

平成 29 年度卒業論文

ゼロベータ MHD における
抵抗性磁気リコネクションの粘性率依存性

広島大学理学部物理科学科
クォーク物理学研究室
学籍番号 B144853

星野 達也

平成 30 年 2 月 17 日
指導教官 杉立 徹 教授
主査 三好 隆博 助教
副査 小嶋 康史 教授

概要

大規模な太陽面爆発やコロナ質量放出は、世界規模の電波障害を誘発するなど現代社会の脅威となることが指摘されており、予測は緊急の課題である。これら太陽活動現象のみならず、宇宙・天体プラズマ爆発現象では、磁気リコネクションが重要な役割を果たすと考えられている。

磁気リコネクションは、反平行成分を持つ磁力線をつなぎ換え、磁気エネルギーをプラズマの運動エネルギーおよび熱エネルギーに変換する過程である。しかし、抵抗性磁気流体力学 (MHD) による定常磁気リコネクションモデルでは、観測結果から見積もられる高い磁気リコネクション率を説明することができなかった。近年の大規模数値シミュレーションでは、プラズモイド (磁気島) の生成・放出による磁気リコネクションの高速化が示されたが、磁気リコネクションの高速化機構は未だ完全には解明されていない。

磁気リコネクション点での磁場のダイナミクスは抵抗性磁場に支配されるため、これまでは特に電気抵抗率に対する依存性が注目されてきた。しかし、プラズマ流体の粘性率もプラズマの運動を介して、磁気リコネクションに影響を与える可能性がある。本研究では、プラズマ圧力を無視したゼロベータ抵抗性 MHD の高精度数値シミュレーションを実行し、磁気リコネクションの粘性率依存性を検証した。

目次

1	序論	5
1.1	磁気リコネクションの重要性	5
1.2	抵抗性 MHD 方程式	6
1.3	磁場の誘導方程式	11
1.4	Sweet-Parkaer リコネクションモデル	13
1.5	Petschek リコネクションモデル	15
1.6	電流層によるプラズモイド不安定性	16
1.7	本研究の目的	17
2	シミュレーションモデル	18
2.1	基礎方程式	18
2.2	数値計算法	19
2.3	計算領域、初期条件・境界条件	21
3	結果	25
4	考察	36
4.1	磁力線と電流、渦度についての議論	36
4.2	運動エネルギー、磁束等についての議論	38
4.3	今後の展望	39
5	結論	41

目 次

1	太陽フレア発生の瞬間 [1]	5
2	オーロラ発生のプロセス [2]	5
3	Sweet-Parker リコネクションモデル [11]	13
4	Petschek リコネクションモデル [13]	16
5	プラズモイド不安定性 [9]	17
6	シミュレーションの計算領域	22
7	シミュレーションの初期状態 (破線四角内が計算領域)	22
8	グラフ $y = \tanh(x/a)$ (ここでは $a = 2$ とした)	23
9	$\eta = 2.0 \times 10^{-3}$, $\nu = 5.0 \times 10^{-4}$ での磁力線と電流の大きさ	25
10	$\eta = 2.0 \times 10^{-3}$, $\nu = 1.0 \times 10^{-3}$ での磁力線と電流の大きさ	26
11	$\eta = 2.0 \times 10^{-3}$, $\nu = 4.0 \times 10^{-3}$ での磁力線と電流の大きさ	27
12	$\eta = 2.0 \times 10^{-3}$, 速度常時 0 での磁力線と電流の大きさ . . .	28
13	$\eta = 2.0 \times 10^{-3}$, $\nu = 5.0 \times 10^{-4}$ での磁力線と渦度の大きさ	29
14	$\eta = 2.0 \times 10^{-3}$, $\nu = 1.0 \times 10^{-3}$ での磁力線と渦度の大きさ	30
15	$\eta = 2.0 \times 10^{-3}$, $\nu = 4.0 \times 10^{-3}$ での磁力線と渦度の大きさ	31
16	$\eta = 2.0 \times 10^{-3}$, 速度常時 0 での磁力線と渦度の大きさ . . .	32
17	磁束の 1 次元計算の模式図	34
18	各粘性率ごとの運動エネルギーの時間発展	34
19	各粘性率ごとの磁気エネルギーの時間発展	34
20	各粘性率ごとの ηj_z の時間発展	35
21	各粘性率ごとの A_{zmax} の時間発展	35
22	$\eta = 2.0 \times 10^{-3}$, $\nu = 5.0 \times 10^{-4}, 1.0 \times 10^{-3}, 4.0 \times 10^{-3}$ での直線 $x = 0$ 上での $v_y - y$ グラフ	37
23	$\nu = 4.0 \times 10^{-3}$ での E_{zmax} のグラフの詳細	38

1 序論

1.1 磁気リコネクションの重要性

磁気リコネクションとは、反平行磁場の系において磁力線がつなぎ変わる現象であり、つなぎ変わる前までに蓄積された磁気エネルギーがプラズマの運動エネルギーや熱エネルギーに変換されることが知られている。

近年、巨大な太陽フレアによる世界規模での電波障害などの脅威が認識されてきたが、その太陽フレアの原因も磁気リコネクションであると考えられている (図 1)。他にも地球磁気圏と太陽風 (太陽から地球へ向かってくるプラズマの流れ) の相互作用の一つである、オーロラ爆発の起きるプロセス (図 2) にも磁気リコネクションが関わっている。太陽風のエネルギーが地球磁気圏の夜側へ集まっていき、やがて溜め込まれたエネルギーが短時間で急速にプラズマのエネルギーに変換され、地球方向、その反対方向へプラズマの塊が飛び出す。このプラズマの塊をプラズモイド (磁気島) といい、一連の物理過程をサブストームという。



図 1: 太陽フレア発生の瞬間 [1]

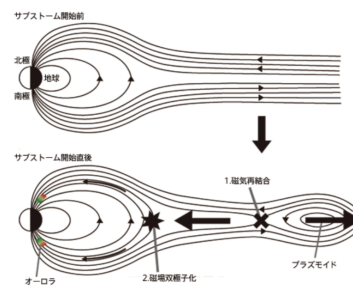


図 2: オーロラ発生のプロセス [2]

上記の例のように磁気リコネクションは天体爆発現象のエネルギー源であり、このメカニズムを明らかにすることでプラズマと磁場が普遍的に存在している宇宙の天体物理現象の理解につながることを期待される。しかし、宇宙プラズマの観測データの磁気リコネクション率と、磁気流体力学 (MHD) 理論を用いたシミュレーション結果のそれが大きく異なっており、未だに高い磁気リコネクション率の原因を解明できていない。

本章では、宇宙プラズマの MHD 方程式と磁場の誘導方程式の導出、磁気リコネクション研究の歴史的背景を述べる。

1.2 抵抗性 MHD 方程式

この章では MHD 方程式を導出する。高温プラズマはイオンと電子の 2 種類の粒子が含まれる、電離した気体をさす。

イオン、電子の質量を m_i 、 m_e とする。数密度、質量密度をそれぞれ n_i 、 n_e 、 ρ_{mi} 、 ρ_{me} とする。流体速度をそれぞれ \mathbf{V}_i 、 \mathbf{V}_e 、圧力を p_i 、 p_e とする。イオン質量密度 $\rho_{mi}(\mathbf{r}, t)$ は次式で表される [3]。

$$\rho_{mi}(\mathbf{r}, t) = m_i n_i(\mathbf{r}, t) \quad (1)$$

次に、各辺の長さ Δx 、 Δy 、 Δz の微小直方体を粒子の束が出入りする系を考える。単位時間あたりの粒子束の変化量は

$$(\text{入ってくる粒子束}) - (\text{出て行く粒子束}) = (\text{粒子束の変化量})$$

であり、これを数式で表すとイオンの場合

$$-\left\{ \frac{\partial(n_i V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(n_i V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(n_i V_z)}{\partial z} \right\} \Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\partial n_i}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2)$$

となり、書き換えると次式が得られる。

$$\frac{\partial n_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \{n_i(\mathbf{r}, t) \mathbf{V}_i(\mathbf{r}, t)\} = 0 \quad (3)$$

(1)~(3) は電子の場合でも同様に考えられて、次の結果が得られる。

$$\frac{\partial n_e(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \{n_e(\mathbf{r}, t) \mathbf{V}_e(\mathbf{r}, t)\} = 0 \quad (4)$$

(3)、(4) を連続の式 (continuity equation) と呼ぶ。

次に運動方程式を考える。外電場を \mathbf{E} 、外磁場を \mathbf{B} とする。単位体積あたりにかかる外力を圧力の空間微分と考えれば、運動方程式はイオン、電子についてそれぞれ

$$n_i m_i \frac{d\mathbf{V}_i}{dt} = -\nabla p_i + Z e n_i (\mathbf{E} + \mathbf{V}_i \times \mathbf{B}) - \mathbf{R} \quad (5)$$

$$n_e m_e \frac{d\mathbf{V}_e}{dt} = -\nabla p_e - e n_e (\mathbf{E} + \mathbf{V}_e \times \mathbf{B}) + \mathbf{R} \quad (6)$$

と表される。ただし、 \mathbf{R} はイオン、電子衝突による単位時間の運動量変化を表し、 ν_{ei} を電子とイオンの単位時間あたりの衝突回数とすれば、

$$\mathbf{R} = -n_e m_e (\mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i) \nu_{ei} \quad (7)$$

と表される [3]。ラグランジュ微分

$$\frac{d\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)}{dt} = \frac{\partial\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \{\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla\}\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \quad (8)$$

に注意して (5)、(6) を変形すると

$$\begin{aligned} & n_i m_i \left\{ \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial t} + (\mathbf{V}_i \cdot \nabla) \mathbf{V}_i \right\} \\ = & -\nabla p_i + Z e n_i (\mathbf{E} + \mathbf{V}_i \times \mathbf{B}) - \mathbf{R} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & n_e m_e \left\{ \frac{\partial \mathbf{V}_e}{\partial t} + (\mathbf{V}_e \cdot \nabla) \mathbf{V}_e \right\} \\ = & -\nabla p_e - e n_e (\mathbf{E} + \mathbf{V}_e \times \mathbf{B}) + \mathbf{R} \end{aligned} \quad (10)$$

となる。

ここで全質量密度 ρ_m 、プラズマ平均速度 \mathbf{V} 、電荷密度 ρ 、電流密度 \mathbf{j} を次のように定義する。

$$\rho_m = n_e m_e + n_i m_i \quad (11)$$

$$\mathbf{V} = \frac{n_e m_e \mathbf{V}_e + n_i m_i \mathbf{V}_i}{\rho_m} \quad (12)$$

$$\rho = -e n_e + Z e n_i \quad (13)$$

$$\mathbf{j} = -e n_e \mathbf{V}_e + Z e n_i \mathbf{V}_i \quad (14)$$

(9) + (10) より、

$$\begin{aligned} \rho_m \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + n_e m_e (\mathbf{V}_e \cdot \nabla) \mathbf{V}_e + n_i m_i (\mathbf{V}_i \cdot \nabla) \mathbf{V}_i \\ = -\nabla(p_e + p_i) + \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \end{aligned} \quad (15)$$

となる。

プラズマの質量密度は主にイオンによる。原子量 A とすれば、

$$\frac{(\text{イオン質量})}{(\text{電子質量})} = 1836A$$

の関係があるので、次のように近似できる。

$$\frac{m_e}{m_i} \approx 0 \quad (16)$$

よって、全質量密度 ρ_m 、プラズマ平均速度 \mathbf{V} は、

$$\rho_m = n_i m_i \left(1 + \frac{m_e}{m_i} Z \right) \approx n_i m_i \quad (17)$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_i + \frac{m_e}{m_i} Z (\mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i) \approx \mathbf{V}_i \quad (18)$$

となるので (15) は

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \rho_m \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + n_i m_i \left\{ \frac{m_e}{m_i} Z (\mathbf{V}_e \cdot \nabla) \mathbf{V}_e + (\mathbf{V}_i \cdot \nabla) \mathbf{V}_i \right\} \\
&\approx \rho_m \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + n_i m_i (\mathbf{V}_i \cdot \nabla) \mathbf{V}_i \\
&\approx \rho_m \left\{ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right\}
\end{aligned} \tag{19}$$

