

modified Burgers 方程式に対する
シミュレーション研究

B 1 3 2 2 0 1 河野 慶明

概要^{[1],[2]}

通常の液体や気体のみならず、クォーク・グルーオンプラズマ(QGP)などの極限的物質状態においても、その巨視的なダイナミクスは流体モデルによってよく表現される。しかし、流れを記述する方程式は一般に非線形性や多次元性を持つ極めて複雑な偏微分方程式系であり、その解の性質を理解することは容易ではない。そこで、運動方程式移流項における最低次の非線形性のみを抽出した **Burgers** 方程式を用い、流体、特に衝撃波を伴う圧縮性流体の解の性質や乱流的構造などが研究されてきた。

しかし、電磁プラズマや気体・液体相転移点近傍など、さらに複雑な流体のダイナミクスについては、**Burgers** 方程式ではそれらの特性を適切に近似できないと考えられる。そこで本研究では、さらに高次の非線形性を考慮した **modified Burgers** 方程式に対して高精度な数値解法を新たに開発し、その解の基本的性質を調査した。5次精度 **WENO** 法と3次精度 **SSP Runge-Kutta** 法を用いて高精度かつ安定な数値解法を構築し、衝撃波と膨張波が結合した複合波を正確にとらえることに成功した。また、乱流的な初期擾乱を加え、**modified Burgers** 方程式の解の時間発展を拡散方程式、**Burgers** 方程式と比較し詳細に解析した。

目次

概要

第1章 序論

1-1. Burgers 方程式	4
1-2. 衝撃波の基本的概念	6
1-3. 差分法	8

第2章 微分方程式の数値解法

2-1. 線形移流方程式の一次精度風上差分法	9
2-2. Burgers 方程式の風上差分法	10
2-3. Godunov の定理と TVD 条件	10
2-4. 数値流束	11
2-5. MUSCL 法	13
2-6. 有限体積法	14
2-7. WENO 法	16

第3章 数値解法プログラムのテスト

3-1. 適切なスキーム	18
3-2. 拡散方程式を解く	19
3-3. modified Burgers 方程式	22
3-4. 簡単な乱流を初期状態として設定する	23
3-5. エネルギーに関する議論	25

第4章 結果

第5章 考察

5-1. 初期擾乱にあった問題点	32
5-2. 波数空間の出力結果から	33
5-3. エネルギーの時間変化に対する考察	34

第6章 結論

参考文献

謝辞

第1章 序論

1-1. Burgers 方程式

通常の液体や気体のみならず、クォーク・グルーオンプラズマなどの極限的物質状態においても、その巨視的なダイナミクスは流体モデルによってよく表現される。流体運動を支配する代表的な方程式は Navier-Stokes 方程式で、流体の運動量の保存則を表している。3次元 Navier-Stokes 方程式は次の通り。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (1-1)$$

ここで t は時刻、 (x, y, z) は空間座標、 (u, v, w) は流速、 ρ は密度、 P は圧力、 ν は粘性係数と呼ばれる数値である。ただし水平座標を x 、鉛直座標を z 、水平流速を u としている。これに次の3つの条件を付加する。

1. 流れは1次元的で、 u は x と t の関数。 $u = u(x, t)$, $v = 0$, $w = 0$
2. 圧力傾度力は存在しない。 $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$
3. 密度、粘性係数は空間的、時間的に一定。

このとき(1-1)式は次のように変形される。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad (1-2)$$

これが Burgers 方程式と呼ばれる方程式で、これを解くと衝撃波が生成される様子を見ることができる。また粘性係数 ν を0としたものは非粘性 Burgers 方程式と呼ばれる。次のページの図1と図2にWENO法で Burgers 方程式と非粘性 Burgers 方程式を解いた結果をそれぞれ示す。この図では粘性係数による差はあまり見られないが、 $u(x) = e^{ikx}$ (i は虚数)としたとき(1-2)式の右辺は

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = -k^2 e^{ikx} \quad (1-3)$$

となり、波の減衰が波数 k の2乗に寄っていることがわかる。つまり波数の大きい波ほど減衰させる作用を持っているのである。

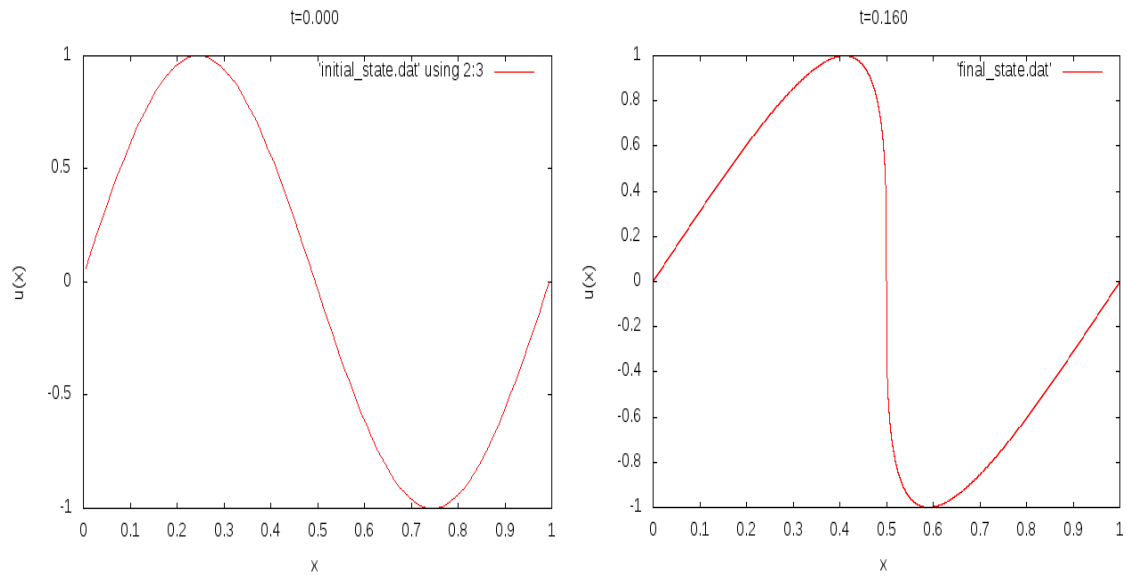


図 1 : 非粘性 Burgers 方程式を WENO 法で解いた結果

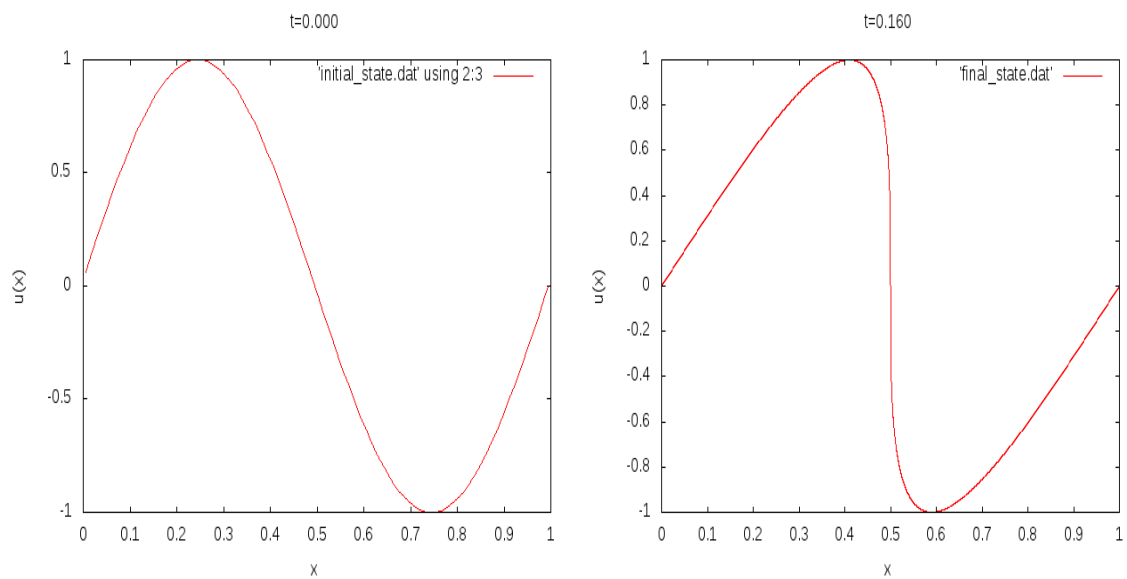


図 2 : Burgers 方程式を WENO 法で解いた結果

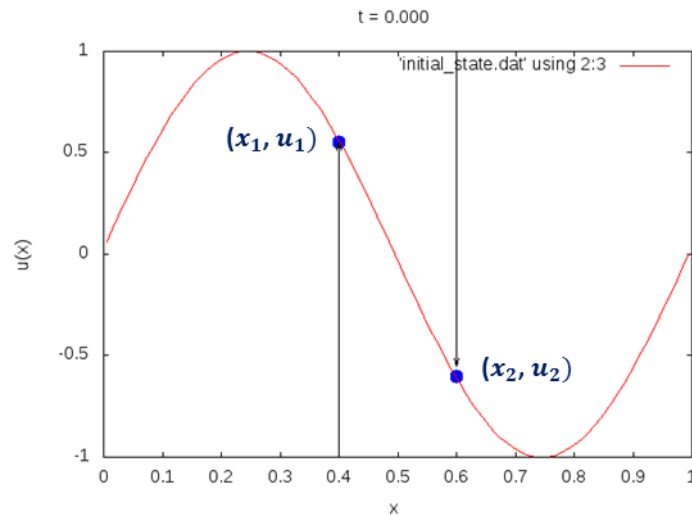


図 3：衝撃波の基本概念の説明

1 - 2. 衝撃波の基本的概念 [3]

非粘性 Burgers 方程式の解を考える。初期状態として図 1 に示した sin 波を設定する。微分方程式に従ってこの分布が変化する。今、 $u(x)$ を i 個の点に離散化させたとき、各点の動く速度は u_i に寄るので各々時間的に一定である。つまり

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_i = u_i \quad (1-4)$$

この式を時間 t について積分すれば次の式を得る。

$$x = u(t=0, \xi_i) t + \xi_i \quad (1-5)$$

ここで $u_i(t=0, \xi_i)$ は $t=0$ のときに $x = \xi_i$ の位置にいた物体がもつ u の値である。すなわち初期条件を表している。

上の図 3 にあるような初期状態における 2 点 $A(x_1, u_1)$ と $B(x_2, u_2)$ を考える。今、この 2 点 A, B における特性線 $x = u_1 * t + x_1$, $x = u_2 * t + x_2$ を考える。特性線とは、各物体が動いた軌跡を表し、特性線にそって動く速度は一定なので $x_1 < x_2$ で、なおかつ $u_1 > u_2$ のとき、時刻 $t = (x_2 - x_1)/(u_1 - u_2)$ で A と B の x 座標が一致する。つまり後ろにあった A が B に追いついてしまう。このように、式 (1-5) で表せる方程式に従う波は必然的に波の追いつきと追い越しが起きてしまうことになる。この場合、粒子系であれば、後ろの粒子が前の粒子を追い越すことができるが、流体だとそうはいかず、後ろの流体が前の流体にぶつかってしまい、激しく減速してしまう。そしてそのエネルギーは内部の熱エネルギーに変換される。このような現象を衝撃波と呼ぶ。上図で考えた衝撃波と特性線の動きの時間変化を次ページの図 4 に示す。このとき S と u_1, u_2 の関係は次のようになっている。

$$u_1 > S > u_2$$

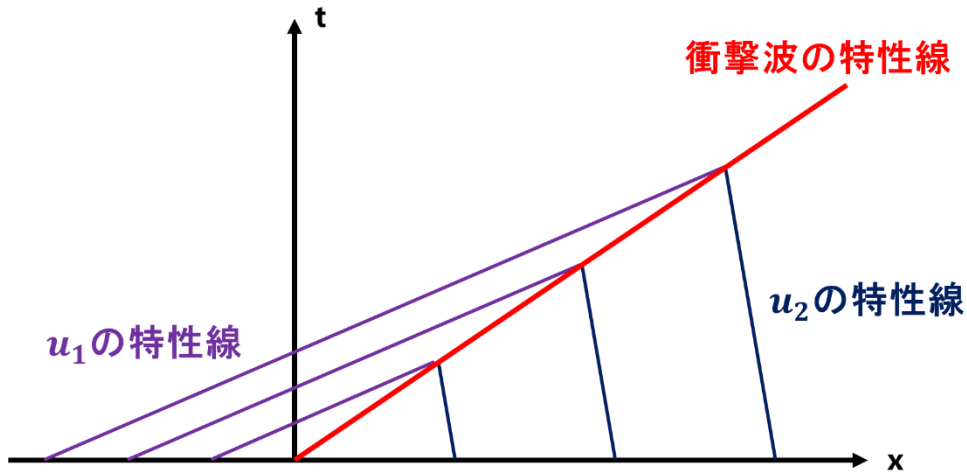


図 4：2点A, Bと衝撃波の特性線

衝撃波が形成されている、と言えるのはジャンプ条件と呼ばれる条件を満たしているときである。Burgers 方程式を'保存形式'と呼ばれる形に変形したものとジャンプ条件を以下に示す。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0 \quad (1-6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (1-7)$$

$$f = \frac{u^2}{2} \quad (1-8)$$

$$s[u] = [f] \quad (1-9)$$

s：衝撃波の速度

これにより衝撃波の速度は流束関数 f を用いた次の式で与えられる。

$$S = \frac{f_2 - f_1}{u_2 - u_1} \quad (1-10)$$

また、衝撃波が形成されるまでの時間は

$$t_{shock} = -\frac{1}{\min(u')} \quad (1-11)$$

で求めることができる。すなわち図 1 のように初期条件が $u(x) = \sin(2\pi x)$ であった時の衝撃波形成までの時間は

$$t_{shock} = \frac{1}{2\pi} \sim 0.159 \quad (1-12)$$

となる。

1-3. 差分法 [4]

