

平成 30 年度 卒業論文

軽いベクトル中間子の質量二準位モデルによる
質量状態変化の検出可能性評価

広島大学理学部物理科学科
宇宙・素粒子科学講座
クォーク物理学研究室

学籍番号 B153764

近藤 丈仁

2019 年 2 月 27 日

指導教員 杉立 徹 教授
主査 志垣 賢太 准教授
副査 植村 誠 准教授

概要

我々は LHC 加速器 ALICE 実験において、高エネルギー原子核衝突によるクォーク・グルーオン・プラズマ (QGP) の研究を行なっている。QGP 中ではカイラル対称性の部分的回復による軽いベクトル中間子の質量変化が予想されている。軽いベクトル中間子の一部が QGP 中で崩壊してできるミュオン粒子対は強い相互作用を受けず検出されるため、ミュオン粒子の 4 元運動量を測定することで軽いベクトル中間子の崩壊前の質量を測定できる。2021 年から ALICE 検出器に新しく前方ミュオン粒子飛跡検出器 (MFT) を導入し、より高統計のデータ取得を予定するため、精密な質量スペクトルの検出が期待できる。

本研究では、MFT 導入前後についての実験条件を仮定した上で、媒質中と真空中で崩壊する場合の質量が各々定まっていると仮定する二準位のモデルで軽いベクトル中間子の質量状態変化の検出感度評価を行なった。MFT 導入前において、ミュオン粒子対の組み違いによる背景事象を無視した理想的な状態では、 ω 中間子の 1.2% が媒質中で 10% 軽くなった場合には、平均的には危険率 0.3% で質量変化が無い 1 準位の仮説を棄却できるという結果が得られた。

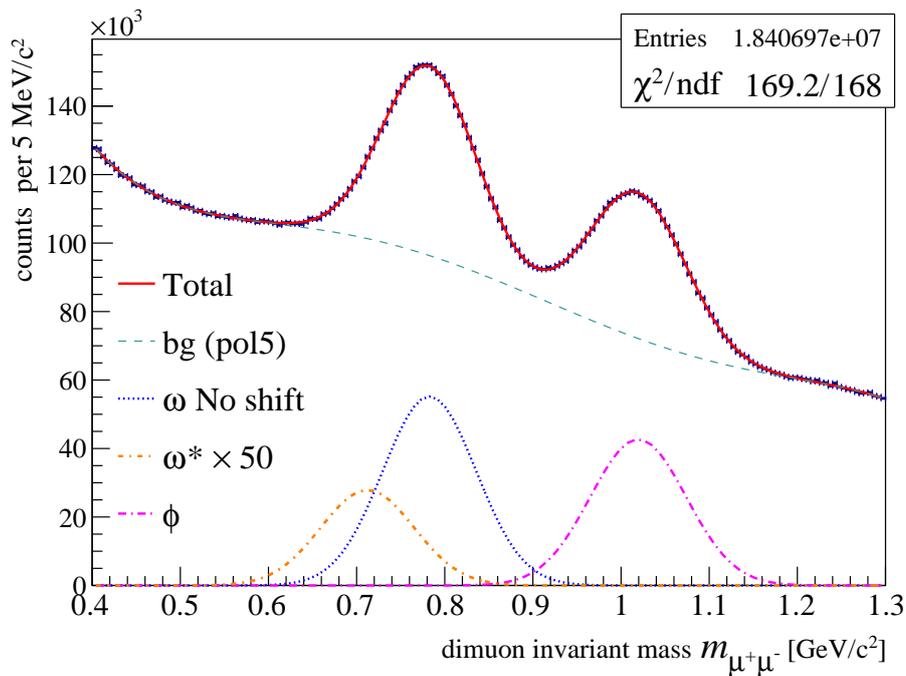


図1 ALICE 2016年陽子陽子衝突 $\sqrt{s} = 13$ TeV, $2 < p_T < 3$ GeV/c の μ 粒子対実データを基に ω 中間子の質量分布を変形させた質量分布

目次

第 1 章	序論	1
第 2 章	研究背景	3
2.1	素粒子と 3 つの相互作用	3
2.2	軽いベクトル中間子	4
2.3	質量獲得	5
2.4	クォーク・グルーオン・プラズマ	6
2.5	質量状態変化の実験的観測	7
2.6	電子対測定とミュー粒子対測定における背景事象の違い	7
第 3 章	実験背景	9
3.1	LHC 加速器	9
3.2	ALICE 実験	10
3.3	V0 検出器	10
3.4	ミュー粒子の検出	11
3.5	同条件での質量スペクトル変化についての先行研究	13
第 4 章	解析手法	15
4.1	質量分布の作成	15
4.2	ω が質量変化した質量分布へのフィット	20
第 5 章	結果	23
5.1	各シフトパラメータにおけるヒストグラムのあてはめ	23
5.2	検出できるシフトパラメータの領域	24
第 6 章	議論	29
6.1	今後の課題	29
6.2	得られた知見と考察	30
6.3	本論文の手法の限界	31
6.4	今後の展望	31
第 7 章	結論	33
付録		35
A	尤度比検定と $\Delta\chi^2$	35

謝辞	41
参考文献	43

目次

1	ALICE 2016 年陽子陽子衝突 $\sqrt{s} = 13 \text{ TeV}$, $2 < p_T < 3 \text{ GeV}/c$ の μ 粒子対実データを基に ω 中間子の質量分布を変形させた質量分布	ii
2.1	核物質中でのクォーク凝縮の温度密度依存性	6
2.2	軽いベクトル中間子の核物質中での質量変化の予測	6
2.3	KEK-PS E325 による $12 \text{ GeV } p + A$ 反応の電子対の不変質量スペクトル	7
3.1	CERN Accelerator Complex	9
3.2	Longer term LHC schedule	10
3.3	ALICE で用いる検出器	10
3.4	ミュオンスペクトロメータ	11
3.5	前方ミュオン粒子飛跡検出器の全体図	12
3.6	MUON, MFT の不変質量分解能	13
4.1	粒子が μ 粒子対に崩壊する図	16
4.2	コンビナトリアルバックグラウンドの差し引き	18
4.3	質量分布作成において基にした質量分布	19
4.4	2 準位模型の確率密度関数	20
4.5	2 準位模型によるフィットの関数形	21
5.1	質量変化したヒストグラムへのあてはめ	23
5.2	検出できるシフトパラメータの領域	24
5.3	検出できるシフトパラメータの領域	25
5.4	検出できるシフトパラメータの領域 (平滑化)	26
5.5	検出できるシフトパラメータの領域 (平滑化・拡大)	27