と書け、新たにプラズマの圧力 $p = p_i + p_e$ と定義すれば (15) は

$$\rho_m \left\{ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right\} = -\nabla p + \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \tag{20}$$

と書き換えることができる。これを電磁一流体方程式という [3]。

今考えている系は巨視的には電氣的に準中性。つまり

$$|n_e e| \approx |Z n_i e|$$

と近似でき、(18) より (14) は

$$\mathbf{V}_e = \mathbf{V}_i - \frac{\mathbf{j}}{en_e} \approx \mathbf{V} - \frac{\mathbf{j}}{en_e} \tag{21}$$

である。(10) ÷ en_e 、(21)、さらに m_e は m_i と比べて十分小さいから無視すると

$$\begin{aligned}
-\nabla \frac{p_e}{en_e} + \mathbf{E} + (\mathbf{V} - \frac{\mathbf{j}}{en_e}) \times \mathbf{B} + \frac{\mathbf{R}}{en_e} &= 0 \\
\Leftrightarrow \mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} - \frac{\mathbf{j}}{en_e} \times \mathbf{B} - \nabla \frac{p_e}{en_e} + \frac{\mathbf{R}}{en_e} &= 0
\end{aligned} \tag{22}$$

のように書ける。また、(7) の衝突項は次のように書ける。

$$\begin{aligned}
\mathbf{R} &= -n_e m_e (\mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i) \nu_{ei} \\
&= n_e e \frac{m_e \nu_{ei}}{n_e e^2} (-en_e) (\mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i) \\
&= n_e e \eta \mathbf{j}
\end{aligned} \tag{23}$$

ただし、比抵抗率を次のように定義した。

$$\eta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{m_e \nu_{ei}}{n_e e^2} \tag{24}$$

再び (20) に注目して、ラグランジュ微分に気をつけながら書き換えると次式になる。

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p_e = \rho_m \frac{d\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)}{dt} + \nabla p_i \tag{25}$$

(電氣的に準中性なので、電荷密度 $\rho \approx 0$ とした。) 左辺は電子、右辺はイオンに起因する単位体積あたりに働く力を表す。ここで磁気流体運動のタイムスケールは、イオン (あるいは電子) のサイクロトロン運動のタイムスケールに比べ十分遅いので、(22) 中の、(25) で用いられている全ての項はほとんど大ききゼロの物理量と考えることができる。

以上より、(22) は

$$\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j} \quad (26)$$

となる。これを一般化されたオーム (ohm) の法則という [3]。

マックスウェル方程式より、次式が成り立つ。

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (27)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (28)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (29)$$

ただし、(27) において近似的に変位電流を 0 とした。

これまで出てきた式をまとめると次のようになる。

$$\rho_m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \nu \left\{ \nabla^2 \mathbf{V} + \frac{1}{3} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) \right\} \quad (30)$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j} \quad (31)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (32)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (33)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (34)$$

ただし、(41) において粘性項 $\nu \{ \nabla^2 \mathbf{V} + \frac{1}{3} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) \}$ を加えた。これらを MHD 方程式と呼ぶ。

(34) に (32) を代入、さらに (33) も代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) - \nabla \times (\eta \mathbf{j}) \\ &= \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) - \eta \nabla \times \mathbf{j} \\ &= \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) - \frac{\eta}{\mu_0} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) \end{aligned} \quad (35)$$

ここでベクトル公式

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} \quad (36)$$

と (35) により

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) + \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \mathbf{B} \quad (37)$$

と書ける。(37)を磁場の誘導方程式という。
同様に、(31)を(33)に代入すると、

$$\rho_m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{\mu_0} \{(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}\} \quad (38)$$

となり、ベクトル公式

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - (\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} \quad (39)$$

を利用すると、

$$\begin{aligned} \rho_m \frac{d\mathbf{V}}{dt} &= -\nabla p + \frac{1}{\mu_0} \{(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}\} \\ &= -\nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} \end{aligned} \quad (40)$$

以上、まとめると磁気流体力学の基礎方程式は

$$\begin{aligned} \rho_m \frac{d\mathbf{V}}{dt} &= -\nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} \\ &\quad + \nu \left\{ \nabla^2 \mathbf{V} + \frac{1}{3} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) \right\} \end{aligned} \quad (41)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) + \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \mathbf{B} \quad (42)$$

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{V}) = 0 \quad (43)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (44)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) p + \gamma p (\nabla \cdot \mathbf{V}) = 0 \quad (45)$$

と書ける。ただし、新たに追加した(45)は断熱圧縮の状態方程式で、 γ は比熱比を表す[3]。

1.3 磁場の誘導方程式

誘導方程式 (37) の右辺の第一項、第二項の比を取ると

$$\begin{aligned}
 \frac{\text{(第一項)}}{\text{(第二項)}} &= \frac{|\nabla \times \mathbf{V} \times \mathbf{B}|}{\left| \frac{\eta}{\mu_0} (\nabla^2 \mathbf{B}) \right|} \\
 &\approx \frac{VB/L}{(B/L^2)(\eta/\mu_0)} \\
 &= \frac{\mu_0 VL}{\eta} \\
 &\stackrel{\text{def}}{=} R_m
 \end{aligned} \tag{46}$$

となり、 R_m を磁気レイノルズ数と呼ぶ。典型的な物理量として、速さ V 、磁束密度 B 、長さ L を用いた。 R_m は磁場拡散時間 (抵抗拡散時間) τ_R とアルヴェン波通過時間 τ_H の比に等しく、次のように表される。

$$R_m = \frac{\tau_R}{\tau_H} = \frac{\mu_0 L^2 / \eta}{L / V_A} \tag{47}$$

ただし、アルヴェン速度 $V_A \approx V$ とした。(アルヴェン速度については後で述べる)

R_m の大きさによって、異なる物理的解釈ができる。

1) $R_m \ll 1$ のとき

つまり、第一項はほとんど 0 なので、(37) は

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \mathbf{B} \tag{48}$$

と書け、これは磁場が拡散することを表す。

2) $R_m \gg 1$ のとき

つまり、第二項はほとんど 0 なので、(37) は

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \tag{49}$$

と書け、ベクトル公式

$$\begin{aligned}
 \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{V}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - (\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{V} \\
 &\quad + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{V} - (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{B}
 \end{aligned} \tag{50}$$

を用いると

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{V}) - (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{V} = 0 \tag{51}$$

ここで、プラズマ中の任意の微小面積 ΔS を通過する磁束 $\Delta\phi$ とし、磁場 \mathbf{B} 方向に z 軸を取る。さらに、微小面積の法線ベクトルを \mathbf{n} とすると、

$$\Delta\phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\Delta S = B\Delta x\Delta y \quad (52)$$

S の境界は移動するので

$$\frac{d(\Delta x)}{dt} = \frac{d(x + \Delta x - x)}{dt} = V_x(x + \Delta x) - V_x(x) = \frac{\partial V_x}{\partial x}\Delta x \quad (53)$$

同様にして y の場合も変形できるから

$$\frac{\partial(\Delta S)}{\partial t} = \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) \Delta S \quad (54)$$

よって、単位時間に ΔS を通過する磁束 $\Delta\phi$ は

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\Delta\phi)}{\partial t} &= \frac{\partial(B\Delta S)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial B}{\partial t}\Delta S + B\frac{\partial(\Delta S)}{\partial t} \\ &= \left\{ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{V}) - (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{V} \right\}_z \Delta S \\ &= 0 \end{aligned} \quad (55)$$

となり、 $R_m \rightarrow \infty$ 、 $\eta \rightarrow 0$ としたとき磁束はプラズマに凍りついて移動することが示された。

磁気流体力学的な波動は大きく分けてアルヴェン波、速い磁気音波、遅い磁気音波の3種類がある。これらのうち、本論文で扱うアルヴェン波についてのみ説明する。

磁力線には磁気張力という復元力があり、磁力線が伸ばされた時に縮もうとする力が働く。このとき擾乱(じょうらん)が生じ、磁力線に沿って伝わる。この波をアルヴェン波という。アルヴェン波は非圧縮性の波で、密度揺動がない[4]。以下でMHD方程式(41)～(34)を次元解析し、アルヴェン速度を求める。

(32)より

$$\mathbf{j} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0 L} \quad (56)$$

(41) に代入、さらに $-\nabla p$ を無視して考えると

$$\begin{aligned}\rho_m \frac{V_A}{T} &= \frac{B^2}{\mu_0 L} \\ V_A \frac{L}{T} &= \frac{B^2}{\mu_0 \rho_m} \\ V_A^2 &= \frac{B^2}{\mu_0 \rho_m} \\ V_A &= \frac{B}{\sqrt{\mu_0 \rho_m}}\end{aligned}\quad (57)$$

となり、アルヴェン波は張力 $B^2/2\mu_0$ 、質量密度 ρ_m の弾性体 (磁力線) を伝わる波だと考えることができる。

1.4 Sweet-Parker リコネクションモデル

リコネクションの高速化機構を説明するための 2 次元定常リコネクションモデルとして、まず Sweet(1958)[11] と Parker(1957)[12] によって Sweet-Parker リコネクションモデルが提案された。

右方向を $+x$ 軸、上方向を $+z$ 軸、紙面奥方向を $+y$ 軸とし、磁気中性線を直線 $x = 0$ とする。反平行磁場が近いとき、Sweet-Parker 電流シートと呼ばれる磁気拡散領域 (図 3 中央の長方形部分) に $\pm z$ 方向からプラズマが流入し (インフロー)、 $\pm x$ 方向にプラズマの塊が流出する (アウトフロー)。

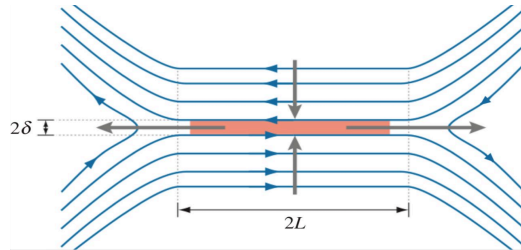


図 3: Sweet-Parker リコネクションモデル [11]

今、定常なので物理量の時間変化はないものとする。 $x-z$ 平面で物理を考えているので、 y 方向の物理量の変化量はないものとする。電磁誘導の式

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E} \quad (58)$$

により

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= \left\{ -\frac{\partial E_y}{\partial z}, \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}, -\frac{\partial E_y}{\partial x} \right\} \\ &= (0, 0, 0)\end{aligned}\quad (59)$$

であるから、 E_y 成分は座標、時刻を問わず一定であることがわかる。
このモデルの前提として、磁気拡散領域では電気抵抗率 η があり、外では $\eta = 0$ とする。一般化されたオームの法則

$$\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j} \quad (60)$$

を用いて、磁気拡散領域外 ($\eta = 0$) でのインフロー、アウトフローの関係式は

$$\begin{aligned}E_y &= v_{out} B_z - v_{in} B_x = \text{const.} \\ \Leftrightarrow v_{in} B_x + \text{const.} &= v_{out} B_z\end{aligned}\quad (61)$$

と書ける。 const. の項は磁気拡散領域でのローレンツ力 $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ による加速である。

アンペールマックスウェルの法則 (ただし変位電流を無視する)

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (62)$$

と (60) により

$$\mathbf{E} = -\mathbf{V} \times \mathbf{B} + \frac{\eta}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} \quad (63)$$