差分法とは、微分方程式の数値解法の一つであり、微分方程式の微分を差分に置き換えてできる差分方程式を解くことで元となった微分方程式の近似解を得る方法である。

空間1次元で時間的に変化する物理量 u を考える。 u は連続の値だがここではパラメータ i で離散化させてある。 u の空間微分をテイラー展開すると

$$u_{i+1} = u_i + \frac{du}{dx} \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2u}{dx^2} \right) (\Delta x)^2 + \dots \quad (1-13)$$

$$u_{i-1} = u_i - \frac{du}{dx} \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2u}{dx^2} \right) (\Delta x)^2 + \dots \quad (1-14)$$

これにより微分の差分表示が可能になる。

$$\frac{du}{dx} = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (1-15)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (1-16)$$

これらはそれぞれ一階微分に対する前進差分と後退差分表示である。また(1-13)、(1-14)を組み合わせることで以下式を得ることができる。

$$\frac{du}{dx} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x) \quad (1-17)$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x^2) \quad (1-18)$$

これは1階微分の2次精度中心差分と2階微分の差分式である。以上のようにしてテイラー展開から差分式を求めることができる。

ここでは u'' を上記の差分によって計算すると2次精度となっているが、 $u_{i-3} \sim u_{i+3}$ の間で中心差分を数種類計算し、さらにテイラー展開を $(\Delta x)^2$ の項で打ち切るのではなく $(\Delta x)^8$ の項まで計算することによって良い精度の差分法を作り出すことができる。その成果を以下に示す。中心差分はそれぞれ以下のようにとる。

$$u_i'' = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} - \frac{1}{12} (\Delta x)^2 u_i^{(4)} - \frac{1}{360} (\Delta x)^4 u_i^{(6)} - \frac{1}{20160} (\Delta x)^6 u_i^{(8)} \quad (1-19)$$

$$u_i'' = \frac{u_{i+2} - 2u_i + u_{i-2}}{(2\Delta x)^2} - \frac{1}{3} (\Delta x)^2 u_i^{(4)} - \frac{2}{45} (\Delta x)^4 u_i^{(6)} - \frac{1}{315} (\Delta x)^6 u_i^{(8)} \quad (1-20)$$

$$u_i'' = \frac{u_{i+3} - 2u_i + u_{i-3}}{(3\Delta x)^2} - \frac{3}{4} (\Delta x)^2 u_i^{(4)} - \frac{9}{40} (\Delta x)^4 u_i^{(6)} - \frac{81}{2240} (\Delta x)^6 u_i^{(8)} \quad (1-21)$$

以上の3つの差分式をうまく組み合わせることによって次の式が得られる。

$$u_i'' = 1.5 \left[\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} \right] - 0.6 \left[\frac{u_{i+2} - 2u_i + u_{i-2}}{(2\Delta x)^2} \right] + 0.1 \left[\frac{u_{i+3} - 2u_i + u_{i-3}}{(3\Delta x)^2} \right] + O(\Delta x^6) \quad (1-22)$$

この差分近似は6次精度となっている。

第2章 微分方程式の数値解法 [5]

2-1. 一時精度風上差分法

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad a > 0 \quad (2-1)$$

上記の線形移流方程式を考える。第1項を前進差分、第2項を中心差分で近似すると

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (2-2)$$

$$u_i^{n+1} = -\frac{1}{2}cu_{i+1}^n + u_i^n + \frac{1}{2}cu_{i-1}^n \quad c = \frac{a\Delta t}{\Delta x} \quad (2-3)$$

c はクーラン数と呼ばれる値である。(2-3)式の右辺の第1項が負であるため u_i^{n+1} は負になりうる。これは数値的に不自然な振動による現象である。 u があらゆる物理量が負になりうるものであれば解が無意味なものになることはとりあえずないが、絶対温度などの負になり得ない物理量を表す場合は非常に厄介である。そこで単純な解決策として第2項に後退差分を用いると

$$u_i^{n+1} = (1 - c)u_i^n + cu_{i-1}^n \quad (2-4)$$

$$0 \leq c \leq 1 \quad \text{【CFL条件】} \quad (2-5)$$

となる。CFL条件により u_i^{n+1} は必ず正になる。このように移流項の離散化に後退差分を用いる方法を風上差分という。これは風上から値を補間することを意味しており、実際は流れの速度 a の正負を調べて風上がどちらの方向にあたるのかを見極め、補間方法を切り替える必要がある。

$$u_i^{n+1} = -\frac{1}{2}c(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{1}{2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \quad (2-6)$$

(2-4)式はこのように変形できる。これを見ると中心差分に2階微分の形を足し、補正しているのがわかる。すなわち数値的な拡散を加えて安定化させているのである。それゆえ1次精度風上差分法で求めた解はなまることとなる。

2-2. Burgers 方程式の風上差分法

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2-7)$$

前節では線形移流方程式の風上差分法を導いたが、今度は Burgers 方程式の風上差分法を導いていく。波が x 軸正の方向に進むとき空間微分の項は後退差分をとらなければならない。波が x 軸負の方向に進むとき空間微分の項は前進差分をとらなければならない。 u を空間に対しては下付き文字 i で離散化、時間に対しては上付き文字 n で離散化させ、

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta u_i \quad (2-8)$$

と書くことにする。波が x 軸正の方向に伝わるときは、空間微分の項に後退差分を用いなければならない、 Δu は次のようになる。

$$\Delta u_i = \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{u_{i-1}^2}{2} - \frac{u_i^2}{2} \right) \quad (2-9)$$

また波が x 軸負の方向に伝わる時は、空間微分の項には前進差分を用いなければならない、 Δu は次のようになる。

$$\Delta u_i = \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{u_i^2}{2} - \frac{u_{i+1}^2}{2} \right) \quad (2-10)$$

となる。線形移流方程式では流れの速度は a であったが今回は流れの速度が u となっている。このことはジャンプ条件と呼ばれる条件から導くことができる。

2-3. Godunov の定理と TVD 条件

Godunov の定理は、『2次またはそれ以上の高次精度を持つどのような線形スキームも解の単調性を維持できない』というものである。解の単調性を維持できないということは言い換えれば解に数値振動が起きてしまうということである。しかし単調性を維持しながらも高次精度も実現したい。

数値振動を回避するには人工粘性項を加える方法もあるがこれは解が鈍ってしまうので適さない。振動が生じないスキームを用いると良いが、1次精度風上差分法では衝撃波を表現しきれず散逸的になってしまう。それゆえ解の単調性を維持する、という条件を少し緩和して次の条件を満たす高次精度スキームを探すことにする。

$$TV(u^n) = \sum_i \|u_{i+1}^n - u_i^n\| \quad (2-11)$$

$$TV(u^{n+1}) \geq TV(u^n) \quad (2-12)$$

これを TVD 条件といい、TVD 条件を満たすスキームを TVD スキームと呼ぶ。

2-4. 数値流束

Burgers 方程式は次のように変形できる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (2-13)$$

$$f = \frac{u^2}{2} \quad (2-14)$$

(4-5)式を $x = x_{i-1/2} \sim x_{i+1/2}$ で積分すると

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u dx + f_{i+1/2} - f_{i-1/2} = 0 \quad (2-15)$$

下の図 5 から次の関係が成り立つことは明らかである。

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u dx = u_i \Delta x \quad (2-16)$$

(4-8)を(4-7)に代入し、時間微分について前進差分をとれば以下が導ける。

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{f_{i-1/2} - f_{i+1/2}}{\Delta x} = 0 \quad (2-17)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{i+1/2} - f_{i-1/2}) \quad (2-18)$$

ここで Burgers 方程式における $f_{i-1/2}$, $f_{i+1/2}$ はそれぞれ

$$f_{i-1/2} = \frac{(u_{i-1/2})^2}{2}, \quad f_{i+1/2} = \frac{(u_{i+1/2})^2}{2} \quad (2-19)$$

を示す。式(4-7)が示すところは、 $\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u dx$ の時間変化はこの時間内に左右の境界

を通過して出入りする流束の差に等しいということである。この関数 $f_{i+\frac{n}{2}}$ ($n = 1, 2, 3 \dots$)は

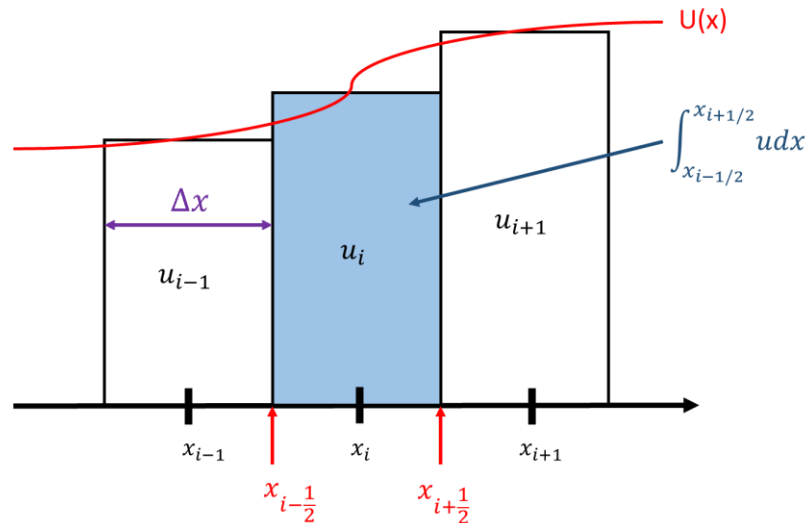


図 5: 関数 $u(x)$ を離散化させている詳しい様子

一般的にチルダをつけて \tilde{f} と書き、数値流速と呼ばれる。 \tilde{f} は離散化した境界の値であるため一意に決めることはできない。 \tilde{f} の決め方には複数ある。Roe法と呼ばれる方法はその中でも比較的簡単な決め方で、次の式で数値流速を求める。

$$\tilde{f}_{i+1/2} = \frac{1}{2} \left(\frac{(u_{i+1})^2}{2} + \frac{(u_i)^2}{2} \right) + \frac{1}{2} \left\| \frac{1}{2} (u_{i+1} + u_i) \right\| (u_{i+1} - u_i) \quad (2-20)$$

この絶対値を取っている値 $\frac{1}{2}(u_{i+1} + u_i)$ はジャンプ条件と呼ばれる条件から求めた衝撃波の速度である。

波がx軸正の方向に伝わる時

$$\tilde{f}_{i+1/2} = \frac{(u_i)^2}{2} \quad (= f_i) \quad (2-21)$$

波がx軸負の方向に伝わる時

$$\tilde{f}_{i+1/2} = \frac{(u_{i+1})^2}{2} \quad (= f_{i+1}) \quad (2-22)$$

下の図6に一次精度風上差分法の数値流速の決定の仕方を示す。要するに波の上流、言い換えれば風上から値を補間している。

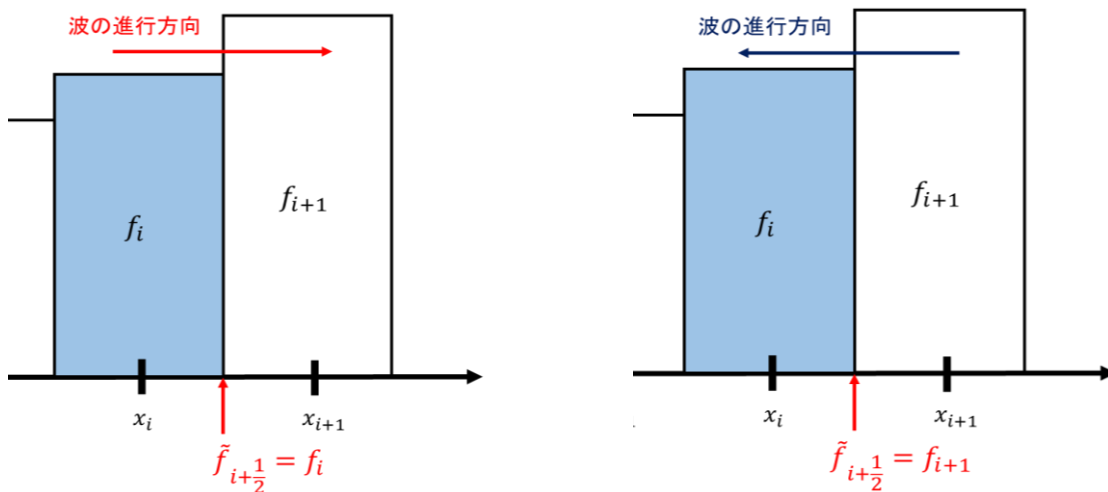


図 6 : 一次精度風上差分法での数値流速の決定

2-5. MUSCL法

MUSCL法とは、 $i+1/2$ の位置の右と左の物理量 u の状態 (u_R, u_L)を囲むいくつかの位置での物理量から内挿によって決める手法である。これによって高精度を維持することができるのである。以下で詳しく説明をする。