A.1	χ^2 分布	39
-----	-----------------------	----

表目次

2.1	3つの基本的な相互作用	3
2.2	クォークとレプトン	4
2.3	軽いクォークとそれらの反クォーク	4
2.4	軽いベクトル中間子のレプトン対への崩壊	5
3.1	MFT 導入前後の質量分解能	13
4.1	like sign method における数のおき方	17
A.1	χ^2 分布の表	39

第 1 章

序論

高エネルギー原子核衝突によって生成されるクォーク・グルーオン・プラズマ (QGP) 中において、カイラル対称性の部分的回復による軽いベクトル中間子の質量状態変化が予言されている。軽いベクトル中間子の一部は媒質中でレプトン対に崩壊してレプトンは強い相互作用を受けないため、レプトン対の運動量をそれぞれ観測することで媒質中で崩壊した軽いベクトル中間子の質量分布を再構成することができる。背景事象として、無相関なレプトン同士を組み合わせてしまうものやダリツ崩壊などが考えられる。電子対では特に中性パイ粒子のダリツ崩壊が大きな背景事象であるのと比べて、ミュー粒子ではダリツ崩壊の崩壊率が小さく、信号背景比を高めることができる。高温媒質中における質量状態変化の実験的証拠は未だ見つかっていないが、2021 年からの CERN の LHC 加速器 ALICE 検出器への前方ミュー粒子飛跡検出器の導入により高統計なデータ取得によって、質量状態変化の検出が期待されている。

本研究では、ALICE 実験で 2016 年に測定した $\sqrt{s} = 13$ TeV の陽子陽子衝突のデータの統計量と検出器の感度を反映したシミュレーションを行い、軽いベクトル中間子のミュー粒子対崩壊を介した質量状態変化の検出感度評価を行なった。高エネルギー原子核衝突実験では陽子陽子衝突を基準測定として用いる。陽子陽子衝突では QGP は生成されず、質量状態変化も起こっていないと考えられるため、そのデータについて検討しておくことは重要である。軽いベクトル中間子の質量が真空中と媒質中の 2 準位に分かれていると仮定し、ミュー粒子対の組違いが無い理想的な場合について、統計量と検出器の分解能を考慮した上で、媒質中で軽くなった粒子による質量状態変化の検出感度を議論した。

本論文の構成を述べる。2 章でカイラル対称性の部分的回復についての理論予測や先行研究をまとめる。この章でカイラル対称性の部分的回復によるハドロンの質量状態変化の実験的検証の重要性と現状を述べる。3 章では、軽いベクトル中間子の質量状態変化検出のための実験装置や実験的な背景を述べる。ミュー粒子対による質量状態変化の観測の利点である電子陽電子対による観測と比べてダリツ崩壊による背景事象が減らせることを説明した上で、現在までの実験での困難と、前方ミュー粒子飛跡検出器の導入による検出感度向上への期待を述べる。4 章では、付録の A を引用しつつこの論文で用いる解析手法について記し、5 章でその結果を示す。結果を述べた後に考察として、6 章で、本論文の解析手法の限界を述べる。最後に 7 章で、この論文をまとめる。

第 2 章

研究背景

はじめに、カイラル対称性の部分的回復による質量状態変化の測定の重要性について説明する。前提となる知識についてのまとめから始め、理論的背景に触れつつ、実験の現状を説明する。

2.1 素粒子と 3 つの相互作用

この節は、「原子核物理学」[1, 第 1 章] を参考にした。現代物理学の、特に素粒子物理学の根幹をなす理論の総称を素粒子物理学の標準模型と呼ぶ。標準模型は、素粒子とそれらの相互作用をゲージ理論により記述している。相互作用としては、4 つの基本相互作用から重力相互作用を除いた、電磁相互作用と弱い相互作用、強い相互作用の 3 つを含み、また、素粒子としてはゲージ粒子とクォーク、レプトン、ヒッグス粒子を含む。

まず、相互作用とゲージ粒子について説明する。標準理論では、粒子同士の振る舞いによって現象が説明される。その粒子同士の振る舞いを相互作用と呼ぶ。相互作用はゲージ粒子が媒介する。ゲージ粒子はスピン 1 のボソンで、表 2.1 のように各相互作用に対応したゲージ粒子がある。

強い相互作用は量子色力学 (Quantum Chromodynamics, QCD) によって記述されている。媒介するゲージボソンであるグルーオンは、色荷を持っている粒子 (クォークやグルーオン) の間でやり取りされるため、強い相互作用はクォークやグルーオンに対してはたらく相互作用である。クォーク同士を結びつけて核子を作ったり、核子同士を結びつけて原子核を作ったりしている。グルーオン自身が色を持っているのでグルーオン同士も相互作用する。

電磁相互作用は電磁気力であり、量子電磁気学として記述される。電磁相互作用を媒介するゲージボソンは光子であり、光子は電荷を持っている粒子同士でやり取りされるので、電荷を持っている粒子 (クォークと荷電レプトン) に対してはたらく。

弱い相互作用は、 β 崩壊などを引き起こすもので、弱い力、弱い核力とも呼ばれる。弱い相互作用を媒介するゲージ粒子は W^\pm, Z^0 ボソンであり、弱い相互作用に対する電荷のような量、弱荷を持つ粒子 (クォークやレプトン、 W^\pm, Z^0 ボソン) の間でやり取りされる。

次に物質粒子とも呼ばれるクォークとレプトンについて説明する。クォークとレプトンは、スピン 1/2 のフェルミオンであり、物質を構成する粒子である。どちらも表 2.2 のように質量によって 3 つの“ファミリー”に分類され

表 2.1 3 つの基本的な相互作用

相互作用	チャージ	チャージを持つ粒子	交換されるゲージ粒子	質量	J^P
強い相互作用	色	クォークとグルーオン	8 つのグルーオン (g)	0	1^-
電磁相互作用	電荷	クォークと荷電レプトンと W^\pm	光子 (γ)	0	1^-
弱い相互作用	弱荷	クォークと左巻レプトンと W^\pm, Z^0	W^\pm, Z^0	約 $10^2 \text{ GeV}/c^2$	1

表 2.2 クォークとレプトン

フェルミ粒子	ファミリー			色	電荷	弱いアイソスピン		スピン
	1	2	3			左巻き	右巻き	
クォーク	u (アップ)	c (チャーム)	t (トップ)	赤, 青, 緑	+2/3	1/2	0	1/2
	d (ダウン)	s (ストレンジ)	b (ボトム)		-1/3			
レプトン	ν_e	ν_μ	ν_τ	-	0	1/2	-	1/2
	e	μ	τ		-1		0	