となる。拡散領域からかなり離れた場所では j_y は小さく、上式の第二項は相対的に小さくなる。逆に、拡散領域内では第一項が相対的に小さくなる [5]。よって拡散領域の近くでは2項はほぼ等しくなり、

$$v_{in} B_x \approx \frac{\eta}{\mu_0} \frac{B_x}{\delta} \quad (64)$$

と書ける。ただし電流シートの厚さを 2δ とした。インフローとアウトフローの質量は保存されているので [5] 電流シートの幅を $2L$ とすると

$$L v_{in} = \delta v_{out} \quad (65)$$

よって、 v_{in} は

$$v_{in} = \sqrt{\frac{\eta}{\mu_0} \frac{v_{out}}{L}} \quad (66)$$

となる。アウトフロー速度 v_{out} は、磁気張力による擾乱の伝わる速度 (アルヴェン速度) v_A と近似できる。

規格化された磁気リコネクション率 M を

$$M = \frac{v_{in}}{v_{out}} \quad (67)$$

と定義すれば、

$$M = \frac{v_{in}}{v_{out}} = \sqrt{\frac{\eta}{\mu_0} \frac{1}{v_A L}} = S^{-1/2} \propto \sqrt{\eta} \quad (68)$$

と書ける。 S はランキスト数と呼ばれる。典型的な太陽コロナのランキスト数は 10^{14} 程度, すなわちリコネクション率は 10^{-7} である。よって、Sweet-Parker リコネクションモデルでは磁気リコネクションの高速化機構を説明することはできない [5]。

リコネクション率 M は (65) より

$$M = \frac{v_{in}}{v_{out}} = \frac{\delta}{L} \quad (69)$$

とも表せる。これは電流シートの幅と厚さの比を表しており、その逆数 L/δ アスペクト比と呼ばれる。

1.5 Petschek リコネクションモデル

Sweet-Parker リコネクションモデルではリコネクション率の高さを説明することができなかつた。そこで次に提案されたのは、Petschek リコネクションモデル [13] である。このモデルでは、Sweet-Parker よりもアスペクト比を大きくするため、電流シートの幅 L を小さくしている。さらに、Sweet-Parker リコネクションモデルと異なる点が拡散領域への出入りについての質量保存則が適用されない点である [5]。

インフローからアウトフローでプラズマを加速する場所は、電流シートだけでなく図 4 の破線のように X の字状に伸びている磁気流体衝撃波 (スローショック) もある。

$$v_{in} L' = v_{out} \delta' \quad (70)$$

の式で考えると、スローショックが外側に開いていることからアウトフローの幅が広がり、インフロー速度が速くなるので [8] リコネクション率が Sweet-Parker リコネクションモデルに比べ、大きくなる。こうして、Petschek リコネクションモデルで磁気リコネクションの高速化機構を説明することができる。

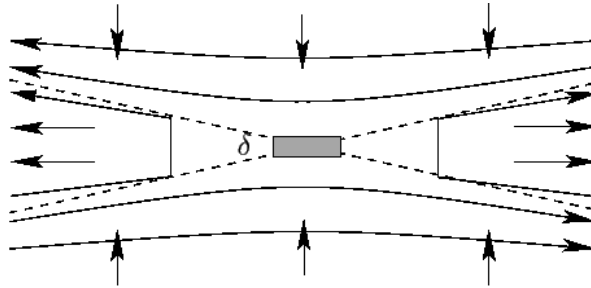


図 4: Petschek リコネクションモデル [13]

しかし、これで問題が解決したわけではない。Kulsrud(2001,2011)[14]によると、Petschek リコネクションモデルのような幅の小さい電流シートを維持することができないので、一様電気抵抗では定常リコネクションが起きない。

1.6 電流層によるプラズモイド不安定性

Sweet-Parker リコネクションモデルでは電流シートの厚さに比べて幅が大きすぎる、つまりアスペクト比が大きいため、アスペクト比の逆数であるリコネクション率を上げることができなかった。ここで、電流シートのアスペクト比が大きい場合にテアリング不安定性によってプラズモイド(磁気島)が形成し、複数の局所的な電流シートに分かれる [5] という事実を Sweet-Parker モデルに適用する。

電流シートへのインフローが比較的大きい部分は他に比べて電流シートが薄くなり、インフローが小さい部分は電流シートが厚くなる。やがて図5の3番目のように薄い部分はさらに薄い電流シート(X点という)になり、厚い部分はプラズモイドと呼ばれる磁力線の輪になる(図5)。電流シート中でプラズモイドが形成されている間は磁気リコネクションは起きないことから、非線形不安定性によるプラズモイド放出までインフローの磁気エネルギーを蓄積し、より大きなリコネクション率が実現される。このモデルをフラクタルリコネクションモデルといい、Shibata,Tanuma(2001)[15]によって提案された。その後、多くの数値シミュレーションにより、プラズモイド不安定性の発現と磁気リコネクションの高速化が検証されてきた(例えば、Bhattacharjee, et al., 2009[16], Samtaney, et al., 2009[17], Shibayama,et al., 2015[18]がある)。

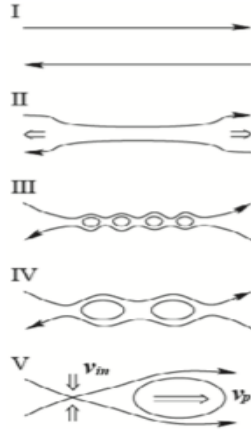


図 5: プラズモイド不安定性 [9]

1.7 本研究の目的

Minoshima, Miyoshi, Imada (2016) [19] によって粘性率と熱伝導が磁気リコネクションの高速化に関わることが発表された。この発表によると、完全圧縮性プラズマにおける粘性抵抗性 MHD 方程式 (fully compressible visco-resistive MHD equations) を基礎方程式としてシミュレーションを行った。その結果、アスペクト比が

$$\frac{L}{\delta} = \sqrt{(v_{in} \frac{L}{\nu}) (\frac{v_{in}}{v_{out}})} \quad (71)$$

すなわち完全圧縮性プラズマにおける粘性抵抗性 MHD 方程式において、磁気リコネクション率が粘性率 ν に依存することが示された。また、電気抵抗率を下げていると、リコネクションの形が Sweet-Parker リコネクションモデルにおけるプラズモイド生成であるものから、Petschek リコネクションモデルに徐々に変化していくという結果も発表された。

最近の研究で、磁気リコネクションの粘性率依存があることが分かったが、それは完全圧縮性プラズマにおける MHD 方程式を考慮した場合の話である。これらの式では、物理変数として熱伝導率、歪み率テンソル、プラズマ圧力といった様々な物理量を用いており、磁気リコネクション率が粘性率に依存するのは粘性率自体の影響なのかあるいは他の物理量の影響なのかは断定できない。

そこで本論文では、磁気リコネクションの現象に欠かせない物理量である電気抵抗率と、粘性率のみを残して、他の制御パラメータを含まない系を考え、リコネクション率が純粋に粘性率に依存するのかを数値シミュレーションを用いて検証する。

2 シミュレーションモデル

2.1 基礎方程式

本研究の目的は、磁気リコネクション率の純粋な粘性率依存性を検証することである。そこで本研究では、完全圧縮性 MHD 方程式を単純化し、密度および圧力の時間変化の寄与を無視した。またこれ以降、無次元化した物理量を用いて議論を進めることとする。以上から、基礎方程式は以下のように表される。

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \nu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (72)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B} - \eta \mathbf{j}) \quad (73)$$

$$\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B} \quad (74)$$

これらはゼロベータ MHD 方程式とよばれる。ゼロベータ MHD 方程式は外圧 p 、磁気エネルギー E_m とした時、ベータ値

$$\beta = \frac{p}{E_m} \quad (75)$$

が非常に小さい太陽コロナプラズマではよく成り立つと考えられる。

(72) はイオン流体と電子流体の運動方程式の和をとったものである。ここで、ベータ値を 0 の極限をとり、密度変化を無視した。また、粘性項は単純化し $\nu \nabla^2 \mathbf{V}$ とした。

なお、これは非圧縮の条件式

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (76)$$

を考慮した場合に一致する。(72) 左辺第二項は細かい波を作る項 (非線形項) を表す。

(73) は一般化されたオームの法則 (31) と電磁誘導の式 (33) を組み合わせて得られる。

(74) はアンペールマックスウェルの法則で、変位電流を無視したものである。

これら (73) と (74) を組み合わせてできる式

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B} \quad (77)$$

は磁場の誘導方程式を表し、磁気レイノルズ数 R_m の値によって磁場の拡散、磁力線の凍りつきといった異なる性質を示す。また (72) と係数を比較すると、 η は磁場についての粘性を表すことがわかる。したがって、係数 η を磁気粘性率ともよぶ。

2.2 数値計算法

本論文では、ゼロベータ MHD 方程式 (72)、(73)、(74) に対して高次の差分法を適応した。

空間微分については、4 次精度の中心差分を用いて評価した。

関数 $f(x+k)$ を $x=k$ の周りでテーラー展開すると

$$f(x+k) = f(x) + kf^{(1)}(x) + \frac{k^2}{2!}f^{(2)}(x) + \frac{k^3}{3!}f^{(3)}(x) + \frac{k^4}{4!}f^{(4)}(x) + \dots (78)$$

となり、同様にして $f(x-k)$ 、 $f(x+2k)$ 、 $f(x-2k)$ も展開すると

$$\begin{aligned} f(x-k) &= f(x) - kf^{(1)}(x) + \frac{k^2}{2!}f^{(2)}(x) \\ &\quad - \frac{k^3}{3!}f^{(3)}(x) + \frac{k^4}{4!}f^{(4)}(x) + \dots \end{aligned} (79)$$

$$\begin{aligned} f(x+2k) &= f(x) + 2kf^{(1)}(x) + \frac{(2k)^2}{2!}f^{(2)}(x) \\ &\quad + \frac{(2k)^3}{3!}f^{(3)}(x) + \frac{(2k)^4}{4!}f^{(4)}(x) + \dots \end{aligned} (80)$$

$$\begin{aligned} f(x-2k) &= f(x) - 2kf^{(1)}(x) + \frac{(2k)^2}{2!}f^{(2)}(x) \\ &\quad - \frac{(2k)^3}{3!}f^{(3)}(x) + \frac{(2k)^4}{4!}f^{(4)}(x) + \dots \end{aligned} (81)$$

と書ける。差を取ると

$$\frac{f(x+k) - f(x-k)}{2k} = f^{(1)}(x) + \frac{k^2}{3!}f^{(3)}(x) (82)$$

$$\frac{f(x+2k) - f(x-2k)}{4k} = f^{(1)}(x) + \frac{4k^2}{3!}f^{(3)}(x) (83)$$

となり、3 階微分の項を消去すれば次式が得られる。

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{12k} \{f(x-2k) - 8f(x-k) + 8f(x+k) - f(x+2k)\} (84)$$

ここで $k=1$ とみて表記を $f(x-k) = u_{i-k}$ と書き換えれば

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} = \frac{u_{i-2} - 8u_{i-1} + 8u_{i+1} - u_{i+2}}{12\Delta x} (85)$$

と書ける。同様にするると、2 階微分の場合は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{-u_{i-2} + 16u_{i-1} - 30u_i + 16u_{i+1} - u_{i+2}}{12\Delta x} (86)$$

と表される。

時間積分については、Runge-Kutta-Gill 法 [10] を用いた。

$$u^{n+1} = u^n + \frac{\Delta t}{6} \{k_1 + (2 - \sqrt{2})k_2 + (2 + \sqrt{2})k_3 + k_4\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{du}{dt} = \frac{1}{6} \{k_1 + (2 - \sqrt{2})k_2 + (2 + \sqrt{2})k_3 + k_4\} \quad (87)$$

$$k_1 = \Delta t \cdot g(t^n, u^n) \quad (88)$$

$$k_2 = \Delta t \cdot g\left(t^n + \frac{1}{2}, u^n + \frac{1}{2}k_1\right) \quad (89)$$

$$k_3 = \Delta t \cdot g\left(t^n + \frac{\Delta t}{2}, u^n - \frac{\sqrt{2}-1}{2}k_1 + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}k_2\right) \quad (90)$$

$$k_4 = \Delta t \cdot g\left(t^n + \Delta t, u^n - \frac{1}{\sqrt{2}}k_2 + \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}k_3\right) \quad (91)$$

である。ただし、ある任意関数 $g(t, u) = \frac{du}{dt}$ とし、時間座標 t を上付きの n で表記した。Runge-Kutta-Gill 法の利点はコンピュータでの計算時に必要な記憶量が少ないことである。計算の流れは次のとおりである。