一次精度風上差分法はTVD条件を満足する。この性質を妨げない非線形補間法がMUSCL法である。つまり $i+1/2$ の右と左の物理量 u の状態 u_R, u_L を決定し、それによって数値流束 \tilde{f} を計算する。

$$\tilde{f}_{i+1/2} = \frac{1}{2} \left(\frac{(u_{i+1/2}^R)^2}{2} + \frac{(u_{i+1/2}^L)^2}{2} \right) + \frac{1}{2} \left\| \frac{1}{2} (u_{i+1/2}^R + u_{i+1/2}^L) \right\| (u_{i+1/2}^R - u_{i+1/2}^L) \quad (2-23)$$

これが実際に用いた数値流束の計算式である。形は(2-20)式と変わらないが、 u_{i+1} が $u_{i+1/2}^R$ に、 u_i が $u_{i+1/2}^L$ に置き換わっている。それゆえ(2-20)式による手法よりもより細かく計算していることになる。既知なのは格子点上の物理量 $u(\dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots)$ である。これは格子点を囲むセルの代表値として定義されている。もちろんこれは物理量 u がセル内で一定であるという仮定に基づくものではある。この $u_{i+1/2}^R, u_{i+1/2}^L$ の決定の仕方は多くあるが代表的なものはMUSCL法とWENO法であろう。これらの手法を説明した後、それらのうちどれが一番適しているかを、実際にburgers方程式を解く実験によって確かめ、選ばなければならない。

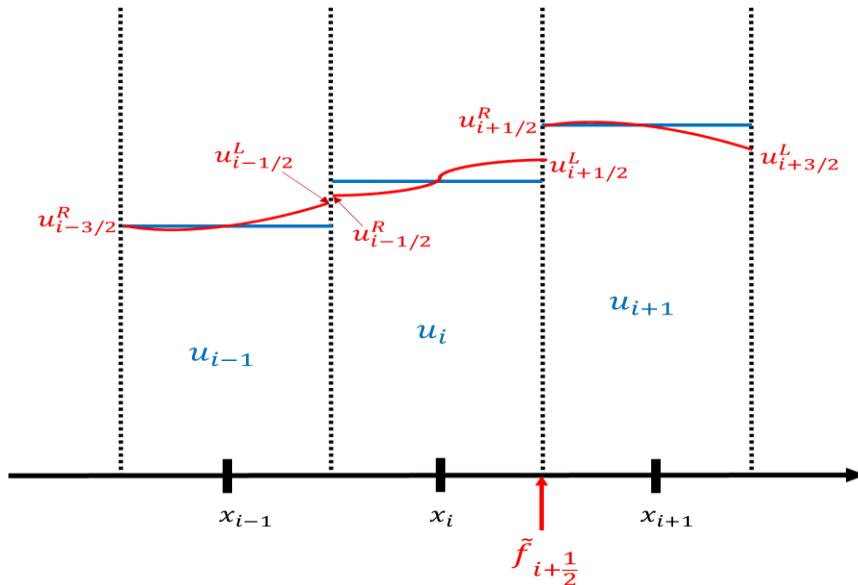
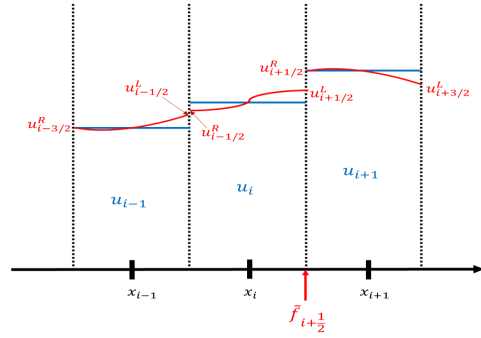


図 7: MUSCL法の考え方

図 8 : MUSCL法の考え方

2-6. 有限体積法

右の図を参考に説明する。ここでわかっているのは格子点上の u の値、つまり $u(\dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots)$ である。有限体積法ではこれらの物理量は格子点上の値ではなくそれを囲むセルの代表値として定義される。セル内で u が一定であると定義することは1次精度の近似に相当する。同様にセル内で線形であると仮定すれば2次精度の近似となり、さらにセル内で2次曲線の分布を仮定すれば3次精度の空間解像度を得ることができる。



一般にセル内の物理量の分布は

$$u(x) = u_i + \frac{1}{\Delta x} (x - x_i) \delta_i u + \frac{3\beta}{2(\Delta x)^2} \left[(x - x_i)^2 - \frac{(\Delta x)^2}{12} \right] \delta_i^2 u$$

$$\left(x_{i-\frac{1}{2}} \leq x \leq x_{i+\frac{1}{2}} \right) \quad (2-24)$$

ただし

$$u_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{i-1/2}^{i+1/2} u(x) dx \quad (2-25)$$

と表すことができる。 $\beta = 1/3$ のときこれは2次曲線の分布となり3次精度を与えることになる。差分表示を

$$\delta_i u = \frac{1}{2} (u_{i+1} - u_i) \quad (2-26)$$

$$\delta_i^2 u = u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} \quad (2-27)$$

と定義すればセル境界での物理量は

$$u_{i+1/2}^L = u_i + \frac{1}{4} (1 - \beta) (u_i - u_{i-1}) + \frac{1}{4} (1 + \beta) (u_{i+1} - u_i) \quad (2-28)$$

$$u_{i+1/2}^R = u_{i+1} - \frac{1}{4} (1 + \beta) (u_{i+1} - u_i) - \frac{1}{4} (1 - \beta) (u_{i+2} - u_{i+1}) \quad (2-29)$$

となる。右辺の第1項は1次精度に相当する。LとRは境界の左と右の値をそれぞれ表している。ここで1次精度と高精度を使い分けるためにパラメータ ε を導入し

$$u_{i+1/2}^L = u_i + \frac{\varepsilon}{4} [(1 - \beta) (u_i - u_{i-1}) + (1 + \beta) (u_{i+1} - u_i)] \quad (2-30)$$

$$u_{i+1/2}^R = u_{i+1} - \frac{\varepsilon}{4} [(1 + \beta) (u_{i+1} - u_i) + (1 - \beta) (u_{i+2} - u_{i+1})] \quad (2-31)$$

と書く。2次精度を求めたいときには $\beta = -1, \varepsilon = 1$ を代入すれば

$$u_{i+1/2}^L = u_i + \frac{1}{2}(u_i - u_{i-1}) \quad (2-32)$$

$$u_{i+1/2}^R = u_{i+1} - \frac{1}{2}(u_{i+2} - u_{i+1}) \quad (2-33)$$

となる。また同様に $\beta = 0$ とすれば風上側に風下側の一点を加えた 2 次精度の形となり、 $\beta = 1$ ではセル境界の値は両側のセル平均の代数平均となり、 $u_{i+1/2}^L = u_{i+1/2}^R$ が成り立つようになる。このように内、外挿の係数を選ぶことで 1 次から 3 次までの精度の内挿法が定義できる。それを利用することで数値流速を

$$\tilde{f}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [(cu)_R + (cu)_L - (|c|u_R - |c|u_L)] \quad (2-34)$$

と評価することができる。これを Roe 法に直すと

$$\tilde{f}_{i+1/2} = \frac{1}{2} \left(\frac{(u_{i+1/2}^R)^2}{2} + \frac{(u_{i+1/2}^L)^2}{2} \right) + \frac{1}{2} \left\| \frac{1}{2}(u_{i+1/2}^R + u_{i+1/2}^L) \right\| (u_{i+1/2}^R - u_{i+1/2}^L) \quad (2-35)$$

ができあがる。これにより数値流速を求めることができる。さらに

$$u_{i+1/2}^L = u_i + \frac{\varepsilon}{4} \left[(1 - \beta) \Phi_{i-\frac{1}{2}}(u_i - u_{i-1}) + (1 + \beta) \Phi_{i+\frac{1}{2}}(u_{i+1} - u_i) \right] \quad (2-36)$$

$$u_{i+1/2}^R = u_{i+1} - \frac{\varepsilon}{4} \left[(1 + \beta) \Phi_{i+\frac{1}{2}}(u_{i+1} - u_i) + (1 - \beta) \Phi_{i+\frac{3}{2}}(u_{i+2} - u_{i+1}) \right] \quad (2-37)$$

上記のように補正する。ここでの Φ は流束制限関数と呼ばれる関数である。この関数は TVD スキームを満足させるために用いられる。

2-7. WENO 法 [6], [7]

ENO 法は5つのステンシル $u_{i-2} \sim u_{i+2}$ を用いて3つの多項式 $p_1(u_{i-2}, u_{i-1}, u_i)$ 、 $p_2(u_{i-1}, u_i, u_{i+1})$ 、 $p_3(u_i, u_{i+1}, u_{i+2})$ を構成し、一番滑らかなものを補間方法として採用するという手法である。衝撃波のような不連続面があるときは、不連続を含まないステンシルから作られた多項式を選べば滑らかな補間が可能となる。しかしこの ENO 法には5つのステンシルを用いているのに3次精度しか出ないという欠点がある。その解決策として $p_1 \sim p_3$ の重みつき平均で補間関数を構築することにより3次の打ち切り誤差を相殺するような重みで足し合わせることができる。それにより5次精度を達成できる。この手法を Weighted ENO 法、あるいは WENO 法と呼ぶ。Godunov の定理は『2次精度以上のすべての線形スキームは数値振動を発生する』というものであったが WENO 法は非線形スキームなので数値振動の発生は抑えられている。

$$\begin{aligned} p_1(u_{i-2}, u_{i-1}, u_i) &= \frac{1}{3}u_{i-2} - \frac{7}{6}u_{i-1} + \frac{11}{6}u_i \\ p_2(u_{i-1}, u_i, u_{i+1}) &= -\frac{1}{6}u_{i-1} + \frac{5}{6}u_i + \frac{1}{3}u_{i+1} \\ p_3(u_i, u_{i+1}, u_{i+2}) &= \frac{1}{3}u_i + \frac{5}{6}u_{i+1} - \frac{1}{6}u_{i+2} \end{aligned} \tag{2-38}$$

補間関数の滑らかさは以下の smoothness indicator で評価する。

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{13}{12}(u_{i-2} - 2u_{i-1} + u_i)^2 + \frac{1}{4}(u_{i-2} - 4u_{i-1} + 3u_i)^2 \\ S_2 &= \frac{13}{12}(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1})^2 + \frac{1}{4}(u_{i-1} - u_{i+1})^2 \\ S_3 &= \frac{13}{12}(u_i - 2u_{i+1} + u_{i+2})^2 + \frac{1}{4}(3u_i - 4u_{i+1} + u_{i+2})^2 \end{aligned} \tag{2-39}$$

さらにパラメータ α を次の式で定義する。

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{0.1}{S_1 + \varepsilon} \\ \alpha_2 &= \frac{0.6}{S_2 + \varepsilon} \\ \alpha_3 &= \frac{0.3}{S_3 + \varepsilon} \end{aligned} \tag{2-40}$$

分母にある ε は微小な値で α の発散を防ぐための微小な量である。

続いて以下の式でWの値を算出する。

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \\ W_2 &= \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \\ W_3 &= \frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \end{aligned} \quad (2-41)$$

以上を用いて格子境界左の値は次のように求める。

$$u_{i+1/2}^L = W_1 p_1 + W_2 p_2 + W_3 p_3 \quad (2-42)$$

左右反転させて考えれば格子境界右の値も $u_{i-2} \sim u_{i+2}$ から算出することができる。これがWENO法による境界値の求め方である。

3章 数値解法プログラムのテスト [8]

3-1. 適切なスキーム

1次精度風上差分法やWENO法、MUSCL法を4章で説明したがこれらのうちどれが適切なスキームかを決定しなければならない。そのためそれらの4つの手法で線形移流方程式を、周期境界のもとで解き、解のなまりかたを見ることにする。解く方程式を以下に示す。線形移流方程式を(3-1)式に示す。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (3-1)$$