表 2.3 軽いクォークとそれらの反クォーク

香り	色	アイソスピン	アイソスピンの	ストレンジネス	電荷数	裸の質量 [2]
		I	第 3 成分 I_3			
u	赤, 緑, 青	1/2	+1/2	0	+2/3	$2.2^{+0.5}_{-0.4}$
d		1/2	-1/2	0	-1/3	$4.7^{+0.5}_{-0.3}$
s		0	0	-1	-1/3	95^{+9}_{-3}
\bar{u}	反赤, 反緑, 反青	1/2	-1/2	0	-2/3	$2.2^{+0.5}_{-0.4}$
\bar{d}		1/2	+1/2	0	+1/3	$4.7^{+0.5}_{-0.3}$
\bar{s}		0	0	+1	+1/3	95^{+9}_{-3}

る。また、全てのクォークとレプトンに対して反フェルミ粒子が存在する。質量は同じで、色、電荷、弱いアイソスピンの第 3 成分が反対である。クォークは電荷と色荷を持つので、電磁相互作用と強い相互作用を受ける。6 種類あり、それぞれ電荷や質量が異なる。レプトンは荷電レプトンとニュートリノに分けられる。荷電レプトンは 3 種類あり、全て等しい電荷と弱荷を持ち、電磁相互作用と弱い相互作用を受け、質量は互いに異なる。3 種類は電子 (e)、ミュー粒子 (μ)、タウ粒子 (τ) と名付けられ、それぞれの質量は、0.511 MeV, 106 MeV, 1777 MeV [2] である。ニュートリノは電荷を持たず、弱荷のみを持つレプトンで、弱い相互作用のみを受ける。荷電レプトンそれぞれに対応して 3 種類ある。

ヒッグス粒子は素粒子に質量を与えるヒッグス機構に必要な粒子である。クォークの”裸の質量”はヒッグス機構によってもたらされる。

2.2 軽いベクトル中間子

2 つ以上のクォークがグルーオンによって強い相互作用を受けて束縛されている複合粒子をハドロンと呼ぶ。ハドロンには主にバリオンと中間子がある。バリオンは 3 つのクォークから作られる中性子や陽子などの粒子であり、中間子はメソンとも呼ばれ、2 つのクォークから作られる π 中間子のような粒子である。

ここで、 u, d, s クォークからできる中間子について考える。 u, d, s クォークの性質は表 2.3 の通りである。中間子はクォーク・反クォーク対の束縛状態であると考えられる。クォークや反クォークのスピンを合成すると $S = 0$ または $S = 1$ であり、中間子の基底状態では軌道角運動量は 0 であるので、合成角運動量 J も $J = 0$ または $J = 1$ である。また、クォークと反クォークは反対の内部パリティを持っているため、クォーク・反クォーク対の中間子は負のパリティを持っている。ベクトル中間子は $J = 1$ のものであり、 $J = 0$ のものは擬スカラー中間子である。 u, d, s クォークから構成される中間子の基底状態を考えると、3 種類のクォークと 3 種類の反クォークの組み合わせで、擬スカラー中間子とベクトル中間子はそれぞれ 9 種類あると考えられる。軽いベクトル中間子は、具体的には $\omega, \phi, \rho^0, \rho^\pm, K^{*0}, \bar{K}^{*0}, K^{*\pm}$ 中間子のことである。

表 2.4 軽いベクトル中間子のレプトン対への崩壊

中間子	質量 MeV/c^2	分布幅 MeV/c^2	e^+e^- への崩壊率	$\mu^+\mu^-$ への崩壊率
ρ^0	約 780	約 150	$(4.72 \pm 0.05) \times 10^{-5}$	$(4.55 \pm 0.28) \times 10^{-5}$
ω	782.65 ± 0.12	8.49 ± 0.08	$(7.4 \pm 1.8) \times 10^{-5}$	$(7.36 \pm 0.15) \times 10^{-5}$
ϕ	1019.461 ± 0.016	4.249 ± 0.013	$(2.973 \pm 0.034) \times 10^{-4}$	$(2.86 \pm 0.19) \times 10^{-4}$

この研究では後述の理由により、以降軽いベクトル中間子のうち、ストレンジネス $S = 0$ であり電荷を持たない 3 つの中間子 ρ^0, ω, ϕ について考える。 ϕ 中間子は $s\bar{s}$ 状態であると考えられる。

$$|\phi\rangle = |s^\uparrow \bar{s}^\uparrow\rangle$$

矢印はクォークのスピンの第 3 成分である。続いて ϕ より少し軽い ρ, ω 中間子を考える。 ρ, ω 中間子は、互いに質量がかなり近い u, d クォークから構成されており、かつ、同じ量子数を持つ状態であるため、クォークの香りの状態で表すと混合している。アイソスピンが 1 のものを ρ 中間子、0 のものを ω 中間子と呼ぶ。

電荷を持つ ρ 中間子は $|\rho^+\rangle = |u^\uparrow \bar{d}^\uparrow\rangle$, $|\rho^-\rangle = |\bar{u}^\uparrow d^\uparrow\rangle$ であり、アイソスピンが $I = 1$, 第 3 成分が $I_3 = \pm 1$ である。 ρ^\pm に対してアイソスピンに対する昇降演算子 I^\mp を作用させて、アイソスピンの第 3 成分 $I_3 = 0$ で中性の ρ^0 中間子を作る。

$$|\rho^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|u^\uparrow \bar{u}^\uparrow\rangle - |d^\uparrow \bar{d}^\uparrow\rangle)$$

以降、 ρ^0 を ρ と表記する。また、 ω 中間子はこれと直交するアイソスピンが 0 のもので、

$$|\omega\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|u^\uparrow \bar{u}^\uparrow\rangle + |d^\uparrow \bar{d}^\uparrow\rangle)$$

s クォークは u, d クォークより重いので、 ϕ 中間子における u, d クォークの混合の度合いは小さいため $s\bar{s}$ 状態と考えて良い。[3, 14.1 章]

e^+e^- 散乱実験における散乱断面積のピークの確率密度関数がこれらの中間子の質量 E_0 を中心値とする Breit-Wigner 関数

$$f(E) = \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2} \quad (2.1)$$

として記述されるのと同様に、質量スペクトルは近似的には Breit - Wigner 関数をしていると考えられる。ここで Γ は共鳴の幅 (半値全幅), E_0 は共鳴エネルギーである。