1) 第一ステップ

$$k_1 = \Delta t \cdot g(t^n, u^n) \quad (92)$$

$$u_1 = u_0 + \frac{k_1}{2} \quad (93)$$

$$k_2 = \Delta t \cdot g\left(t^n + \frac{\Delta t}{2}, u_1\right) \quad (94)$$

コンピュータは3つの値 u_1, k_1, k_2 を記憶している。

2) 第二ステップ

$$u_2 = u_1 + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}(k_2 - k_1) \quad (95)$$

$$k_3 = \Delta t \cdot g\left(t^n + \frac{\Delta t}{2}, u_2\right) \quad (96)$$

$$q_1 = (2 - \sqrt{2})k_2 + \left(-2 + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)k_1 \quad (97)$$

この時コンピュータは u_2, q_1, k_3 を記憶。

3) 第三ステップ

$$u_3 = u_2 + \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}(k_3 - q_1) \quad (98)$$

$$k_4 = \Delta t \cdot g\left(t^n + \frac{\Delta t}{2}, u_3\right) \quad (99)$$

$$q_2 = (2 + \sqrt{2})k_3 + \left(-2 - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)q_1 \quad (100)$$

この時コンピュータは u_3, q_2, k_4 を記憶。

4) 第四ステップ

最後に u_3, q_2, k_4 の3つの値のみから、求めたい値 u^{n+1} (ここでは u_4) が決まる。

$$u_4 = u_3 + \frac{k_4}{6} - \frac{q_2}{3} \quad (101)$$

この一連の計算過程で、各計算をするのにコンピュータが記憶しなければならない値の数は3つだけで良い。(85)を見てもわかるように通常、微分を4次精度の差分の形で表す場合、次のステップ u_{i+1} を求める際にコンピュータは $u_i, u_{i-1}, u_{i+2}, u_{i-2}$ の計4つの値を記憶しなければならない。よって Runge-Kutta-Gill 法を用いることで計算におけるメモリの使用領域を減らすことができる。

2.3 計算領域、初期条件・境界条件

本シミュレーションで用いる計算領域と初期状態を以下の図6、7に示す。

図7は太陽コロナの黒点から出入りする磁場によってできる反平行磁場を想定している。2次元 x - y 平面空間で考えており、 z 軸方向の空間は考えていない。実際にシミュレーションを行う計算領域は図7の破線で囲まれた範囲のみであり、他の部分は x, y 方向の境界条件を適当に決定することで反平行磁場を作っている。 x 軸方向の境界条件は周期的境界、 y 軸方向の境界条件はミラー境界 (図7の半透明領域) である。

次に初期条件について述べる。ベクトルポテンシャル \mathbf{A} の z 成分 A_z は

$$A_z = \ln\{\exp(y) + \exp(-y)\} - \ln\{\exp(y_{max}) + \exp(-y_{max})\} \quad (102)$$

とした。ここから磁場 \mathbf{B} の成分 B_x, B_y も決まる。今、2次元平面で考えているので z 方向の微分は0とする。

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y}, -\frac{\partial A_z}{\partial x}, B_z \right) \\ &= (\tanh(y), 0, B_z) \end{aligned} \quad (103)$$

さらに B_z の初期条件を追加する。

$$B_z = \frac{1}{\cosh(y)} \quad (104)$$

速度の初期条件は各成分0とした。なお、 B_z に値を与えたのは、点 $(x, y) = (0, 0)$ 付近でアンペールマックスウェルの法則により生じる $-z$ 方向の電

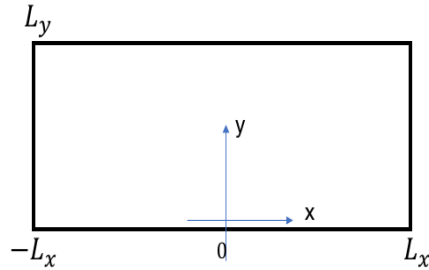


図 6: シミュレーションの計算領域

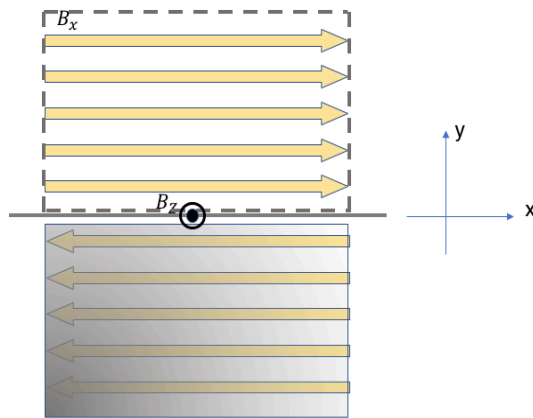


図 7: シミュレーションの初期状態 (破線四角内が計算領域)

流、すなわちプラズマ構成粒子の陽子や電子が受けるローレンツ力を打ち消す働きをしている。この磁場 B_z のことをガイド磁場と呼ぶ。以上の物理量 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{V} のうち、 A_z に微小擾乱 $0.1 \exp(-x^2 - y^2)$ を与え、時間経過による磁場の変化を見る。

図 6 はシミュレーションの計算領域を表したものである。この図で、 $L_x = 50$ 、 $L_y = 10$ とした。その理由について述べる。

「序論」でも説明したように、磁気リコネクション率は Sweet-Parker リコネクションモデルにおいて電流シートが分断してプラズモイド (磁気島) を放出することで高くなっている。この電流シートが分断する過程は自発的に起きなければならないので、シミュレーションを行うにあたり、境界面反射によるプラズマの電流シートへの流れを減らす必要がある。よって、計算領域は電流シートの大きさに比べて十分大きなものでなければならない。なお、序論では電流シートを「磁気拡散領域と同義」として用い

たが、本章では単に反平行磁場によって点 $(x, y) = (0, 0)$ 付近にできる電流の流れる領域も指す。(68) と (69) により電流シートの厚さ δ はおおよそ $\sqrt{\eta}$ としてよいから $\sqrt{\eta} \ll L_y$ であれば良い。本シミュレーションでは $L_y = 50$ 、 $\eta = 2.0 \times 10^{-3}$ とした。また、 L_y だけでなく、初期の電流シートの厚さにも注意を払わなければならない。上記のように、磁場 \mathbf{B} の初期条件は

$$\mathbf{B} = (\tanh(y), 0, \frac{1}{\cosh(y)}) \quad (105)$$

であるが B_x について、定数 a とすると $y = \tanh(x/a)$ のグラフ次のように描ける。

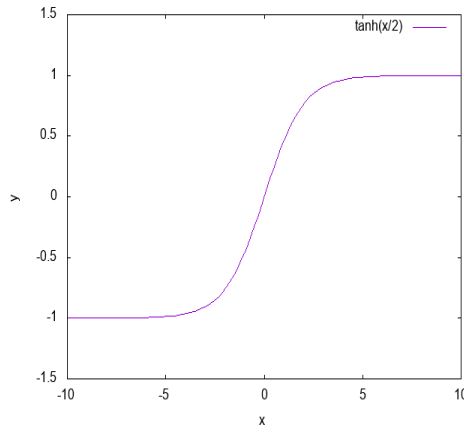


図 8: グラフ $y = \tanh(x/a)$ (ここでは $a = 2$ とした)

図 8 を見ると、半値幅はおおよそ a であることがわかる。すなわち本シミュレーションの初期状態の電流シートの厚さはおおよそ $a = 1$ であることがわかり、これは磁気拡散領域の厚さ $\sqrt{\eta} \approx 4.0 \times 10^{-3}$ よりも十分大きいので初期状態からすぐに磁気リコネクションは起こることはない。次に L_x の値の理由について述べる。Sweet-Parker リコネクションモデルにおけるアスペクト比は電流シートの幅を L 、厚さを δ とすると、 $\delta/L \approx 10^{-3}$ であるから、磁気拡散領域の幅はおおよそ 5 である。よって、 $2L_x = 100$ は本シミュレーションにおいて十分な大きさと言える。

次にグリッド数について述べる。一つひとつのグリッドが正方形になるようにグリッドをとった。本シミュレーションでは x 方向に 1000 等分、 y 方向に 10000 等分した。グリッドひとつの幅は 0.01 である。磁気拡散領域の厚さは $\sqrt{\eta} \approx 4.0 \times 10^{-3}$ であるので電流シート内のデータも取ることが可能である。

最後に今回用いるパラメータについて説明する。電気抵抗率 $\eta = 2.0 \times 10^{-3}$ で固定し、粘性率 $\nu = 5.0 \times 10^{-4}, 1.0 \times 10^{-3}, 4.0 \times 10^{-3}$ の条件でそれぞれシミュレーションを行った。また、電気抵抗率 η の値は同じで、プラズマの速度を 0 で固定させてシミュレーションを行い、プラズマの運動によって磁気リコネクションが速くなっているかどうかを検証した。

3 結果

2章のシミュレーションモデルでシミュレーションを行った結果を示す。

まず、 $x-y$ 平面での磁力線(ライン)と電流の大きさ(カラー)をプロットしたグラフを時間経過とともに乗せる。図9は $\nu = 5.0 \times 10^{-4}$ の場合、図10は $\nu = 1.0 \times 10^{-3}$ の場合、図11は $\nu = 4.0 \times 10^{-3}$ の場合、そして図12は速度を0で固定した場合の図である。なお、 $\eta = 2.0 \times 10^{-3}$ は共通して同じである。また、time=200以降の図はでは境界面反射による電流シートへの影響が強くなり、磁気リコネクションに関する議論が難しいので割愛した。

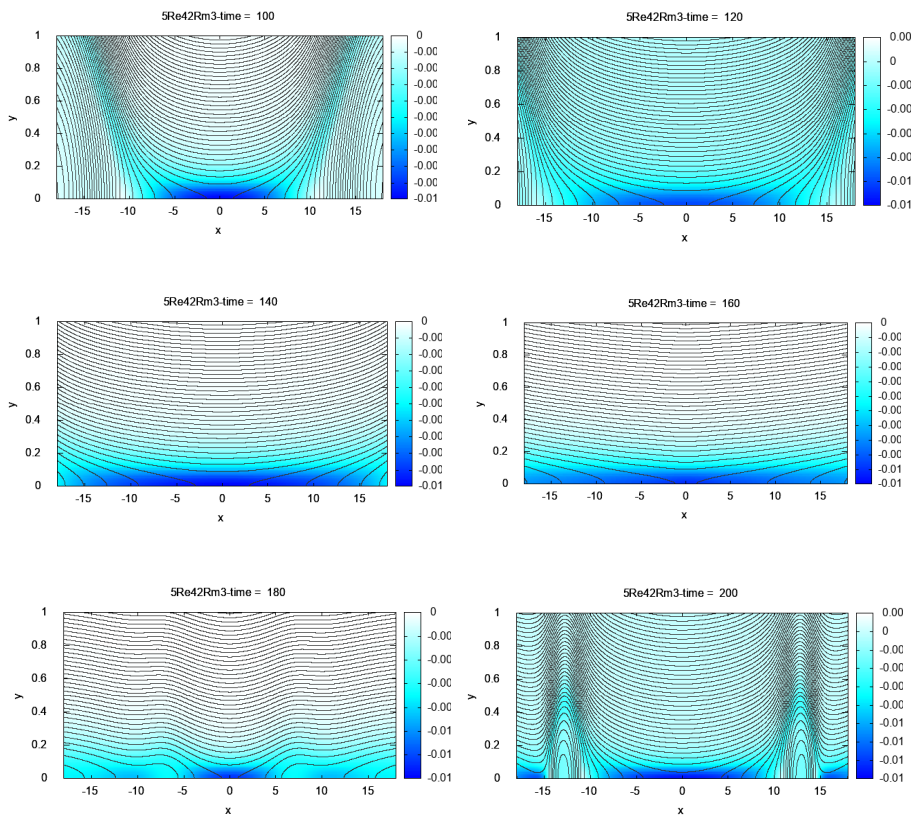


図9: $\eta = 2.0 \times 10^{-3}$ 、 $\nu = 5.0 \times 10^{-4}$ での磁力線と電流の大きさ
(時刻が小さい順にプロットしている)