初期条件として正弦関数を入れる。すなわち

$$t = 0 \quad : \quad u_i = \sin\left(\frac{2\pi}{n} i\right) \quad (3-2)$$

を与える。 n は空間 x を区切る数、 i はそのナンバリングを示す。線形移流方程式(5-1)を見れば明らかな通り、波の速度は1である。ゆえに $t = 1.00, t = 2.00, \dots$ で波は初期状態の位置に戻ることになる。結果を下の図9に示す。水色で示されているのが厳密解であるが、結果からWENO法が一番解のなまりが小さく、次いで制限関数としてmonotonized central limiterを用いたMUSCL法、制限関数としてminmod limiterを用いたMUSCL法と続き、1次精度風上差分法が最も解がなまっていることがわかる。それゆえ、ここから先は微分方程式を解くときには5次精度のWENO法を用いていくことにする。

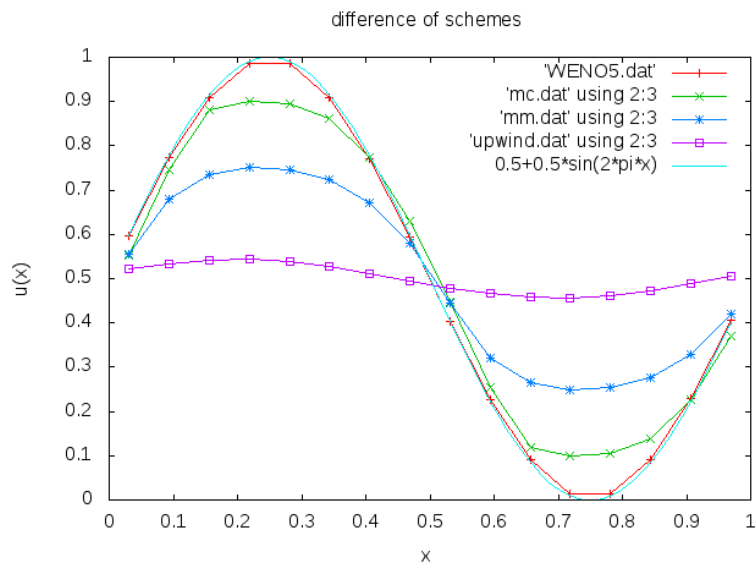


図 9 : 各スキームの比較の結果

3-2. 拡散方程式を解く

非粘性 Burgers 方程式から空間微分の項を削除し、粘性項を付け加えたものを拡散方程式という。拡散方程式は熱が物質の移動を伴わずに高温側から低温側へ伝わる、いわゆる熱伝導を記述する以下の方程式である。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3-3)$$

この方程式は手計算により厳密解を簡単に求めることができるため、数値計算プログラムのテストに最適である。初期条件として $u(x, t=0) = \sin(2\pi x)$ を設定したときの拡散方程式の厳密解は次の通り。

$$u(x, t) = \sin(2\pi x) * e^{-4\pi^2 \nu t} \quad (3-4)$$

さらにエネルギーの値を次の式で定義する。

$$E = \int_0^1 u^2 dx \doteq \sum_i u_i^2 * \Delta x \quad (3-5)$$

(3-5) 式に (3-4) 式を代入して

$$\begin{aligned} E &= \int_0^1 [\sin(2\pi x) * e^{-4\pi^2 \nu t}]^2 dx \\ &= E_0 * e^{-8\pi^2 \nu t} \end{aligned} \quad (3-6)$$

この式が示すとおり、全エネルギーは $e^{-8\pi^2 \nu t}$ に従って減衰していく。実際に数値計算を用いて拡散方程式を解き、全エネルギーの時間変化を片対数グラフでプロットした結果を下図 10 に示す。この結果は \sin 波を 100 点で離散化させて数値計算を行った結果である。上記の式で算出した理論値と数値計算の結果が良く一致していることがわかる。なおここでは粘性係数は $\nu = 1.0 \times 10^{-5}$ として計算している。

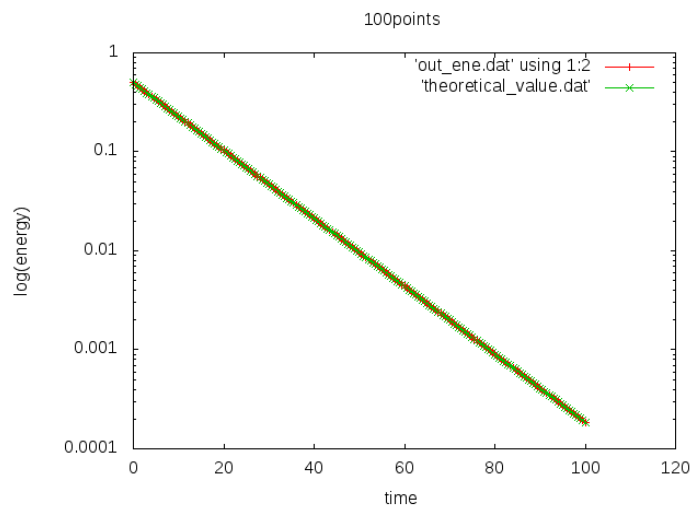


図 10: 100 点で離散化させたときのエネルギー値の理論値と数値計算の結果の比較

これから行う実験は、初期条件として乱流的な擾乱を与える。それゆえ、波数の大きいこまかい波もなるべく正確に記述できるような解法を開発する必要がある。そこで、**Burgers** 方程式の右辺の x の二階微分の、より正確な差分近似の構築を行った。6次精度中心差分を計算して導入したのでその動作確認をする必要がある。それには粘性項だけを残した拡散方程式を解くテストングが最適といえるだろう。

前頁では **sin** 波を 100 点で離散化させ拡散方程式を解いたが、もっと大雑把な離散化でも方程式は満足に解け、エネルギー値は理論値と一致するのかを調べる。すなわち細かい波を表現するのにグリッドの数がどれほど必要なのかわかる見なければならぬ。しかしグリッドの数を増やせば増やすほど計算結果が性格になるのは当たり前であり、グリッド数を決める「物理」も「数学」もないので、乱暴な言い方をすると、「どこで妥協するか」という問題になってくる。

以下に **sin** 波を 8 点、4 点、2 点で離散化させたときの結果を示す。これらの結果から、8 点あれば波を十分表現することができ、正確に数値計算を行うことができるという結論に至った。グリッド数を下げたときに誤差が出るメカニズムは当然、差分化によるものであり、差分近似がグリッド数を下げることにより大雑把になることによるものである。

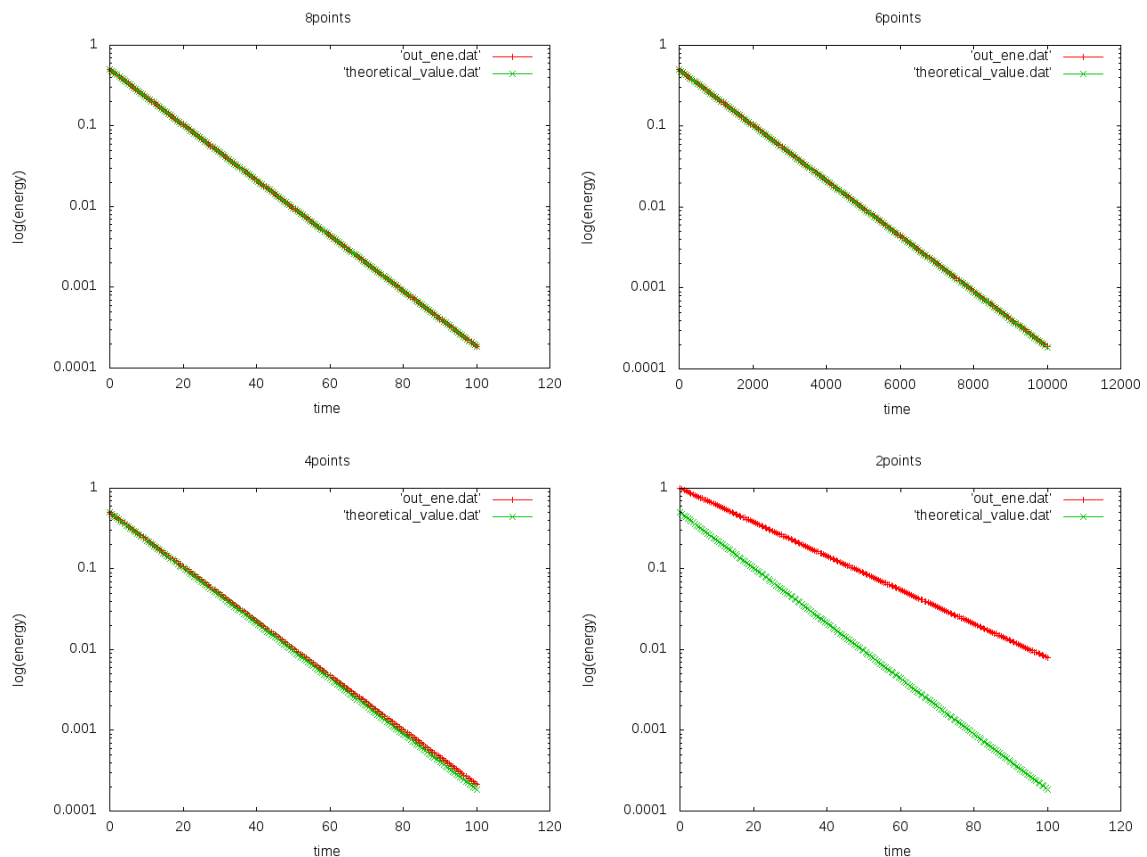


図 11：2～8 点で離散化させたときのエネルギー値の理論値と数値計算の結果の比較

さらにここから数値計算プログラムに手を加え、結果をフーリエ変換したものを波数空間で出力できるようにした。この拡散方程式では初期条件が $u = \sin(2\pi x)$ なので波数は当然 2π であり、その場所だけが値を持つことになる。図 12 は正しい結果といえる。

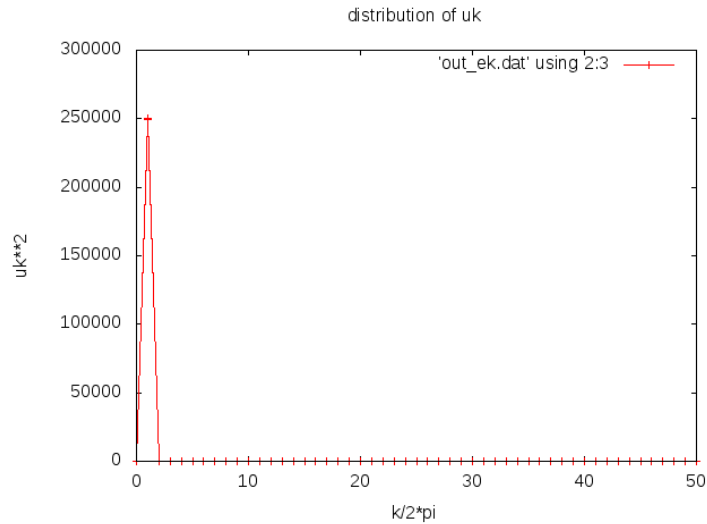


図 12 : 波数空間での数値計算の結果

この出力結果の横軸は波数 k を 2π で割った値になっているが、これをモード数と呼ぶ。波数空間での数値計算の結果を示すときはこれから先、このモード数（またはその自然対数をとったもの）を横軸にとることにする。

3-3. modified Burgers 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^3}{3} \right) = 0 \quad (3-7)$$

上記の modified Burgers 方程式と呼ばれる微分方程式を解く。Burgers 方程式のときと同様、ジャンプ条件より波の速度を求め、その正負により風上から値を補間する方法で解く。実際に用いた数値流速の決定方法は以下の通り。

$$\tilde{f}_{i+1/2} = \frac{1}{2} \left(\frac{(u_{i+1/2}^R)^3}{3} + \frac{(u_{i+1/2}^L)^3}{3} \right) - \frac{1}{2} \left\| \frac{1}{3} \left[(u_{i+1/2}^R)^2 + u_{i+1/2}^R u_{i+1/2}^L + (u_{i+1/2}^L)^2 \right] \right\| (u_{i+1/2}^R - u_{i+1/2}^L) \quad (3-8)$$

初期状態として $\sin(2\pi x)$ を設定し、方程式を解いた結果を左下の図 13 に示す。この図は赤い線が初期状態、緑色の線が $t = 0.20$ の時点での解となっている。衝撃波と膨張波の複合波がはっきりと見て取れる。