2.3 質量獲得

素粒子の多くはヒッグス機構により質量を獲得し、ハドロンはそれに加えて強い相互作用によって質量を獲得する。ヒッグス場との相互作用で u クォークと d クォークが獲得する質量は“裸の質量”と呼ばれる数 MeV であり、ヒッグス場が電弱対称性を破ることで、クォークに質量が与えられる。クォーク 3 つ uud , udd からなる核子やクォーク 2 つからなる軽いベクトル中間子の質量は約 $1 \text{ GeV}/c^2$ である。これらのハドロンの質量はクォークの裸の質量の和 ($\lesssim 200 \text{ MeV}/c^2$) と比べて大きい。この部分のハドロンの質量は強い相互作用によりカイラル対称性が破られることで獲得される。カイラル対称性の破れ具合はクォーク凝縮の大きさ $|\langle \bar{q}q \rangle|$ によって特徴付けられ、これは図 2.1 のように、温度や密度が低いと大きく、高温や高密度で小さくなる。そのため、高温や高密度な核物質中では部分的にカイラル対称性が回復しているとみられている [4]。

部分的にカイラル対称性が回復した媒質中でのハドロン、特にベクトル中間子の質量変化は多くの予想がある。T. Hatsuda *et al.* [6] によると、QCD の和の規則に従う計算では、軽いベクトル中間子 ρ, ω, ϕ の質量変化は図 2.2 のように密度が大きくなるにつれて質量変化率が大きくなると予測されるという。

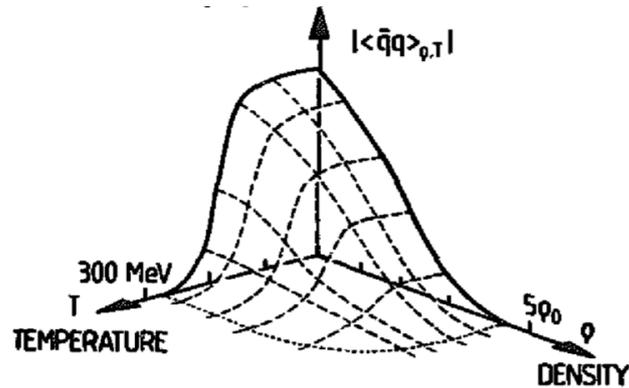


図 2.1 核物質中でのクォーク凝縮 $|\langle \bar{q}q \rangle|$ の温度密度依存性 [5]

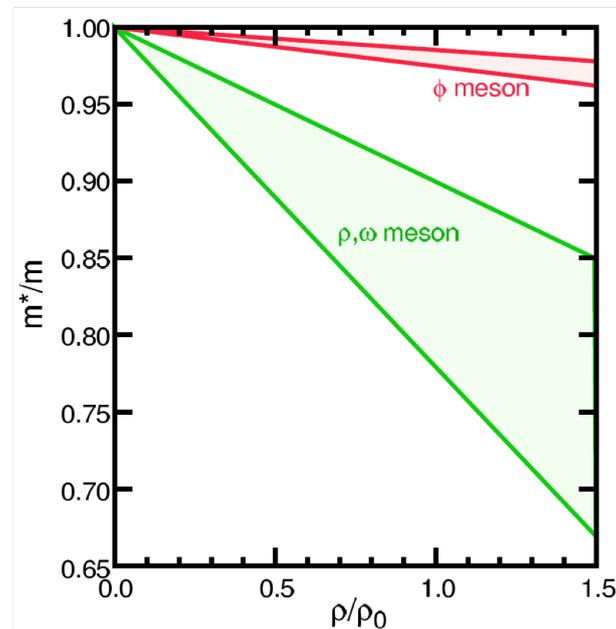


図 2.2 軽いベクトル中間子 ρ , ω , ϕ の質量変化の予測

横軸は密度の原子核の密度との比、縦軸は変化した質量と元の質量の比。影のついた部分は、理論的な不確かさを示している。[6]

2.4 クォーク・グルーオン・プラズマ

クォーク・グルーオン・プラズマ (QGP) とは、クォークとグルーオンからなる高温のプラズマ状態である。ハドロンは 1 fm 程度の大きさを持っており、クォークとグルーオンからできていると考えられる。高密度状態や高温状態では、クォークやグルーオンが個々のハドロン内に閉じ込められなくなり、近傍のハドロンとの境目がなくグルーオンをやり取りするようになる。すると、クォークとグルーオンがハドロン 1 つではなく比較的大きな体積の中を自由に動き回る状態を考えられる。この状態を QGP と呼ぶ。QGP は超高温なため、前節の通り、カイラル対称性が部分的に回復していると考えられる。[4]

QGP は RHIC 加速器や LHC 加速器の高エネルギー原子核衝突実験において作り出される。RHIC における金原子核同士の衝突で発見され、LHC における鉛原子核同士衝突でも QGP が作られていることが確認された。RHIC、

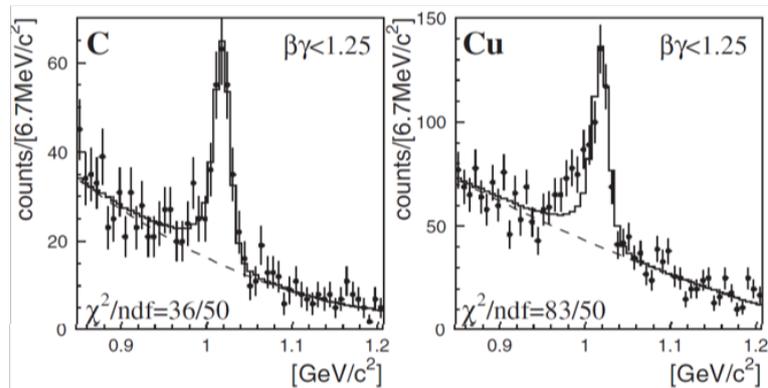


図 2.3 KEK-PS E325 による 12 GeV $p+A$ 反応における電子対による不変質量スペクトル。実線は $\phi \rightarrow e^+e^-$ から予期されるフィット結果。破線は 2 次の多項式による背景事象のフィット。 [7]