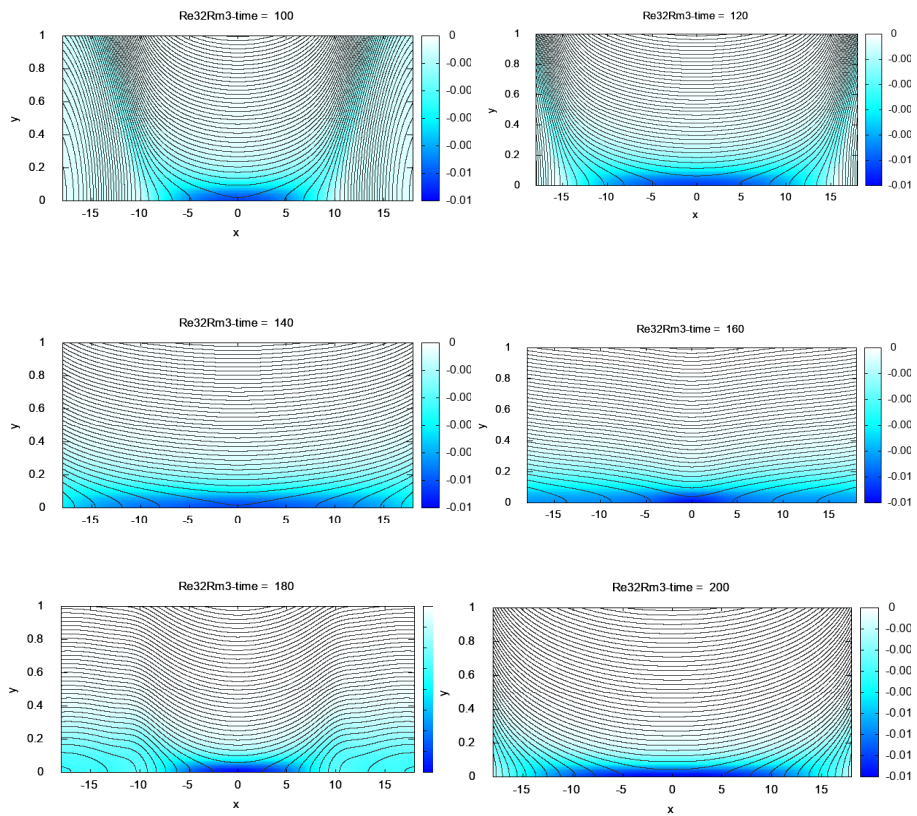


図 10: $\eta = 2.0 \times 10^{-3}$ 、 $\nu = 1.0 \times 10^{-3}$ での磁力線と電流の大きさ
(時刻が小さい順にプロットしている)

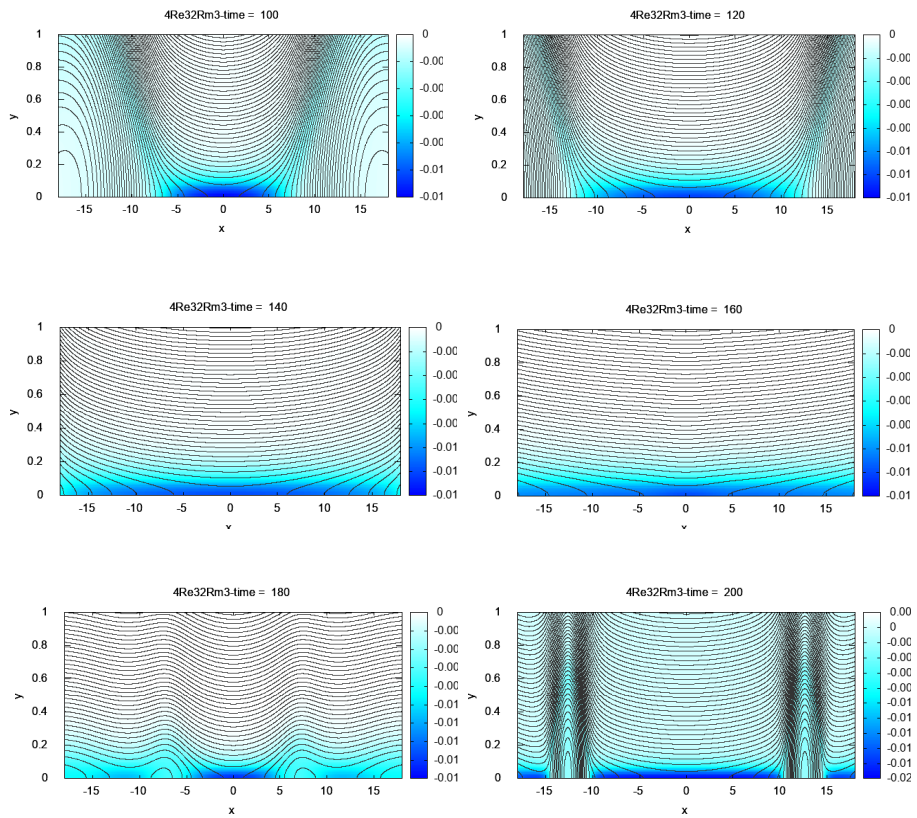


図 11: $\eta = 2.0 \times 10^{-3}$ 、 $\nu = 4.0 \times 10^{-3}$ での磁力線と電流の大きさ
(時刻が小さい順にプロットしている)

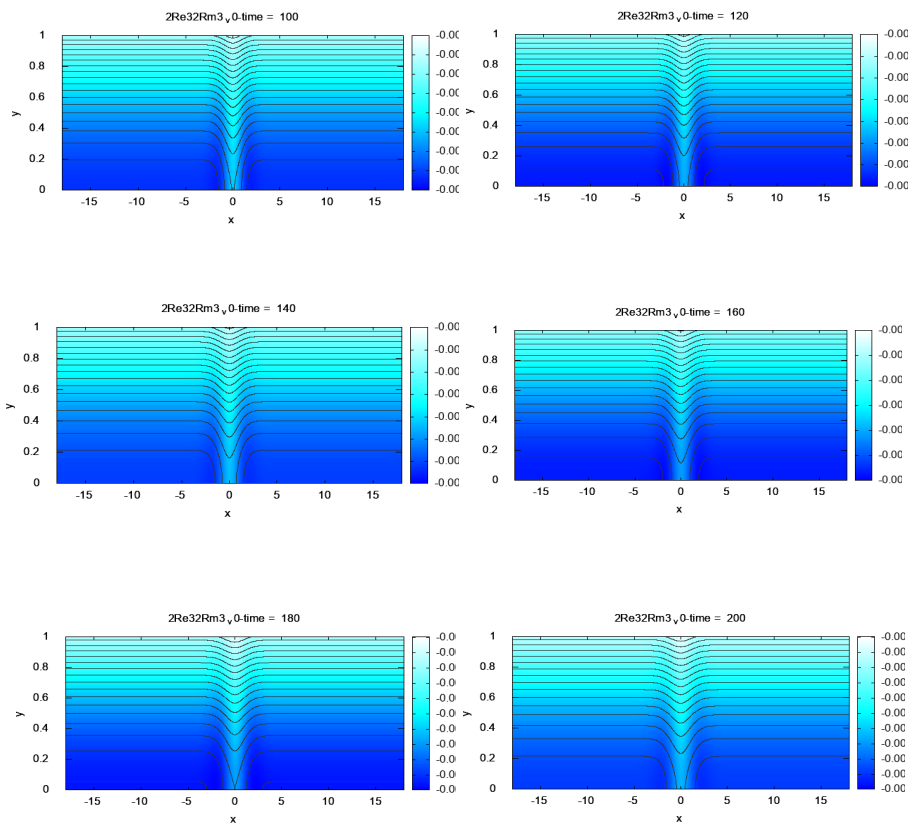


図 12: $\eta = 2.0 \times 10^{-3}$ 、速度常時 0 での磁力線と電流の大きさ
(時刻が小さい順にプロットしている)

同様に、 $x-y$ 平面での磁力線 (ライン) と渦度の大きさ (カラー) をプロットしたグラフを時間経過とともに乗せる。渦度の z 成分 Ω_z は中心差分を用いて

$$\begin{aligned}
 \Omega_z &= (\nabla \times \mathbf{V})_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \\
 &= \frac{v_{j-2} - 8v_{j-1} + 8v_{j+1} - v_{j+2}}{12\Delta x} \\
 &\quad - \frac{v_{i-2} - 8v_{i-1} + 8v_{i+1} - v_{i+2}}{12\Delta y}
 \end{aligned} \tag{106}$$

と書ける。

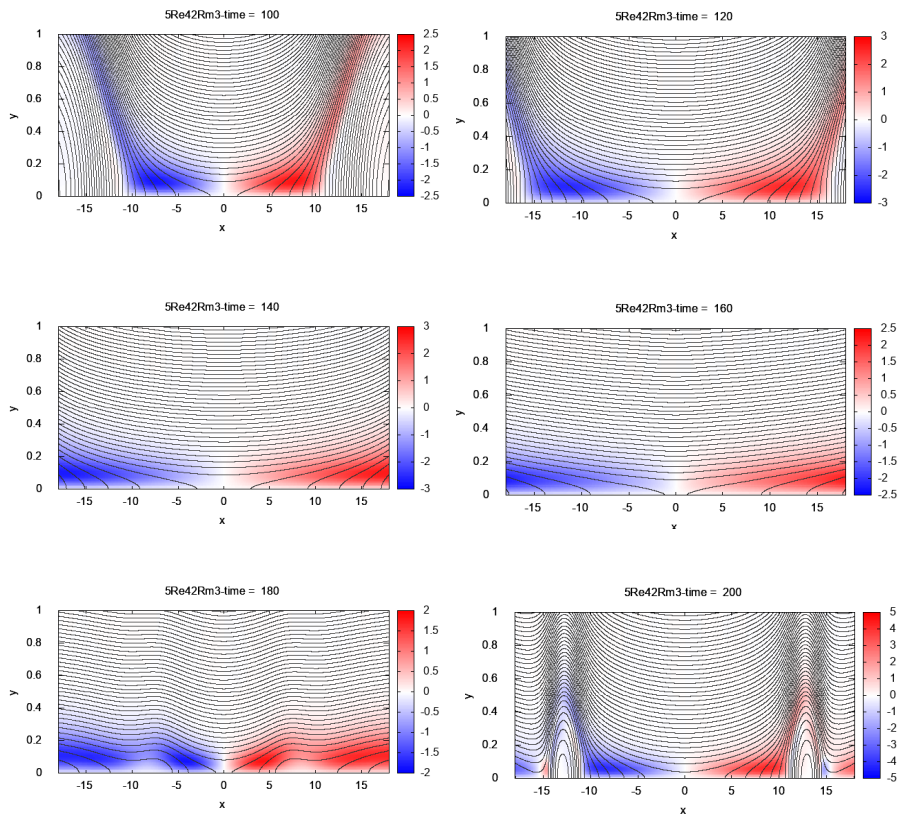


図 13: $\eta = 2.0 \times 10^{-3}$ 、 $\nu = 5.0 \times 10^{-4}$ での磁力線と渦度の大きさ (時刻が小さい順にプロットしている)