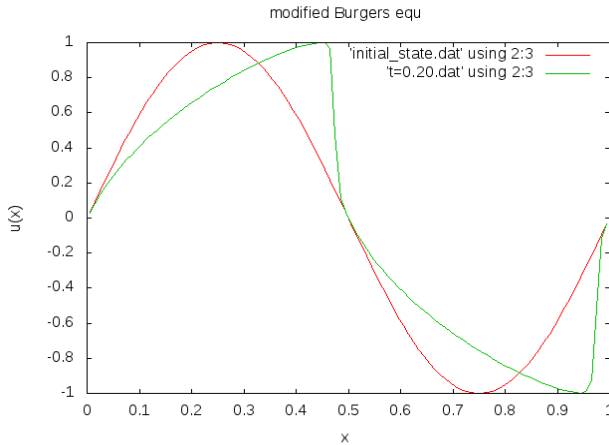


図 13 : modified Burgers 方程式を解いた結果

膨張波の基本概念を説明する。衝撃波の速度を S 、衝撃波より左の領域での流体の速度を u_1 、衝撃波より右の領域での流体の速度を u_2 とする。膨張波は $u_1 > S$ かつ $u_2 > S$ のときに起きる。第 1 章の図 4 と同じように、後ろの流体が前の流体に追いついて衝突することで衝撃波が生じている。しかし衝撃波より右の流体の速度 u_2 は衝撃波の速度 S よりも大きいので追いつかれずそのまま右に流れていくことになる。それゆえ流体の密度が極端に小さい空白な場所ができることになる。これが膨張波である。

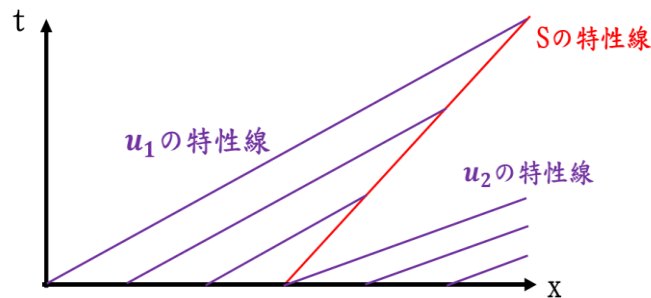


図 14 : 衝撃波と膨張波の複合波のできる様子

3-4. 簡単な乱流を初期状態として設定する

本実験は多数の異なる波数と位相を持つ波の重ねあわせを“乱流的な初期擾乱”とし、それを初期状態として拡散方程式、Burgers 方程式、modified Burgers 方程式を解きその結果を比べる。それを行うにあたって、まず波数の異なる2つの波を異なる位相で重ね合わせたものを初期状態として3つの偏微分方程式を解いてテストングした。その結果を示す。具体的な初期状態は以下の通り。

$$u(x) = \frac{1}{2} \left[\cos(2\pi x) + \cos\left(4\pi x + \frac{\pi}{3}\right) \right] \quad (3-9)$$

これを初期状態として拡散方程式を解いた結果を波数空間に出力したものを下の図15に示す。拡散方程式は移流項がないので粘性項によって減衰するのみであるが粘性係数 ν が非常に小さい値であるため結果に動きがなく、それゆえ時間変化が見られない。

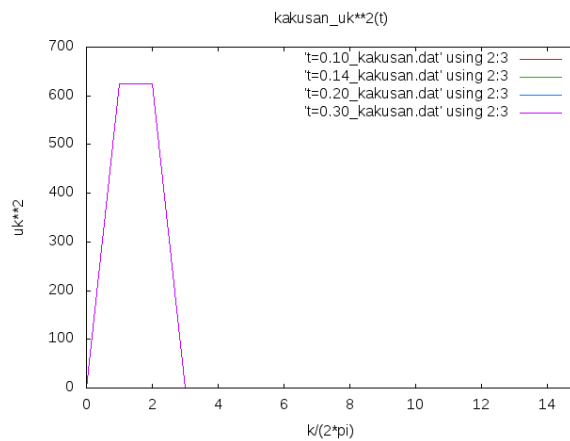


図 15 : 拡散方程式を解いた結果

(3-9) 式を初期状態として Burgers 方程式を解いた結果を下の図16に示す。モード数2を持つ波は $t=0.30$ の時点ですでに減衰しきってしまっているのがわかる。

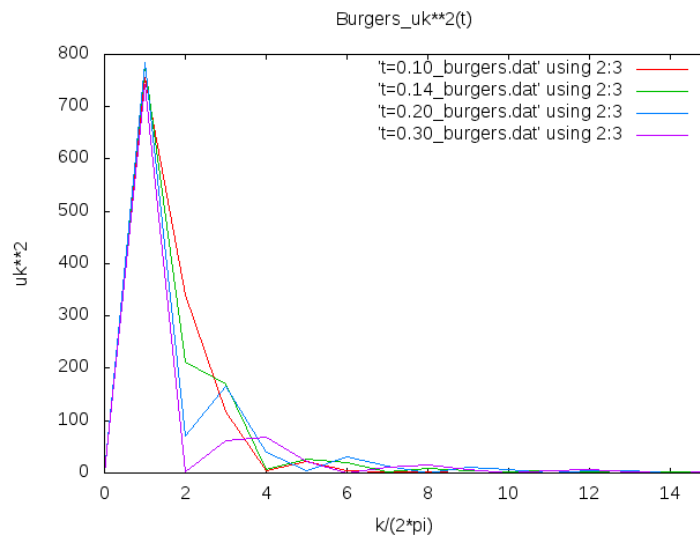


図 16 : Burgers 方程式を解いた結果

(3-9)式を初期状態として modified Burgers 方程式を解いた結果を下の図 17 に示す。

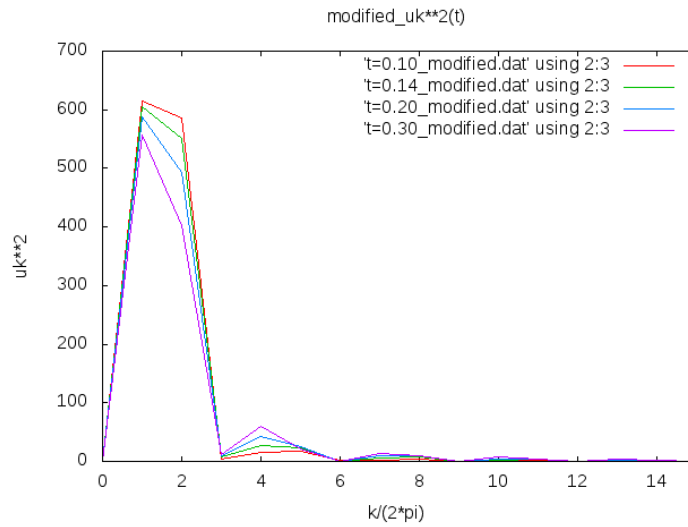


図 17 : modified Burgers 方程式を解いた結果

図 16 に示した Burgers 方程式の解の時間変化に比べてモード数 2 の波の減衰が少ないことがわかる。それを比較したものを下の図 18 に示す。

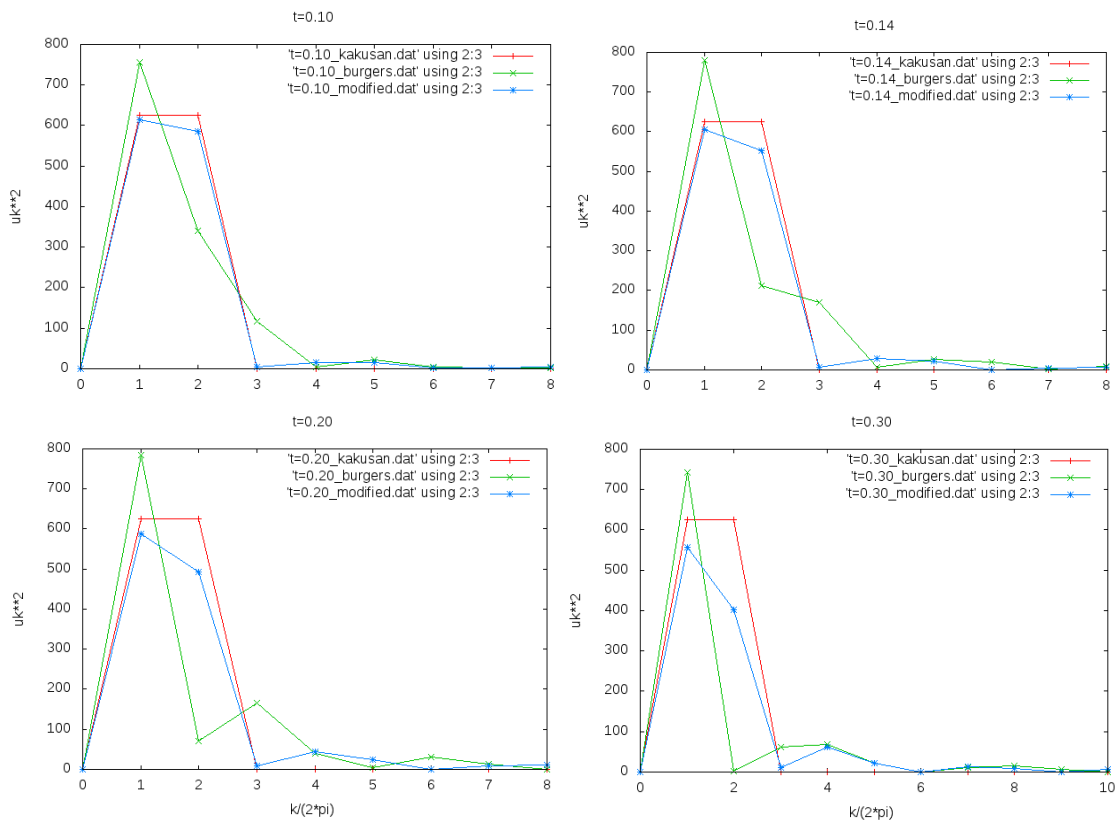


図 18 : 3つの方程式を解いた結果の比較

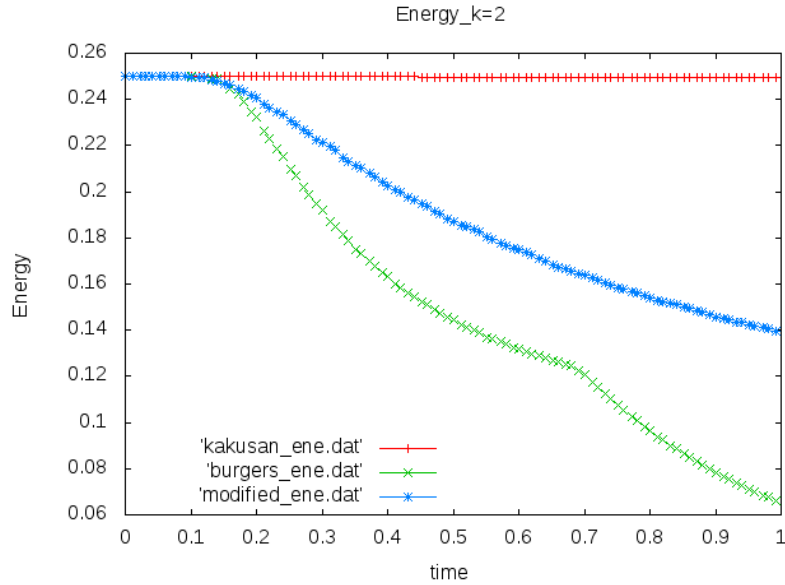


図 19 : エネルギーの時間変化

上の図 19 はエネルギーの時間変化を表している。衝撃波ができるまでの時間は式 (1-11) で算出可能で、これによると $t_{shock} \sim 0.143$ である。この時間まで Burgers 方程式の解、modified Burgers 方程式の解ともにエネルギーの減衰は起きていないが、この時間から大きく減衰していることが見て取れる。

3-5. エネルギーに関する議論

周期境界条件のもとで3つの微分方程式を解くにあたって、そのエネルギーに関する考察をする。まず Burgers 方程式をもう一度書いておく。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad (3-10)$$

両辺に u をかけて

$$u \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = \nu u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad (3-11)$$

両辺を x で積分すると

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{u^2}{2} dx + \int \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^3}{3} \right) dx = \nu \int u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \quad (3-12)$$

周期境界条件の下では $u_0 = u_1$ だから、左辺の第二項は0になる。

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^3}{3} \right) dx = \left[\frac{u_0^3}{3} - \frac{u_1^3}{3} \right] = 0 \quad (3-13)$$

(3-12) 式に (3-13) 式を代入し、整理すると次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{u^2}{2} dx = \nu \left[\int \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx - \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right] \quad (3-14)$$

右辺の第2項は同様に周期境界条件の下では0になるので消去できるので、最終的に式は次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int u^2 dx = \frac{\partial E}{\partial t} = -2\nu \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \quad (3-15)$$

これはエネルギーの時間変化の様子を示す式である。第1章で説明したとおり、 $u(\mathbf{x})$ を波の重ねあわせで記述するとき、

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = -k^2 e^{2ikx} \quad (3-16)$$

となる。以上のことから、波数の大きい細かい波ほど粘性項によって減衰させられる、ということがわかる。ここでは Burgers 方程式を変形してこの結論に至ったが、modified Burgers 方程式と Burgers 方程式の違いは(3-12)式における左辺第2項だけなので、同じように(3-13)式により0となるので当然であるが、modified Burgers 方程式でも同じ結果に行き着く。