LHC をはじめとする加速器実験によって、QGP の物性が研究されている。

2.5 質量状態変化の実験的観測

2.5.1 高ハドロン密度中での質量状態変化

通常原子核密度での質量状態変化の兆候は KEK-PS E325 コラボレーションによって提出されている。E325 実験では図 2.3 の質量スペクトルが得られ、ピークの低質量側で質量分布の超過が見られた。ベクトル中間子 ρ , ω , ϕ について、質量の分布幅は変化せず原子核密度と対応するような質量変化した分布もあると考えると質量スペクトルをうまくフィットでき、このことは質量状態変化の証拠であると E325 コラボレーションは主張した。 [7, 8, 9] しかし、この結果には懐疑的な主張もなされている [10, Section VIII]。

2.5.2 高エネルギー密度中での質量状態変化

高エネルギー重イオン衝突実験でもレプトン対測定による軽いベクトル中間子の質量分布測定がなされてきた。CERN SPS 加速器を用いて NA45 CERES 実験による e^+e^- 測定や NA60 実験による $\mu^+\mu^-$ 測定が、また、相対論的重イオン加速器 (RHIC) の PHENIX 実験で e^+e^- 測定がなされてきた [11, V.C. 節]。LHC エネルギーでの軽いベクトル中間子の質量状態変化は未だ見つけられていないため、その測定は重要である。

2.6 電子対測定とミュオン対測定における背景事象の違い

レプトン対におけるスペクトルの形状変化の発見のためには、背景事象が多くあるためその取り扱いが重要となる。電子陽電子対測定での大きな背景事象としては、ハドロンとの誤識別、光子の変換、Dalitz 崩壊がある。それに対してミュオン対測定での背景事象として、 π^\pm, K^\pm の崩壊から来る μ が多くあるためコンビナトリアルバックグラウンドがあること、また、低運動量領域で吸収体における多重散乱のために運動量分解能が悪くなること、問題となる [11]。ミュオン対測定によって、コンビナトリアルバックグラウンドは全体としては減らせる点、ハドロンとの誤識別を防げる点で、ミュオン対測定は優れているが、吸収体を通過するため運動量分解能が悪く、これまでは精度良い測定ができなかった。ALICE コラボレーションは、3.4.2 節で述べる新しい検出器の導入による、ミュオン粒子の飛跡の精密な検出を計画している。

第 3 章

実験背景

本論文で着目する CERN LHC ALICE 実験における検出可能性を考えるために必要な事項について説明する。ALICE 検出器の概要について述べた後、本研究で用いる検出器の仕組みとミュオン粒子検出器の詳細について述べる。

3.1 LHC 加速器

LHC は、Large Hadron Collider の頭文字を取った略称で、ハドロン同士を衝突させる大型の加速器である。LHC は、スイスとフランスにまたがった敷地を持つ欧州原子核研究機構 (CERN) の地下の周長約 27 km の円形トンネルに設置されており、世界最大の加速器である。LHC には、Proton Synchrotron, Super Proton Synchrotron などで加速した粒子が入射される。LHC は 2 つのリングを持ち、その中では、互いに逆向きに粒子が周回しており、衝突点で粒子を衝突させる (図 3.1)。2 つのリングはそれぞれ別の粒子を周回させることができ、陽子や鉛原子核などを周回させることができる。衝突点には検出器を設置して実験を行っており、大きな実験に ALICE, ATLAS, CMS, LHCb の 4 つがある。また、衝突点の近くに 3 つの検出器を設置して、CMS の近くで TOTEM, ATLAS の近くで LHCf, LHCb の近くに MOEDAL という実験を行っている [13]。

LHC は 2008 年より稼働を開始し、徐々に衝突エネルギーを上げ、Run2 と呼ばれる期間 (2015 - 2018 年) (図 3.2) には陽子相互衝突で重心系衝突エネルギー 13 TeV での実験を行なった。1 回の実験期間中に異なる衝突

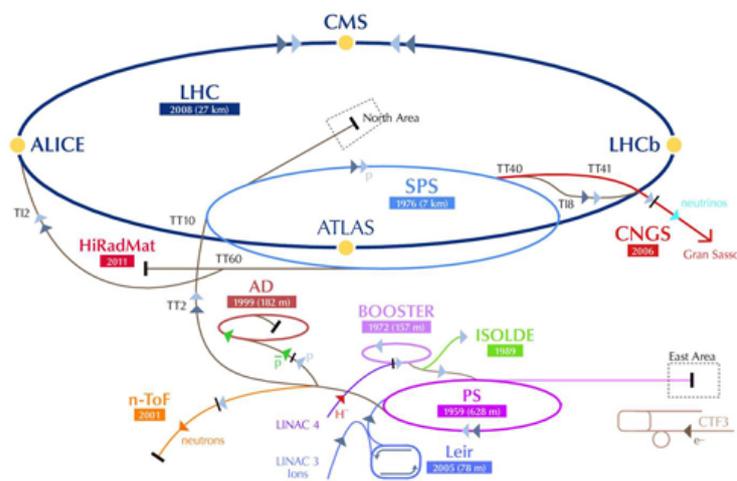


図 3.1 CERN における加速器複合施設 [12]

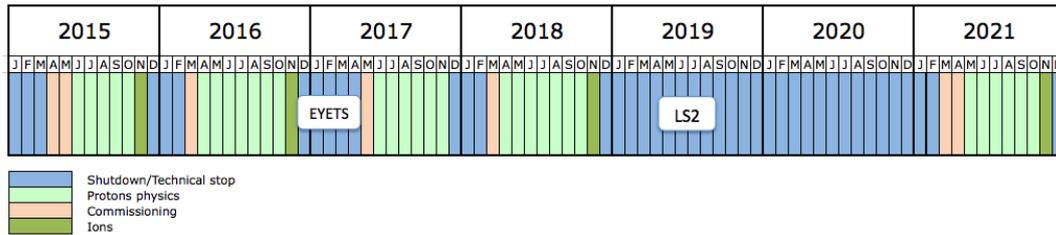


図 3.2 LHC の 2015 年から 2021 年までのスケジュール [14]