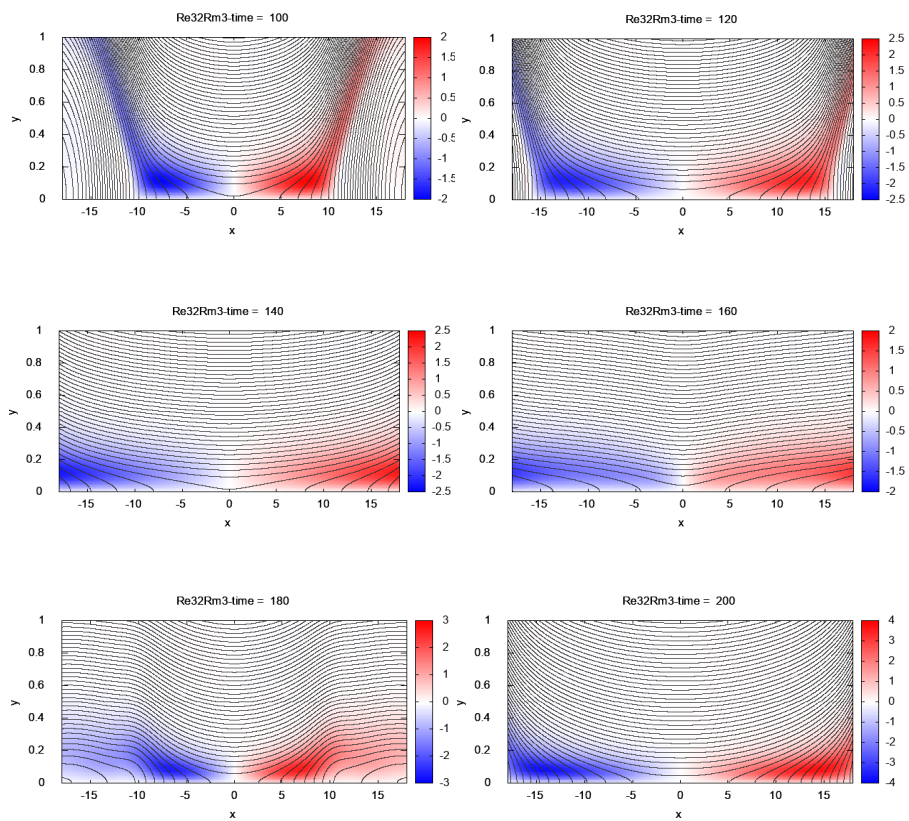


図 14: $\eta = 2.0 \times 10^{-3}$ 、 $\nu = 1.0 \times 10^{-3}$ での磁力線と渦度の大きさ
(時刻が小さい順にプロットしている)

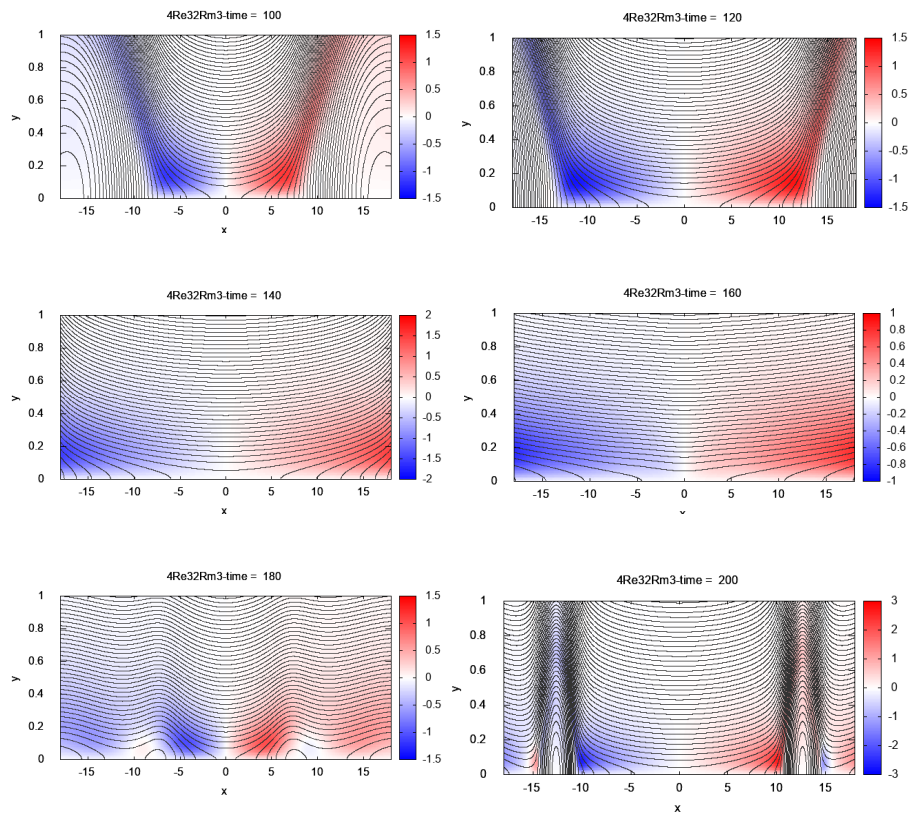


図 15: $\eta = 2.0 \times 10^{-3}$ 、 $\nu = 4.0 \times 10^{-3}$ での磁力線と渦度の大きさ
(時刻が小さい順にプロットしている)

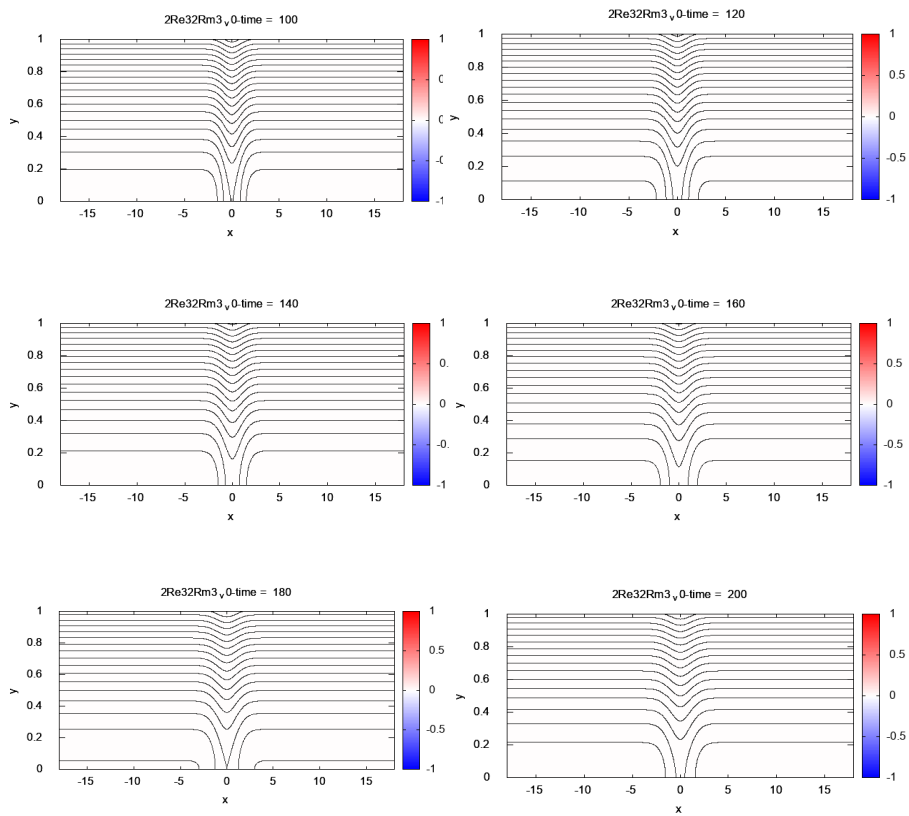


図 16: $\eta = 2.0 \times 10^{-3}$ 、速度常時 0 での磁力線と渦度の大きさ
(時刻が小さい順にプロットしている)

最後にそれぞれのパラメータ値において、系の運動エネルギー E_k 、磁気エネルギー E_m 、直線 $y = 0$ 上における電場の z 成分の最大値 E_{zmax} 、 $y = 0$ 上におけるベクトルポテンシャルの z 成分の最大値 A_{zmax} の時間発展をグラフ化し、粘性率の値ごとに比較した。

E_{zmax} について、(74) により

$$\eta j_z = \eta \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \quad (107)$$

であり、一般化されたオームの法則 (31) の $\mathbf{V} \times \mathbf{B}$ の項がほとんど 0 (速度ベクトル \mathbf{V} と磁場ベクトル \mathbf{B} が平行) であるので、直線 $y = 0$ 上で ηj_z の最大値をその時刻の E_{zmax} としている。

A_{zmax} については初期条件にゆらぎをつけた式

$$\begin{aligned} A_z &= \ln\{\exp(y) + \exp(-y)\} - \ln\{\exp(y_{max}) + \exp(-y_{max})\} \\ &+ 0.1 \exp(-x^2 - y^2) \end{aligned} \quad (108)$$

の最大値を直線 $y = 0$ 上から探し、そこから初期値を引いた値をその時刻の A_{zmax} としている。 A_{zmax} の物理的意味を説明する。(103) により、

$$B_x = -\frac{\partial A_z}{\partial y} \quad (109)$$

であり、磁束 ψ とすると、図 17 のように磁束を「直線を通過する磁力線 B_x の本数」と定義すれば

$$\begin{aligned} \psi &= B_x \Delta y \\ &= \int_y^{L_y} \frac{\partial A_z}{\partial y} dy \\ &= A_z(L_y) - A_z(0) \end{aligned} \quad (110)$$