4章 結果

初期状態に乱流的な擾乱を加えて拡散方程式、Burgers 方程式、modified Burgers 方程式をそれぞれ解き、その結果を考察した。以下に乱流的な擾乱の作り方を示す。

モード数1から100の波を作りそれぞれの位相に乱数を振ることでばらばらにして重ね合わせた。実際に作った初期擾乱を下の図に示す。

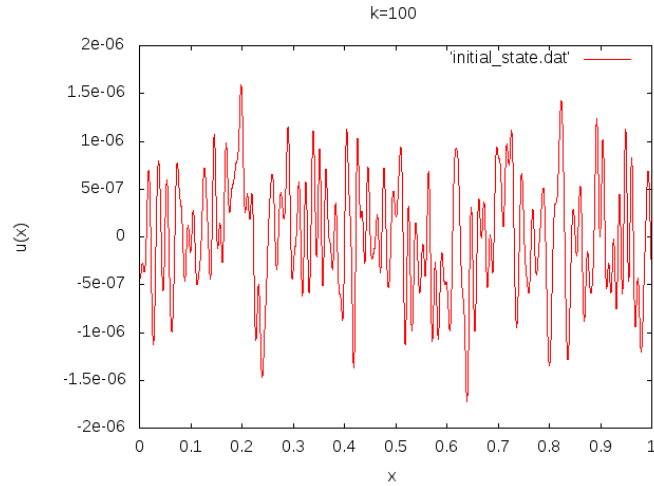


図 20 : 実際に実験の初期状態として用いた擾乱

これを初期状態として3つの方程式を解いた結果、エネルギーの時間変化は下の図 21 のようになった。3つのエネルギーの時間変化を表すグラフが完全に一致してしまっている。これでは3つの方程式における性質の違いを見ることができない。

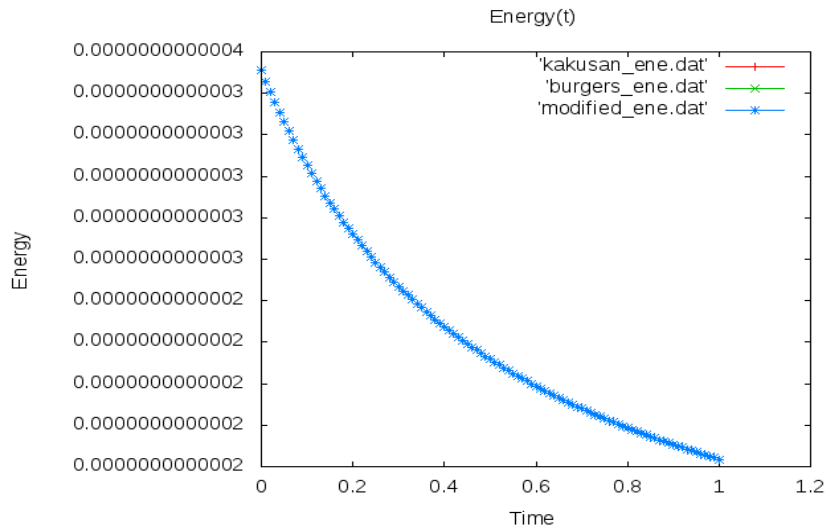


図 21 : それぞれの方程式の解におけるエネルギーの時間変化

図 20 に示した初期擾乱に 5.0×10^5 をかけたものを下の図 22 に示す。

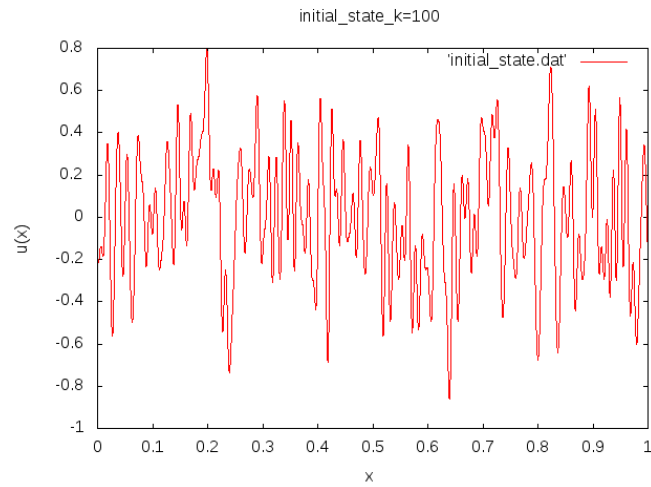


図 22 : 初期擾乱に 5.0×10^5 をかけたもの

これを初期状態にして3つの方程式を解いた結果は次のようになった。実空間での解を時刻 $t = 0.10$ で切り取ったものを図 23 ~ 25 にそれぞれ示す。

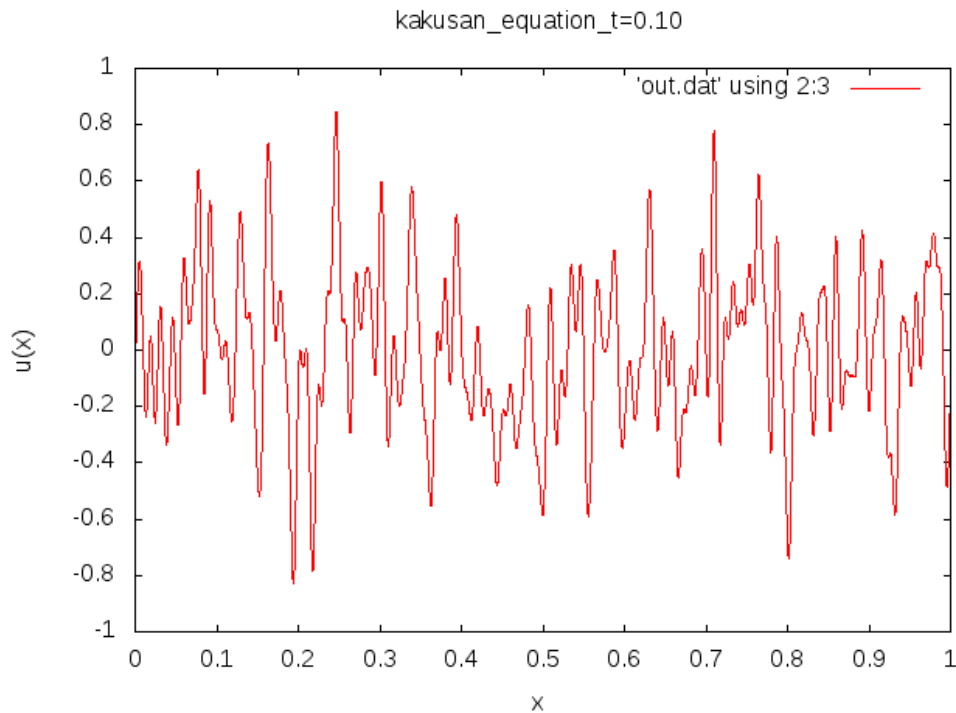


図 23 : 拡散方程式を解いた結果 (時刻 $t = 0.10$)

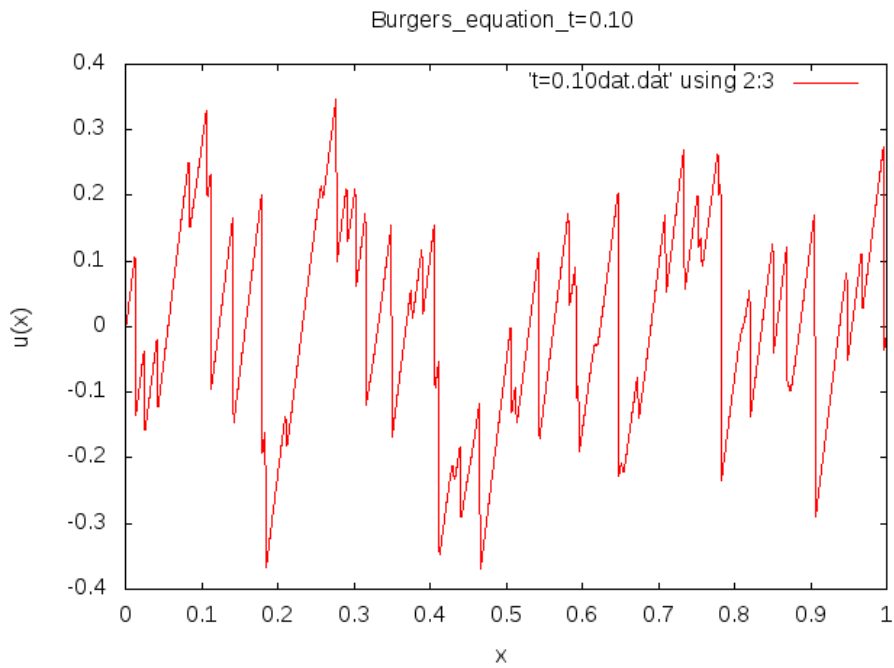


図 24 : Burgers 方程式を解いた結果 (時刻 $t = 0.10$)

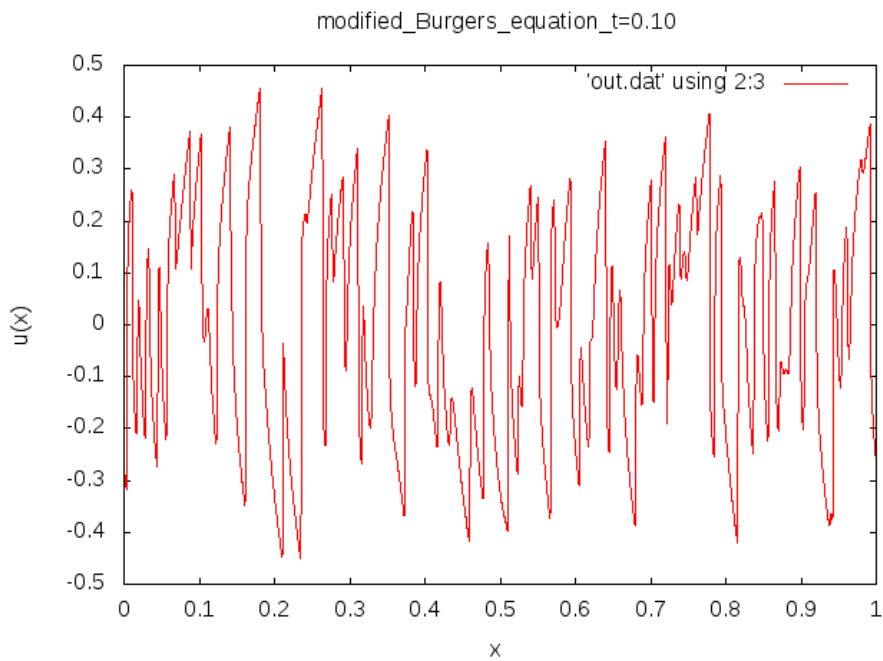


図 25 : modified Burgers 方程式を解いた結果 (時刻 $t = 0.10$)

波数空間に結果をフーリエ変換し出力したものの時間変化を以下の図 26～28 に示す。赤線は拡散方程式の解を、緑の線は Burgers 方程式の解を、青い線は modified Burgers 方程式の解をそれぞれ示している。

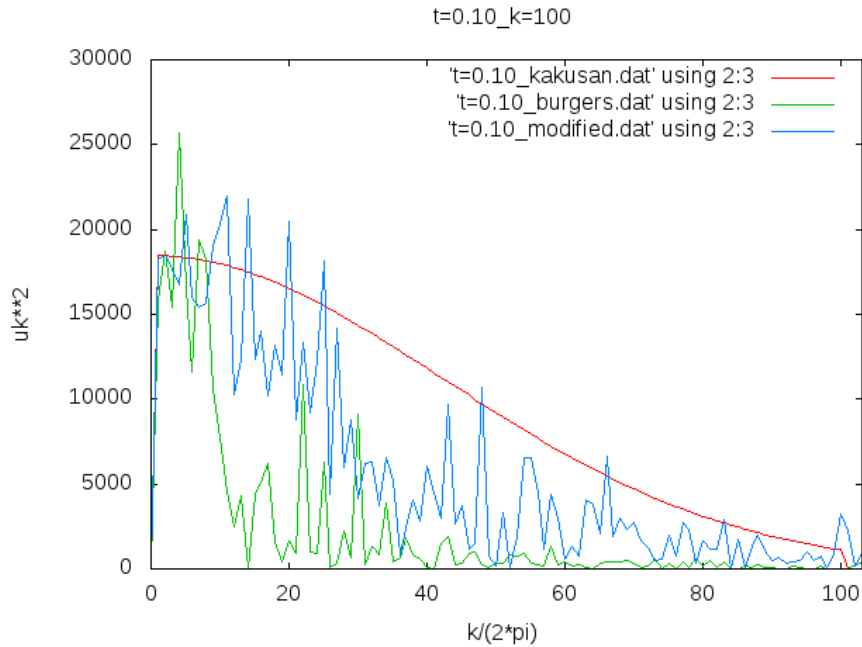


図 26 : 波数空間に出力した結果 (時刻 $t = 0.10$)