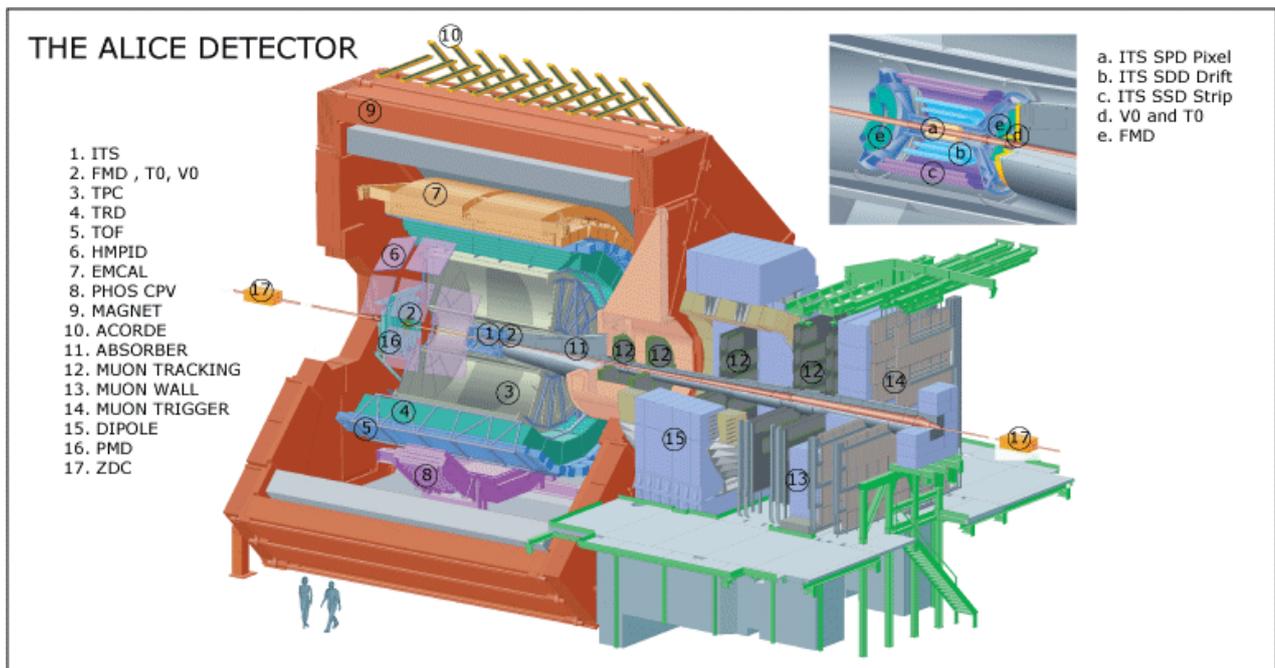


図 3.3 ALICE 実験で用いる検出器 [15] 本研究では、2. V0 検出器、11-15. ミューオンスペクトロメータからのデータを用いた。

系(陽子同士, 陽子と鉛原子核, 鉛原子核同士 衝突)の実験が行う。Run2 の後の 2 年間 (2019 – 2020 年) は long shut down (LS2) に入り, 性能を改善するための新しい検出器の設置などを行う。

本論文では, ALICE 実験における陽子同士衝突に注目してシミュレーションを行った。

3.2 ALICE 実験

ALICE 実験は, A Large Ion Collider Experiment (大型イオン衝突実験) の頭文字を取った略称で, ALICE 検出器は図 3.3 のような外観をしており, LHC の衝突点の一つに設置された ALICE 実験で用いる検出器群である。ALICE 検出器は, LHC のエネルギーの高エネルギー原子核衝突で特有な物理を開拓するために作られ, ALICE コラボレーションは, 高いエネルギー密度での強く相互作用する物質の物理を研究してきた。[16]

3.3 V0 検出器

V0 検出器は ALICE において基本的な, いわゆるミニマムバイアストリガーとして, ビーム粒子同士の相互作用による事象を選別するために, また, 衝突で生成した荷電粒子を計数するために用いる。

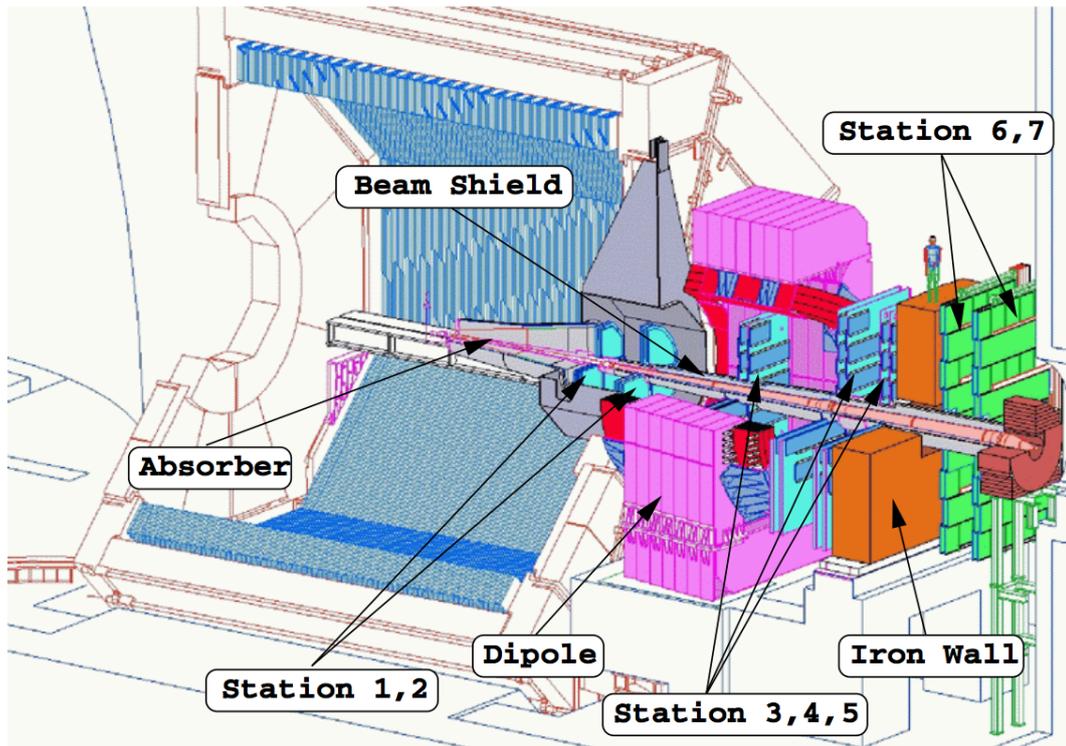


図 3.4 ミューオンスペクトロメータ (MUON) 模式図 [18]

V0 検出器は 32 個のシンチレータを用いた計数機 2 つからなり、粒子の電荷量と各チャンネルを通った時刻とを計測する。2 つの計数機にはそれぞれ名前がついており、衝突点から見てビームパイプに沿って ATLAS 側が V0A、CMS 側が V0C である。V0A は衝突点から 330 cm のところにあり、覆う擬ラピディティー η は、 $2.8 < \eta < 5.1$ である。V0C は衝突点から 90 cm の、後述するミューオンスペクトロメータのハドロン吸収体の手前にあり、 $-3.7 < \eta < -1.7$ を覆う。