となり、境界条件 $A_z(L_y) = 0$ から

$$A_z = -\psi \quad (111)$$

となる。

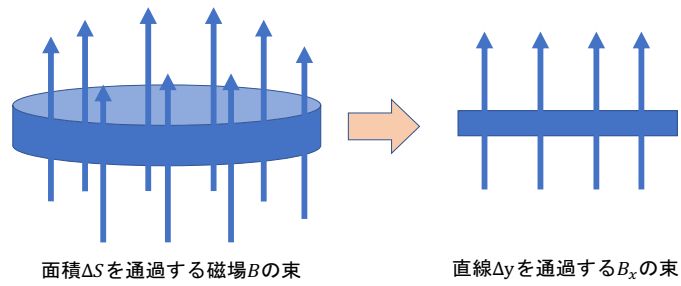


図 17: 磁束の1次元計算の模式図

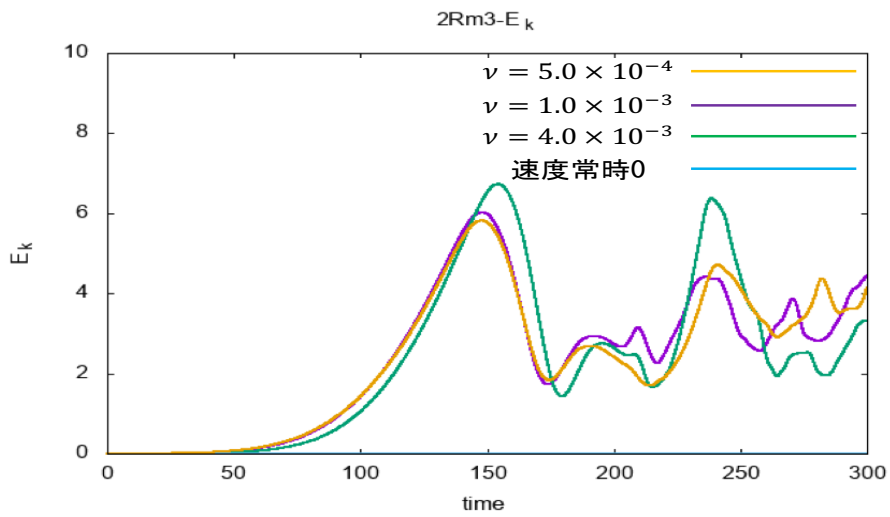


図 18: 各粘性率ごとの運動エネルギーの時間発展

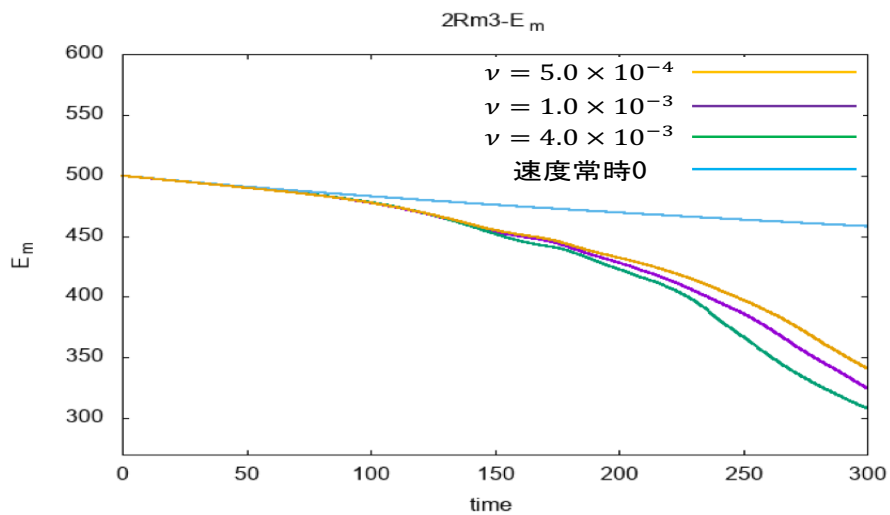


図 19: 各粘性率ごとの磁気エネルギーの時間発展

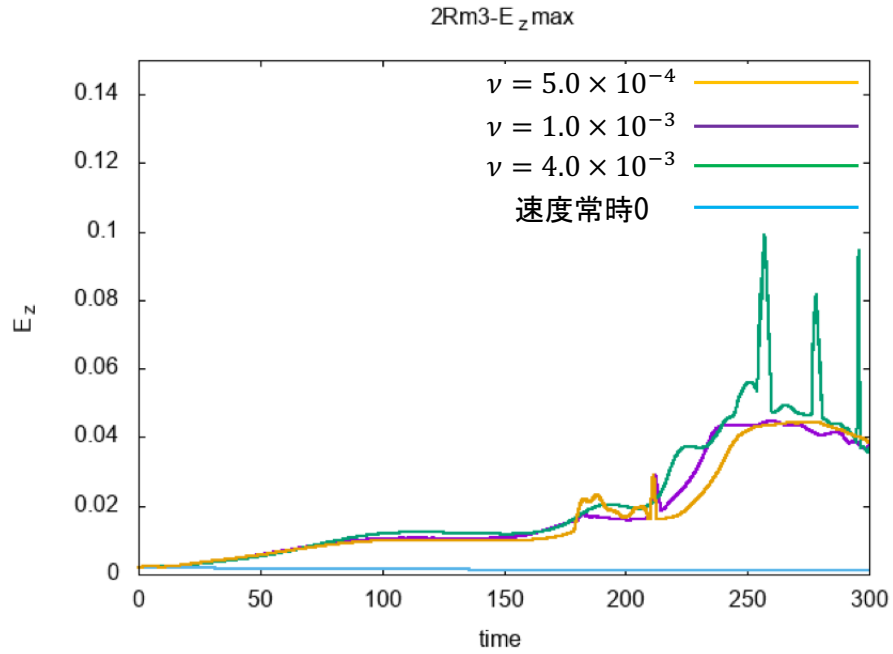


図 20: 各粘性率ごとの ηj_z の時間発展

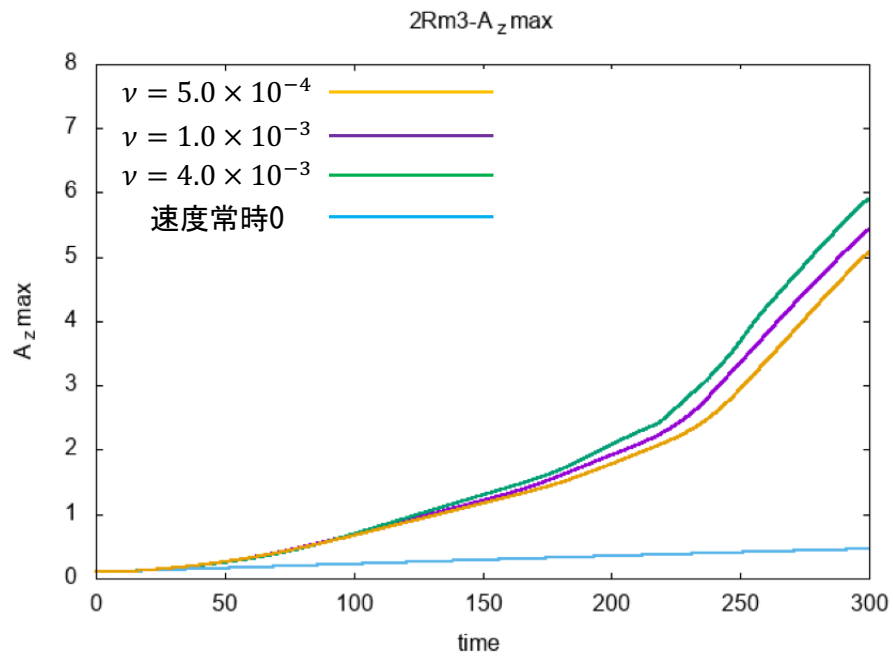


図 21: 各粘性率ごとの A_{zmax} の時間発展

4 考察

4.1 磁力線と電流、渦度についての議論

図9～図12は磁力線と電流の様子を表す。青色が濃いほどその範囲に流れる電流の強さが強いことになる。

まず、図12(速度0)の場合、磁力線、電流ともにほとんど変化していない。速い磁気リコネクションの説明には、プラズマ運動が欠かせないことが考えられる。以降、速度0以外のパラメータの結果のみで考察する。time=100ではどのパラメータも初期条件のベクトルポテンシャルによる磁気リコネクションが起きている。これはSweet-Parkerリコネクションモデルと似た構造をしている。その後、いずれのパラメータでも時間経過とともに電流シートの幅が広がっており、time=200で図9、図11ではプラズモイドが左右に放出しているのが確認できる。このことはSweet-Parkerリコネクションモデルのプラズモイド不安定性が起きていると考えられる。図10では時間経過に伴い電流シートの幅は広がっているものの、プラズモイドは確認できなかった。

図13～図16は磁力線と渦度の様子を表す。色が濃いほど渦度の絶対値が大きい。赤色は左回り、青色は右回りの渦である。

図12(速度0)の場合、プラズマの運動がないためそもそも渦が起きていないことがわかる。以降、速度0以外のパラメータの結果のみで考察する。全パラメータを通して電流シート上には渦ができていくことがわかる。また、図9、図11のtime=200において、プラズモイドができていく部分の渦は周囲と逆回転であることもわかる。

次に、渦のできる空間的大きさについて考えると、図9と図11を比較して、図11の方がtimeを問わず、渦の大きさが大きいことがわかる。ここで、time=100～200、直線 $x=0$ 上での $v_y - y$ グラフを $\nu = 5.0 \times 10^{-4}$ 、 $\nu = 1.0 \times 10^{-3}$ 、 $\nu = 4.0 \times 10^{-3}$ ($\eta = 2.0 \times 10^{-3}$ で共通)で図22にプロットした。このグラフを見ると、全パラメータで計算領域の点 $(x, y) = (0, 0)$ 、すなわちリコネクションポイントに+y方向から流れ込んでくるプラズマの速さは時間経過とともに速くなっていることがわかる。 $\nu = 5.0 \times 10^{-4}$ と $\nu = 4.0 \times 10^{-3}$ を比較すると、 $\nu = 4.0 \times 10^{-3}$ の方が入り込む速さが速く、さらに比較的広い範囲で速さが速いことがわかる。すなわち、渦が大きいためたくさんのプラズマが速く入り、磁気リコネクションの進行が速くなると考えられる。 $\nu = 1.0 \times 10^{-3}$ のグラフでは他の粘性率に比べ、速度の空間分布がtimeによってばらついている。

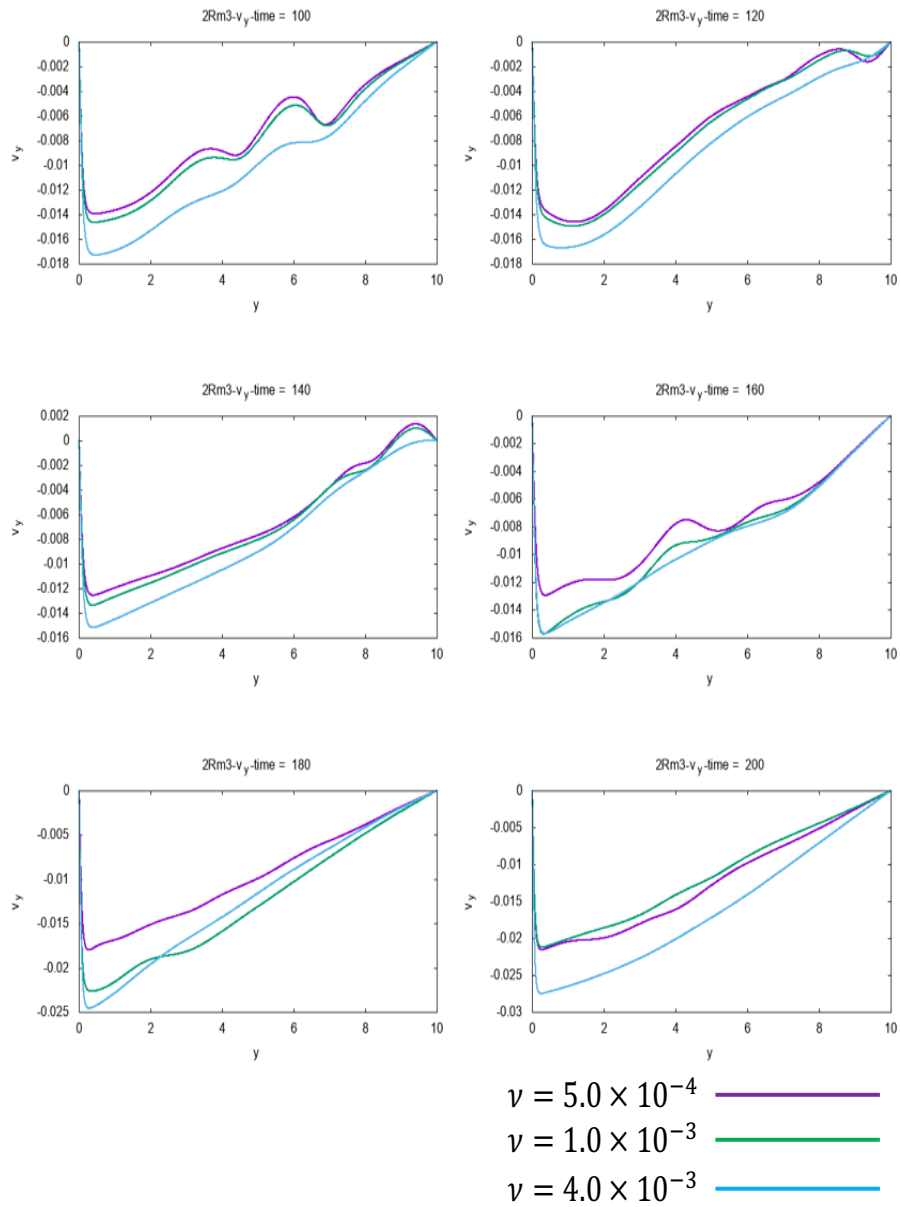


図 22: $\eta = 2.0 \times 10^{-3}$, $\nu = 5.0 \times 10^{-4}, 1.0 \times 10^{-3}, 4.0 \times 10^{-3}$ での直線 $x = 0$ 上での $v_y - y$ グラフ
(time の若い方から順にプロットしている)

4.2 運動エネルギー、磁束等についての議論

図 18～図 21 はそれぞれ、各粘性率の運動エネルギー E_k 、磁気エネルギー E_m 、直線 $y = 0$ 上における電場の z 成分の最大値 E_{zmax} 、ベクトルポテンシャルの z 成分の最大値 A_{zmax} の時間発展を表したものである。なお、「結果」で述べたように time=200 以降のシミュレーション結果はプラズマの境界面反射の影響があるために、定性的な議論が難しい。よって本研究では、主に time=100～200 でのグラフについて考察する。