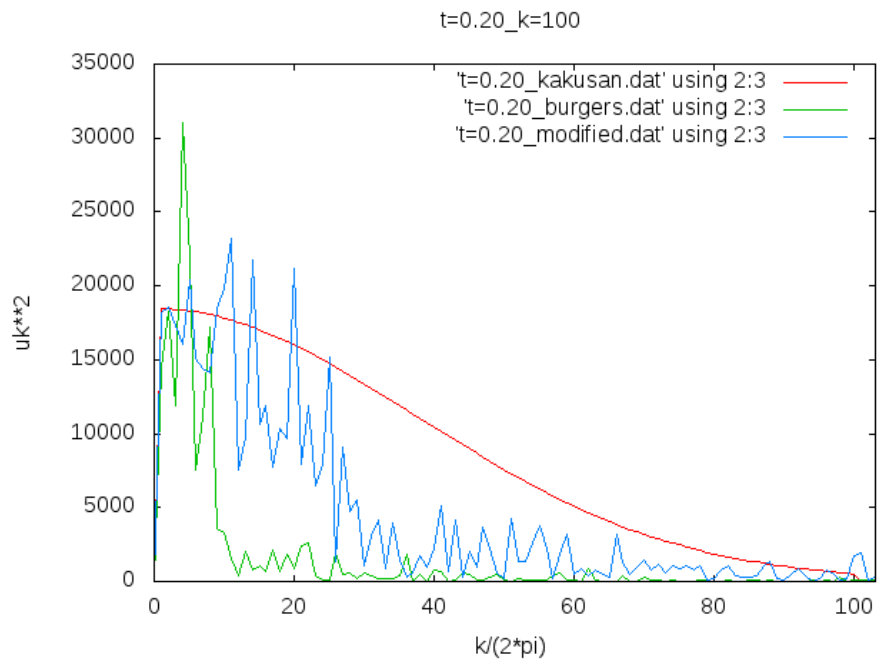


図 27 : 波数空間に出力した結果 (時刻 $t = 0.20$)

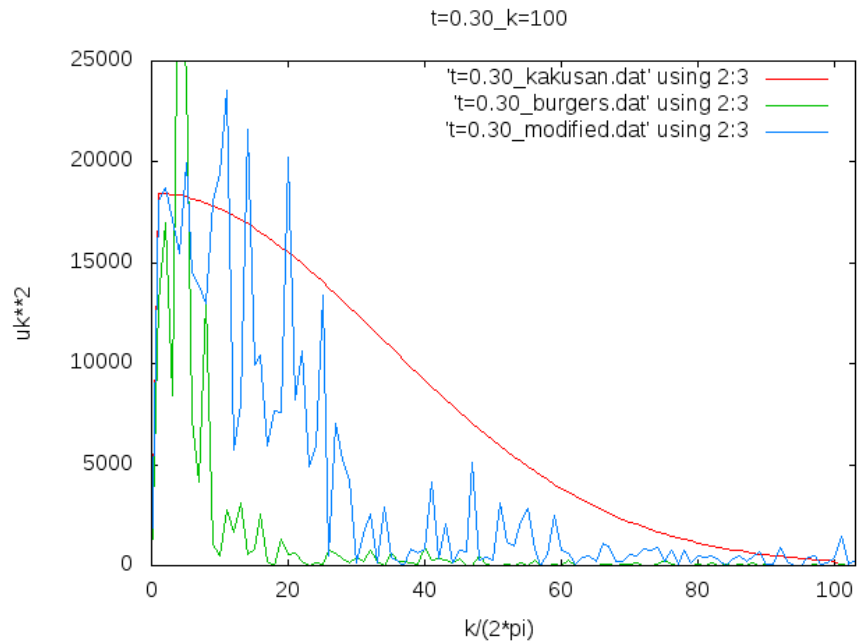


図 28 : 波数空間に出力した結果 (時刻 $t = 0.30$)

3つの方程式の解におけるエネルギーの時間変化を図 29 に示す。

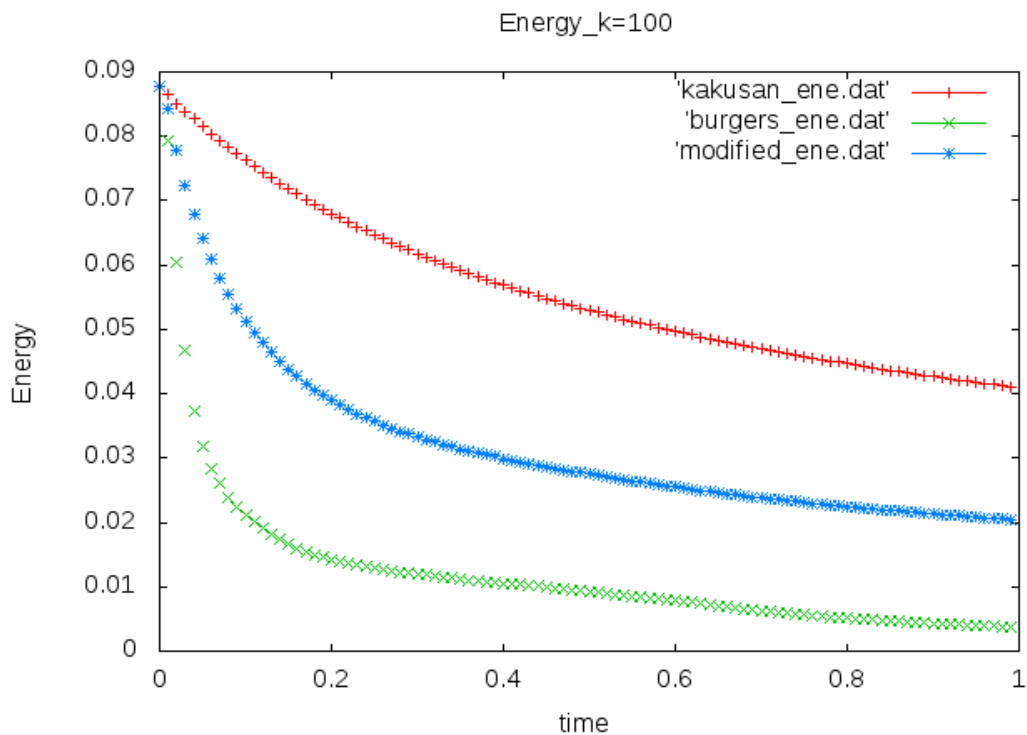


図 29 : 3つの方程式の解のエネルギー推移

5章 考察

5-1. 初期擾乱にあった問題点

100の異なるモード数を持つ波の重ねあわせを初期状態に設定して(図30)3つの異なる方程式を解いたにもかかわらず、その結果は完全に一致してしまっていた。しかし初期状態に 5.0×10^5 をかけることで解に違いが現れた。その原因は、3つの微分方程式を並べてみるとおおよそ想像が付く。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad [\text{拡散方程式}] \quad (5-1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad [\text{Burgers 方程式}] \quad (5-2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u^2 \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad [\text{modified Burgers 拡散方程式}] \quad (5-3)$$

図30を見れば、ここでの初期擾乱は $u(x) \sim \pm 2.0 \times 10^{-6}$ 、つまり波の振幅が極端に小さいことがわかる。そして3つの微分方程式の違いは左辺第2項にある。 u が極端に小さいため第2項が限りなく0に近づいてしまい、その結果3つの微分方程式の解に違いが現れなかったのだと考えられる。それゆえ $u(x) \sim \pm 1.0$ とするために 5.0×10^5 をかけたのである。その結果3つの微分方程式の解に違いが現れたので、この予想は正しかったといえる。

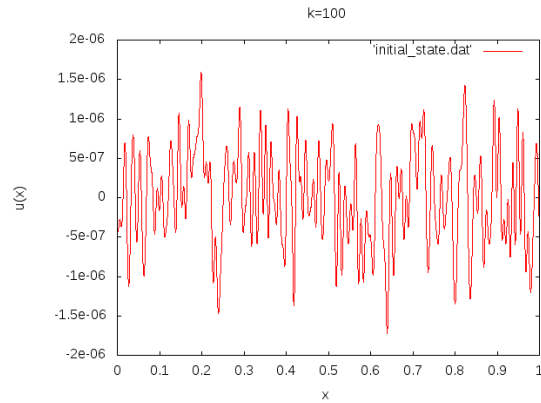


図 30 : 問題のあった初期擾乱

5-2. 波数空間の出力結果から

図26～28から、「Burgers 方程式よりも modified Burgers 方程式のほうが、波数が大きいほうにエネルギーを移送する力が強い」ということがわかる。これは物理として正しく、(5-3)式左辺の第二項にその作用がある。これは式の形を見ればわかるが、右辺の粘性項は波数（モード数）の大きな波ほど減衰させる作用がある。Burgers 方程式の解は、時刻 $t = 0.10$ のときモード数60以上の波はほぼ減衰させられており、時刻がさらに進むにつれて波数の大きい波がどんどん減衰、時刻 $t = 0.30$ ではモード数が10より大きな波はほぼなくなっていることが見て取れる。（下の図31も参照）

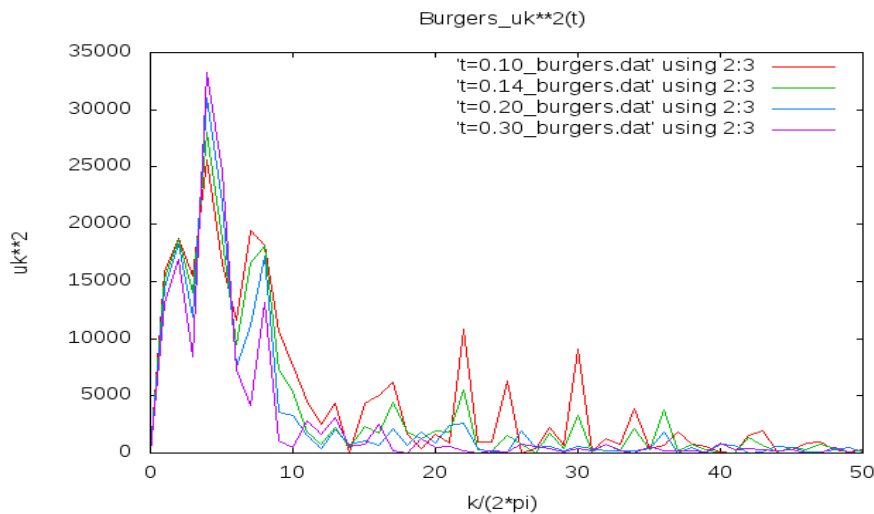


図 31 : Burgers 方程式の解の時間変化

それに対して modified Burgers 方程式の解は、時刻 $t = 0.30$ になってもモード数60を持つ波も残っている。右辺の粘性項による細かい波ほど減衰させる作用には3つの微分方程式の間で違いはないので、減衰させられながらも波数の大きい波を常に作り出していることになる。（下の図32を参照）

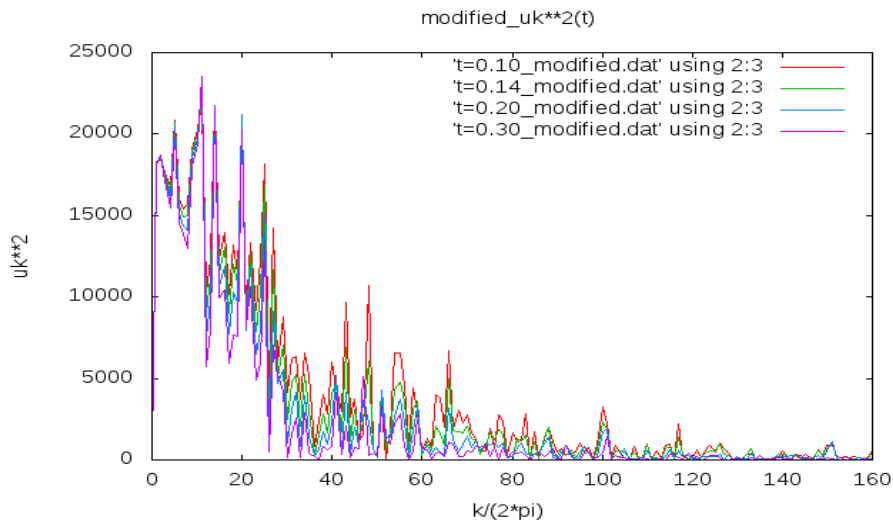


図 32 : modified Burgers 方程式の解の時間変化

5-3. エネルギーの時間変化に対する考察

エネルギーの時間変化について議論する。前述したとおり、微分方程式には「波数の大きなほうにエネルギーを輸送する作用」と「波数が大きい波ほど減衰させる」作用がある。さらに前者は **modified Burgers** 方程式のほうが大きいことが前節でわかった。するとエネルギーは、波数の大きなほうにより多くのエネルギーを移送し、そのまま減衰させる **modified Burgers** 方程式のほうが小さくなると予測ができる。しかし実験の結果はそれとは異なり、**Burgers** 方程式の解のほうがエネルギーは小さい。下の図 33 は図 29 を片対数グラフに書き直したものであるが、この図から、エネルギーが減衰するスピードもまた **Burgers** 方程式のほうが大きいことが見て取れる。