ビームパイプに残った残留ガスとビームとの相互作用によって起きるイベントでは、運動量の保存により片方の V0 検出器にのみ荷電粒子が入射する。V0A と V0C の両方を荷電粒子が通過した時刻に起きた事象であることを解析する信号に課すことで、ビームと残留ガスの衝突事象による信号を取り除くことができる。そのようなイベントを解析で用いるために V0 検出器をミニマムバイアストリガーとして用いる。[17]

3.4 ミュー粒子の検出

3.4.1 ミューオンスペクトロメータ (MUON)

ミューオンスペクトロメータ (MUON) は、図 3.4 に示した ALICE 実験で用いるミュー粒子飛跡検出器である。MUON は擬ラピディティー範囲 $-4 < \eta < -2.5$ を覆っている。

MUON は大きく 4 つの部分からなる。吸収体 (Absorber, Iron Wall)、双極子電磁石 (Dipole)、トリガーシステム (Station 6,7)、飛跡検出システム (Station 1-5) である。吸収体はハドロンや電子、またそれらが作る 2 次粒子を減らしミュー粒子のみを透過させることでミュー粒子の飛跡検出の効率を上げるためのものである。2.6 節で述べた通り π や K の μ への崩壊はコンビナトリアルバックグラウンドを増やす要因となりうるので、できるだけ早くハドロンを吸収し散乱させるために、吸収体は ALICE の衝突点近くまで差し込まれている。Station 5 と 6 の間にある鉄の吸収体 (Iron Wall) はトリガーシステムがミュー粒子のみを検出できるように入れられているものである。

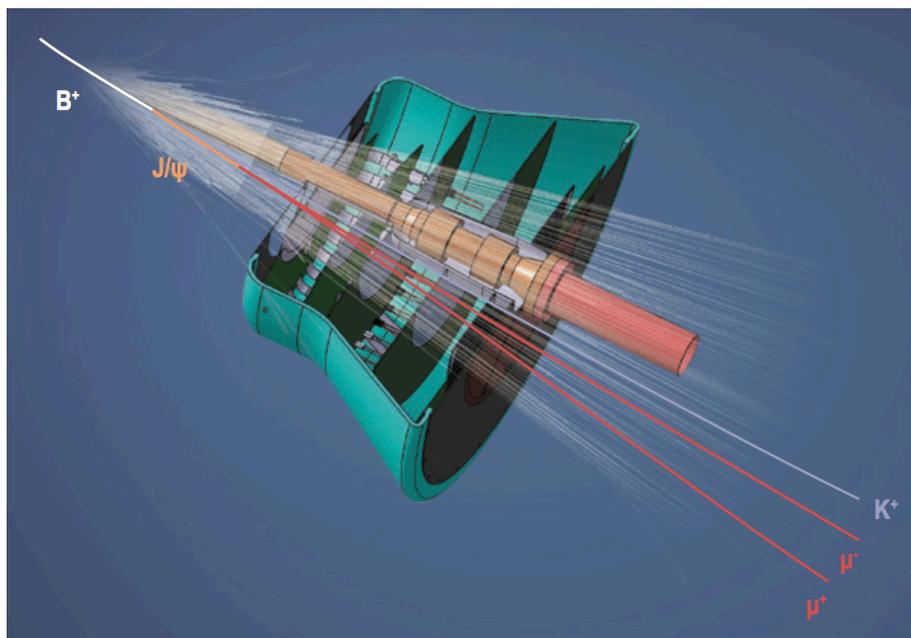


図 3.5 前方ミュオン粒子飛跡検出器の全体図 [19]

双極子電磁石はミュオン粒子を分光するためのものであり、定常的な磁場 B をかけることでミュオン粒子の飛跡をローレンツ力で曲げ、その曲率半径 R からミュオン粒子の運動量 p を計測する。ローレンツ力と遠心力の釣り合いにより、 $pv/R = evB$ なので、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} p[\text{GeV}/c] &= eRB \\ &= 0.3 \cdot R[\text{m}] \cdot B[\text{T}] \end{aligned} \quad (3.1)$$

この式を用いて、運動量 p を求めた。トリガーシステムはガスチェンバーで、吸収体を通り抜けて Station 6 と 7 を通過したミュオン粒子があるイベントのデータを収集するためのトリガーとなっている。本研究ではミュオン粒子が 2 つ以上検出されたデータを解析で用いるダイミュオントリガーを用いる。

3.4.2 前方ミュオン粒子飛跡検出器 (MFT)

ALICE コラボレーションでは、LHC 加速器の 2021 年から始まる Run 3 (図 3.2) において前方ミュオン粒子飛跡検出器 (Muon Forward Tracker, MFT) を用いることを計画しており、LHC 加速器の休止期間 (LS2) に ALICE 検出器へ追加することを予定している。

3.4.3 MUON, MFT の分解能

広島大学クォーク物理学研究室は ALICE 実験に参加しており、MFT の検出器制御システムの開発の責任を負っている。また、MFT 導入後に詳しく議論できるようになる物理についての事前研究を進めており、不変質量分解能についての先行研究 [20] を行なった。不変質量分解能は質量領域や運動量によって変化するが、図 3.6 で見ることができるよう、運動量領域 $2 < p_T < 3 \text{ GeV}/c$ で、 ω 中間子の質量では、MFT 導入後の不変質量分解能は約 $17 \text{ MeV}/c^2$ であり、MFT 導入前の不変質量分解能が約 $48 \text{ MeV}/c^2$ であることから、約 2.8 倍不変質量分解能が向上したことがわかる。不変質量分解能は参考文献 [19] でも述べられており、表 3.1 の通りである。

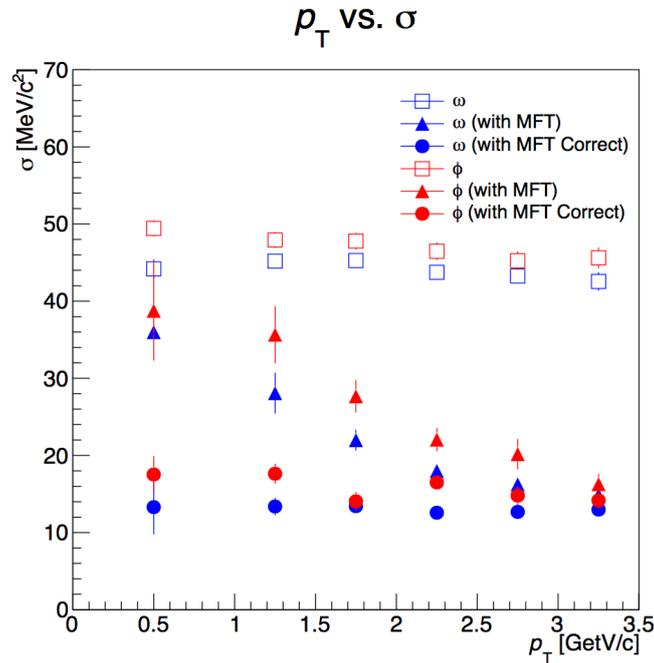


図 3.6 鉛原子核同士実験での最中心衝突事象 0-10% における MFT 導入前後の不変質量分解能 σ_m の運動量 p_T と質量領域 (ω , ϕ) 依存性