まず図 18～図 21 全てにおいて速度を常時 0 としたグラフは大きな変化を見せていない。運動エネルギー、磁気エネルギーの変化が小さいことから、プラズマの運動がないと磁気リコネクションにエネルギーのやりとりがほとんど行われていないことが考えられる。図 18 では、全パラメータを通して運動エネルギーが time=150 あたりでピークに達しており、 $\nu = 4.0 \times 10^{-3}$ のグラフが他のパラメータに比べ大きい。図 19 では、全パラメータを通して time=100 あたりから徐々に磁気エネルギーが小さくなっており、特に $\nu = 4.0 \times 10^{-3}$ のグラフで減少量が大きい。これらのことから粘性率が大きい方がインフローの磁気エネルギー解放が速く、運動エネルギー等への変換量が大きいと考えられる。

図 20 では time=170 あたりまで各パラメータで大きな差は見られないが、time=200 あたりで $\nu = 4.0 \times 10^{-3}$ のグラフに凹凸が見られる。これはテアリング不安定性によって電流シートが分割されてできた新たな電流シート内の電流の時間変化が大きいためと考えられる (図 23)。

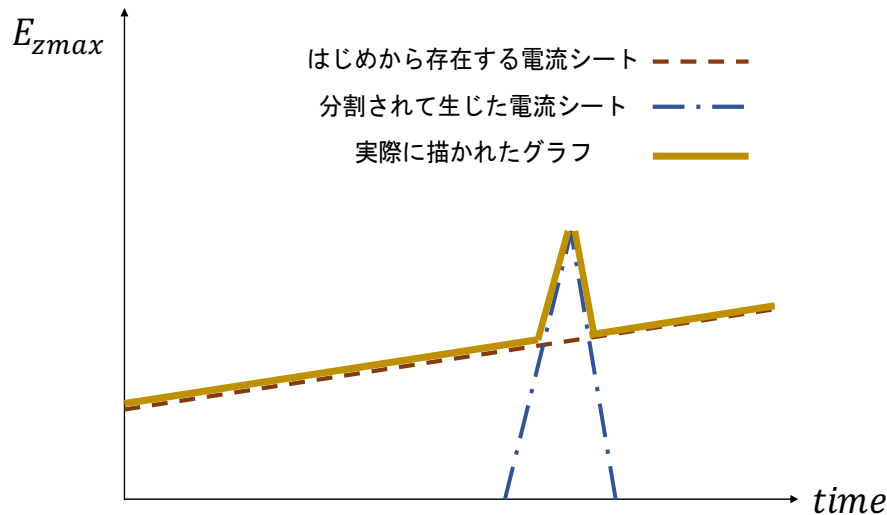


図 23: $\nu = 4.0 \times 10^{-3}$ での E_{zmax} のグラフの詳細 (途中から別の電流シートの E_z がプロットされている)

図 21 では、粘性率が大きいほど A_{zmax} の時間変化が大きいことがわかる。磁束の時間変化はリコネクション率に比例し、(111) により

$$\frac{\partial A_{zmax}}{\partial t} = -\frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (112)$$

であるから A_{zmax} の時間変化はリコネクション率に一致する。このことを踏まえると、粘性率の大きい方がリコネクション率は高いと言える。

4.3 今後の展望

本研究を通して、高い磁気リコネクション率にはプラズマの運動による影響があり、プラズマ流体の粘性率が大きいほど磁気エネルギーの解放が速く、運動エネルギーの増加量が大きいということがわかった。しかし、本研究で行ったシミュレーションモデルの基礎方程式は圧力項 ∇p を無視しているが、圧縮性のプラズマ流体を想定している。また、熱伝導率を無限大と仮定しているため、電気抵抗率 η の導電性流体に電流 \mathbf{j} が流れることによって生じるジュール化熱 $\eta|\mathbf{j}|^2$ が無限小時間で計算領域から取り去られてしまい、エネルギー保存則が破れている。よって次なる課題として、磁気エネルギーの変換先の詳細を明らかにし、磁気リコネクション率の上昇にどのエネルギーがどれほど関係しているのかを数値計算によって解析することが挙げられる。無次元化された MHD 方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \nu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (113)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B} - \eta \mathbf{j}) \quad (114)$$

$$\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B} \quad (115)$$

と書け、(113) の左から \mathbf{V} の内積を取ると

$$\mathbf{V} \cdot \left\{ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right\} = \mathbf{V} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) + \mathbf{V} \cdot (\nu \nabla^2 \mathbf{V}) \quad (116)$$

ベクトル公式を用いて変形していくと次の式になる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v^2}{2} \right) &= \mathbf{V} \cdot \{ \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V}) \} - \nabla \cdot \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \\ &+ \nu \left[\nabla^2 \left(\frac{v^2}{2} \right) - |\nabla \cdot \mathbf{V}|^2 - |\nabla \times \mathbf{V}|^2 \right] \\ &+ \nu [\nabla \cdot \{ (\nabla \cdot \mathbf{V}) \mathbf{V} - (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \}] \end{aligned} \quad (117)$$

次に、(114) に (115) を代入すると磁場の誘導方程式

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B} \quad (118)$$

となり、左から B の内積を取ると

$$B \cdot \frac{\partial B}{\partial t} = B \cdot \{\nabla \times (V \times B)\} + B \cdot \eta \nabla^2 B \quad (119)$$

となる。この式をベクトル公式を用いて変形すると次の式になる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B^2}{2} \right) &= -\nabla \cdot \{ |B|^2 V - (B \cdot V) B \} \\ &\quad - V \cdot (j \times B) + \eta j^2 + \eta \nabla \cdot (j \times B) \end{aligned} \quad (120)$$

(117) と (120) の各項をそれぞれ全平面で積分し、それらの時間変化を見ることで様々な推測ができると期待される。

次に、シミュレーションの計算領域とグリッド数について反省点がある。今回、取り扱った粘性率は $\nu = 5.0 \times 10^{-4}, 1.0 \times 10^{-3}, 4.0 \times 10^{-3}$ の 3 パラメータであるが、 $\nu = 5.0 \times 10^{-4}, 4.0 \times 10^{-3}$ の結果から期待される結果が $\nu = 1.0 \times 10^{-3}$ からは得られなかった。この原因の一つとして電流シート内にとったグリッド数、約 4~5 が点の数として不十分であることが挙げられる。よってグリッド数を増やすべきであった。もう一点、本研究の考察で time=200 以前の結果を議論の対象としたが、図 (20) の $\nu = 5.0 \times 10^{-4}$ に見られる凹凸が time=200 ぎりぎりであったことなど、考察するにあたって扱える time の範囲を広げるように計算領域を見直す必要がある。具体的には境界面反射による影響を減らすために、 L_x を 50 から 100 まで広げることでより多くのデータを扱える。

5 結論

粘性率が磁気リコネクション率を上昇させる要素となっているかどうかを、完全圧縮性 MHD 方程式を単純化し、密度および圧力の時間変化の寄与を無視したシンプルなモデルを用いてシミュレーションを行った。その結果、粘性率が高いほど磁気リコネクション率が高い傾向にあることがわかった。今後は、グリッド幅を小さくすることや、エネルギー変換の詳細を解析することで、磁気リコネクションの純粋な粘性率依存性について、より高度な議論をすることができると期待される。

参考文献

- [1] NASA's Goddard Space Flight Center/S. Wiessinger を加工
- [2] GEOTILE 衛星で探るオーロラ発生の謎 (<http://www.isas.jaxa.jp/j/forefront/2010/miyashita/02.shtml>)
- [3] 宮本 健郎 (2004) 「プラズマ物理・核融合」財団法人 東京大学出版会
- [4] 大澤幸治 (2001) 「MHD でわかる波動現象」プラズマ・核融合学会誌
- [5] 柴山 拓也 (2015) 「プラズモイドによる磁気リコネクションの高速化機構に関するシミュレーション研究」修士論文 名古屋大学
- [6] PROCEEDINGS OF THE ROYAL SOCIETY A MATHEMATICAL, PHYSICAL AND ENGINEERING SCIENCES (<http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/472/2196/20160479.figures-only>) Figure1
- [7] Fast Magnetic Reconnection (<https://farside.ph.utexas.edu/teaching/plasma/lectures1/node78.html>) Figure 27 を加工
- [8] 松井 悠起 「太陽天体流体力学入門：観測編」 (http://www-space.eps.s.u-tokyo.ac.jp/group/yokoyama-lab/thesis/2010ug_matsui.pdf)
- [9] K. Shibata and S. Tanuma, Earth Planets Space 53, 473 (2001).
- [10] 「K's 日記 ルンゲクッタギル法 (Runge-Kutta-Gill method)」 (<http://kapapa.web.fc2.com/kadai26.htm>)
- [11] P. A. Sweet 「The Neutral Point Theory of Solar Flares」 Electromagnetic Phenomena in Cosmical Physics (Cambridge University Press, 1958), Vol. 6, p. 123
- [12] E.N.Parker 「Sweet's mechanism for merging magnetic fields in conducting fluids」 Journal of geophysical reserch Vol.62, p.509-520
- [13] H.E.Petschek 「Magnetic Field Annihilation」 NASA Special Publication, p.425, 1964.
- [14] Kulsrud, Russell M. 「Intuitive approach to magnetic reconnection」 Physics of Plasmas, Vol.18, Issue 11, article id:111201 p.6 (2011)

- [15] Shibata, Kazunari; Tanuma, Syuniti 「Plasmoid-induced-reconnection and fractal reconnection」 Earth, Planets and Space, Vol.53, p. 473-482.(2001)
- [16] A. Bhattacharjee¹, Yi-Min Huang¹, H. Yang², and B. Rogers² 「Fast reconnection in high-Lundquist-number plasmas due to the plasmoid Instability」 Physics of Plasmas vol.16, 112102 (2009)
- [17] R. Samtaney, N. F. Loureiro, D. A. Uzdensky, A. A. Schekochihin, and S. C. Cowley 「Formation of Plasmoid Chains in Magnetic Reconnection」 Phys. Rev. Lett. vol.103, 105004(2009)
- [18] Takuya Shibayama, Kanya Kusano, Takahiro Miyoshi, Takashi Nakabou, and Grigory Vekstein 「Fast magnetic reconnection supported by sporadic small-scale Petschek-type shocks」 Physics of Plasmas vol.22, 100706 (2015);
- [19] Takashi Minoshima, Takahiro Miyoshi, and Shinsuke Imada 「Boosting magnetic reconnection by viscosity and thermal conduction」 Physics of Plasmas vol.23, 072122 (2016)

謝辞

卒業論文完成までに数え切れないほどの方々にお世話になりました。指導教官である杉立教授には、必要な情報を時刻、場所を問わず早急に送っていただき、研究室在籍の学生を第一に考えていただきありがとうございます。

主査である三好助教には毎日のように議論、助言していただき、今後の人生に生かされることばかりを学ぶことができました。学術的なこと以外の相談でも真摯に私の話を聞いてくださり、ありがとうございました。また、2017年度前期の物理科学セミナーにおいて、原子核物理についてのゼミを見てくださってありがとうございました。感謝してもしきれないほどです。

志垣准教授には2017年前期のラボエクソサイズにおいて指導していただきありがとうございました。直接的ではないにしろ、実験装置の機械トラブルの対処能力はだいぶつuitaと思われます。時々買ってくださる海外のコーヒーもありがたくいただきました。研究の進捗につながったことは間違いありません。

本間助教の研究に対する姿勢にとても感動しました。4年生歓迎会を開いていただいた際に、おっしゃった「研究は息抜きじゃないの？」という言葉は今後忘れることはありません。気になったことは、相手を選ばず平等にどんどん尋ねる積極性も研究者の理想だと思います。

以上の方々には毎週月曜日開催の研究室ミーティングにおいて、貴重なご意見をいただきました。時には厳しく叱ってくださり、気持ちが引き締まり、プライベートと、研究活動の区別がつくようになったと思います。上記の先生方のみならず、私の質問に快く答えてくださったり、食事等に誘ってくださった研究室の先輩方や、同じ部屋で互いに励まし合ったり、日々を楽しくしてくれた4年生の皆さんにも心から感謝いたします。あなたたちがいなければ、私の卒業論文はこれほど順調に進まなかったと思います。