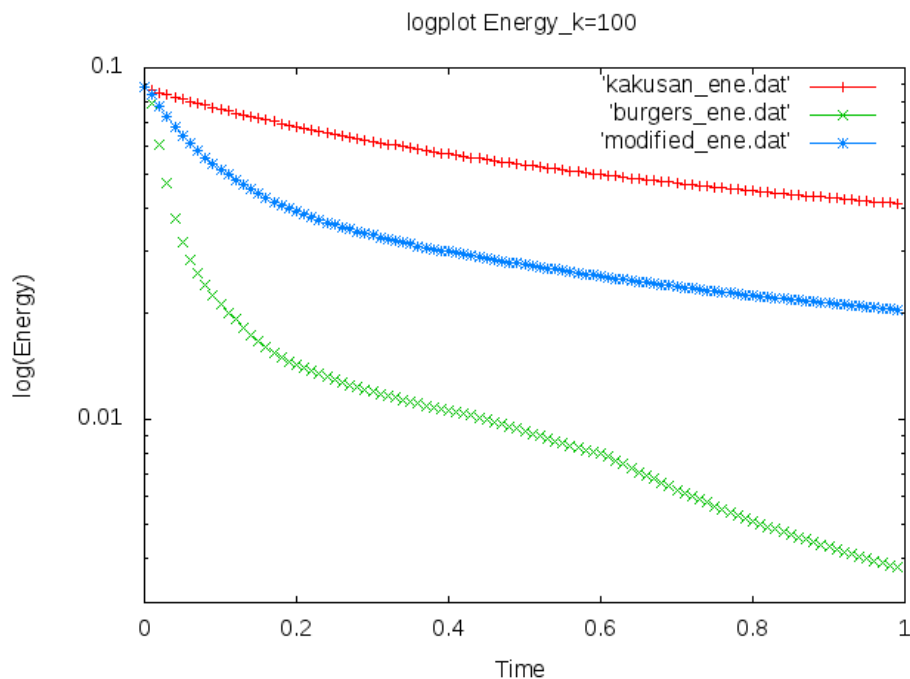


図 33 : エネルギーの時間変化を片対数グラフにプロットしたもの

予想と結果が異なる理由を考察する。**Burgers** 方程式は、細かい波を作り出す作用は比較的弱いですが、衝撃波を形成したあとに急激に波が減衰する性質がある。それに対して **modified Burgers** 方程式は、細かい波を作り出す作用が強いため粘性項により減衰させられやすいが、衝撃波を形成したあとの減衰が遅い。衝撃波を形成した後の減衰の様子を次のページの図 34, 35 に示す。赤い線が初期状態 $u(x) = \sin 2\pi x$ を示し、そこから時間 0.2 ごとに緑、青、紫、水色、朱色の線と続いている。この二つの図を見ると、**modified Burgers** 方程式の解は衝撃波の減衰が上下でそろっていないのでスピードが遅く、時刻 $t = 1.0$ になっても $u(x) \sim \pm 0.6$ 程度の振幅を残している。それに対し **Burgers** 方程式の解は衝撃波を形成後、衝撃波の上からも下からも減衰し、急激に小さくなっていることがわかる。時刻 $t = 1.0$ には $u(x) \sim \pm 0.4$ 程度にまで振幅が小さくなっている。

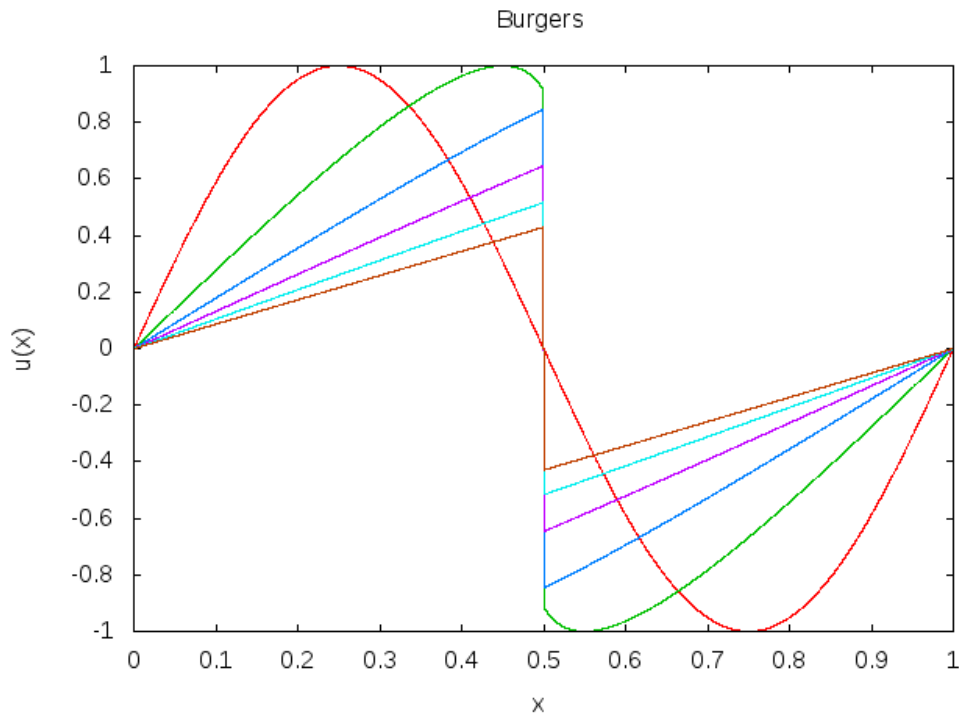


図 35 : Burgers 方程式による衝撃波の減衰の様子

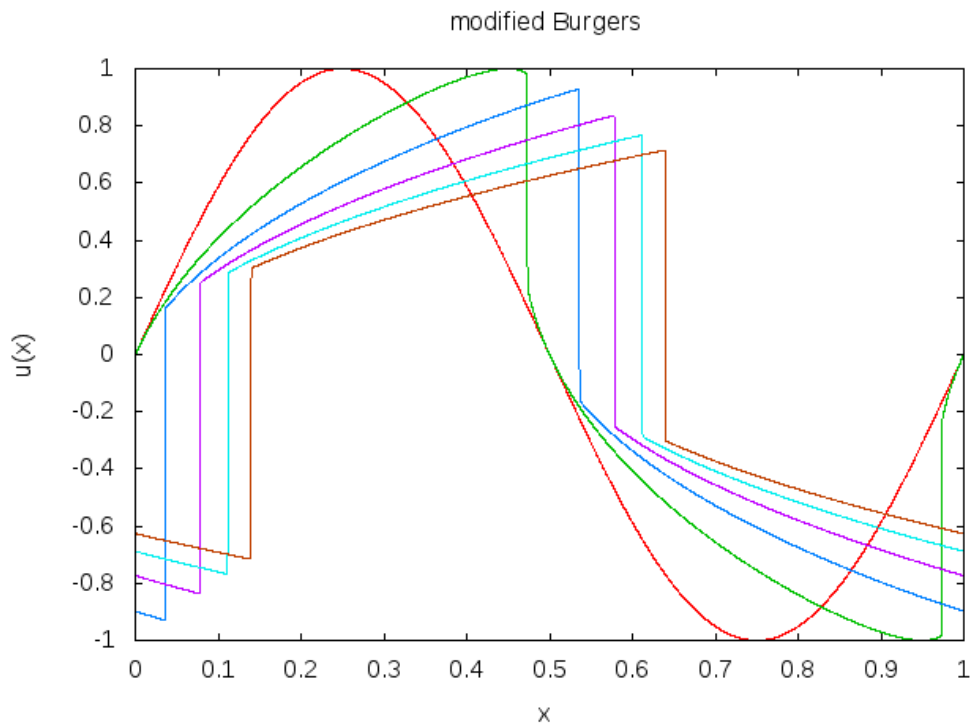


図 34 : modified Burgers 方程式による衝撃波の減衰の様子

赤い線……初期状態	緑の線……時刻 $t = 0.2$
青い線……時刻 $t = 0.4$	紫の線……時刻 $t = 0.6$
水色の線……時刻 $t = 0.8$	朱色の線……時刻 $t = 1.0$

以上のことから、**modified Burgers** 方程式の解の減衰は **Burgers** 方程式の解の減衰よりも遅いことがわかる。その原因は粘性項による減衰よりも、方程式の性質による衝撃波の減衰のほうが速いことに起因していると考えられる。

6章 結論

差分法について学習し、 u の 2 階微分について 6 次精度の差分式を構築してプログラムに組み込むことにより、より細かい波も正確に数値計算できるようにプログラムを改良した。そのプログラムの正しさを立証するために拡散方程式を数値解法で解き、厳密解と比較した。

さらに MUSCL 法と 5 次精度 WENO 法、一次精度風上差分法のうちどれが今回の研究に一番適したスキームかを決定するために線形移流方程式を周期境界のもとで解き、確かめた。その結果 5 次精度 WENO 法がもっとも解の減衰が少なく、微分方程式の性質としての減衰を正確に見ることができると判断できた。

その結果を踏まえて 5 次精度 WENO 法と 3 次精度 SSP Runge-Kutta 法で modified Burgers 方程式を解くためにさらに数値計算プログラムを独自に改良、周期境界条件下で微分方程式を解くことができるようにエントロピー補正や波数空間への出力やエネルギーの時間変化の出力などの補助的な機能を付け加えた。その結果 modified Burgers 方程式の解の時間変化を得ることに成功、衝撃波と膨張派の複合波をとらえた。

上記の数値計算プログラムを用いさまざまな初期状態のもとで拡散方程式、Burgers 方程式、modified Burgers 方程式を解き、その時間変化を解析することによりそれぞれの方程式の性質を調べた。その結果 modified Burgers 方程式には、エネルギーを波数の大きな波に移送する作用があることが判明した。

エネルギーの観点では、方程式を見る限り modified Burgers 方程式の解のエネルギーのほうが速く減衰すると思われたが、衝撃波を形成した後の減衰が Burgers 方程式のほうが早く、粘性項による減衰を上回るスピードであった。それゆえエネルギーの減衰は Burgers 方程式のほうが早かった。

乱流は基本的に細かい波を作るのであるが、逆カスケードと呼ばれる細かい波同士が合体して大きな波になる現象が起きることがある。そのとき細かい波が持っていたエネルギーは合体によって大きな波のエネルギーになるのであるが、そのような性質も modified Burgers 方程式には隠されているかもしれない。modified Burgers 方程式はまだまだ解明されていないことが多く、研究しがいのある分野と言えるだろう。

参考資料

- [1]小貫明：臨界点近傍の衝撃波(パターン形成,運動と統計,研究会報告) (1985)
<http://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/bitstream/2433/91583/1/KJ00004405175.pdf>
- [2] Li Zhi-Fang、 Ruan Hang-Yu : The extended symmetry approach for studying the general Korteweg-de Vries-type equation (2010)
<http://cpb.iphy.ac.cn/fileup/PDF/2010-040201-1.pdf>
- [3]宮崎安史：非粘性バーガス方程式に対する MUSCL 法の評価 (2014)
- [4]三好隆博、簗島敬、松本洋介：【SS2016】宇宙磁気流体・プラズマシミュレーションサマースクール TEXTBOOK FILES (2016)
<http://www.icehap.chiba-u.jp/activity/SS2016/textbook.html>
- [5]藤井孝蔵：流体力学の数値計算法 (東京大学出版会・1994)
- [6]平林孝太：5次精度有限差分 MHD コード開発 (2013)
<http://www-space.eps.s.u-tokyo.ac.jp/~hirako/memo9.html>
- [7]本田知宏：クォーク・グルーオン・プラズマ状態方程式を用いた相対論的流体シミュレーションの精度評価 (2016)
- [2]三好隆博：熊本大学物理科学講座物理特別講義 B1 数値宇宙流体力学 (2016)
http://plasma.sci.hiroshima-u.ac.jp/etc/20150715_KumamotoUniv/

謝辞

本論文を作成するにあたりすばらしい研究環境を整えてくださったクォーク物理学研究室のみなさま、ありがとうございました。三好隆博先生には毎週のご指導ならびに卒業研究に関する知識、問題点、行く先を照らし導いていただきました。ありがとうございます。またミーティングにて時間を取らせていただき、数々の質問やサジェスチョンを投げかけてくださいました研究室の先輩や先生方に深く感謝いたします。