, (2012), pp. 42-62.
- [4] 三好隆博, 箕島敬, 松本洋介: “磁気流体力学に対する近似 Riemann 解法”, <http://www.astro.phys.s.chiba-u.ac.jp/cans/doc/riemann.html>.
- [5] A. Tchekhovskoy, J. C. McKinney, R. Narayan : “WHAM: A WENO-based general relativistic numerical scheme I: Hydrodynamics”, arXiv:0704.2608v1 [astro-ph].
- [6] A. Mignone, G. Bodo : “An HLLC Riemann Solver for Relativistic Flows: I. Hydrodynamics”, arXiv:astro-ph/0506414v2.
- [7] B. Z. Kopeliovich, A. H. Rezaeian: “Applied High Energy QCD”, Int.J.Mod.Phys. E18 (2009) 1629-1696 arXiv:0811.2024 [hep-ph] CERN-2008-004.
- [8] José Maria Martí and Ewald Müller : “Numerical Hydrodynamics in Special Relativity”, Living Rev. Relativity 6, (2003), 7. URL (cited on 2015/10/30): <http://www.livingreviews.org/lrr-2003-7>.
- [9] L. Rezzolla, O. Zanotti: “Relativistic Hydrodynamics”, Oxford Univ Pr (Txt) 2013.
- [10] M. A. Aloy, J. M. Ibáñez, J. M. Martí, and E. Müller : GENESIS: “A High-Resolution Code for Three-dimensional Relativistic Hydrodynamics”, THE ASTROPHYSICAL JOURNAL SUPPLEMENT SERIES, 122:151E166, 1999 May.
- [11] S. M. Sanches Jr., F. S. Navarra, D. A. Fogaça : “The quark gluon plasma equation of state and the expansion of the early Universe”, Nuclear Physics A 937 (2015) 116.
- [12] V. Schneider, U. Katscher, D.H. Rischke, B. Waldhauser, J.A. Maruhn, C.-D. Munz : “New Algorithms for Ultra-relativistic Numerical Hydrodynamics”, Journal of Computational Physics Volume 105, Issue 1, March 1993, Pages 92107.
- [13] “The space-time evolution of a heavy-ion collision, which undergoes a phase transition to a QGP”, <http://www.star.bnl.gov/gorbunov/main/node5.html> [cited on 2016/2/1]