青: ω 中間子, 赤: ϕ 中間子。四角が MUON のみで再構成した場合, 三角が MFT と MUON を組み合わせて飛跡を再構成した場合, 丸は MFT と MUON を組み合わせて再構成した飛跡の内, 前方の吸収体の前後で正しく組まれた飛跡のみを使用した場合。[20]

表 3.1 MFT 導入前後の質量分解能 σ_m [19] η , ω , ϕ 中間子の 2 対崩壊に対する Crystal Ball フィットにおける σ の値である。Crystal Ball 関数 [21, 22, 23] とは, 実験を行なった時のミュオン粒子対の質量分布が検出器での運動量損失によって低質量側に尾を引くことを再現するような関数である。

p_T [GeV/c]	σ_m [MeV/c ²]					
	$\eta \rightarrow \mu\mu$		$\omega \rightarrow \mu\mu$		$\phi \rightarrow \mu\mu$	
	w/o MFT	w/ MFT	w/o MFT	w/ MFT	w/o MFT	w/o MFT
All p_T	44	8	46	12	51	15
1-2	44	11	47	16	51	16
2-3	41	6	45	10	49	15
3-4	41	6	45	11	48	14

3.5 同条件での質量スペクトル変化についての先行研究

前節で述べた MFT の導入によってミュオン粒子対の質量スペクトル変化測定の精密化が期待できるため, 本論文では不変質量分解能の向上の前後それぞれでシミュレーションを行い, 質量スペクトル変化の検出感度評価を行った。本研究における質量分布は, 先行研究 [24] を基にして作ったものである。先行研究は, 陽子相互衝突のミュオン粒子対測定による ω , ϕ 中間子の質量スペクトル変化が, 媒質内外関わらず全ての ω , ϕ 粒子について起きると仮定して質量分布を作成した時にどの程度の信頼度で質量スペクトルの変化を言えるかについて考えたものである。そ

のために、陽子相互衝突における ALICE 実験 2016 年重心系衝突エネルギー $\sqrt{s} = 13$ TeV の陽子相互衝突で収集した μ 粒子の実データの質量分布解析を行い、 ω , ϕ 中間子と背景事象の質量分布をフィッティング関数により再現することで、質量分布を作成している。本研究では同じフィッティング関数を用いて質量分布を作成したため、次章で詳しく先行研究での質量スペクトルの作成方法について述べる。

第 4 章

解析手法

この章では、陽子相互衝突における ω, ϕ 中間子の質量分布変化の解析に用いたデータの扱いを述べる。解析には CERN が開発しているソフトウェア ROOT [25] を用いる。先行研究のパラメータを用いて、様々な大きさに質量変化した質量分布を作り、それぞれの場合の検出感度を評価する。

4.1 質量分布の作成

本研究における質量分布は、先行研究 [24] を基にして作ったものである。先行研究では、ALICE 実験 2016 年 重心系衝突エネルギー $\sqrt{s} = 13$ TeV の陽子相互衝突で収集した μ 粒子の実データを用いて解析を行い、 ω, ϕ 中間子と背景事象の質量分布をフィッティング関数により再現した。本研究では、そのフィッティング関数のうち、 $2 < p_T < 3$ GeV/c の運動量領域のものを基に質量分布を作成したため、先行研究でのデータの取り扱いをまず述べた後、本研究において作成した質量分布の作成方法を述べる。

4.1.1 事象選別

事象選別とは、得られたデータから見たい事象のみを選び分けることである。衝突型加速器による実験では大量の衝突事象が得られるが全てのデータが必要なデータとは限らない。本論文で見たい事象は、陽子同士が衝突した事象であり、かつ、ミュー粒子対が検出された事象である。陽子同士が衝突した事象を選ぶのにかけるトリガーをミニマムバイアストリガーと呼び、ミュー粒子が 2 つ以上検出された事象を選ぶために使うトリガーをミュー粒子対トリガーと呼ぶ。これら両方のトリガーの条件を満たす事象を選別する。

ミニマムバイアストリガーは、V0 検出器によってかかるトリガーで、V0A と V0C 両方で荷電粒子が検出された事象を選択することで、ビームパイプ内の残留ガスとビーム同士の相互作用による事象を排除するために用いた。

4.1.2 ミュー粒子対への崩壊前の不変質量分布

前項の方法で選別した μ 粒子対の運動量と質量から、崩壊前の親粒子の不変質量を計算できる。親粒子 (parent) がミュー粒子対へと崩壊する反応

$$[\text{parent}] \rightarrow \mu^+ + \mu^- \quad (4.1)$$

を考える (図 4.1)。粒子 i ($i: \text{parent}, \mu^+, \mu^-$) の不変質量を m_i 、運動量を \vec{p}_i 、エネルギーを E_i とおく。各粒子について、

$$E_i^2 = m_i^2 + |\vec{p}_i|^2 \quad (4.2)$$

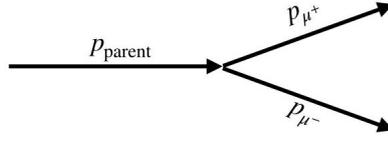


図 4.1 親粒子 parent が 2 つの μ 粒子 μ^+ と μ^- に崩壊する図

が成り立つ。 E_{μ^+}, E_{μ^-} は、式 4.2 に、運動量 p_{μ^\pm} と $m_\mu = 106 \text{ MeV}/c^2$ [2] を与えれば求まる。また、エネルギーと運動量の保存により、以下の 2 式が成り立つ。

$$E_{\text{parent}} = E_{\mu^+} + E_{\mu^-} \quad (4.3)$$

$$\vec{p}_{\text{parent}} = \vec{p}_{\mu^+} + \vec{p}_{\mu^-} \quad (4.4)$$

これらの式を親粒子についてのエネルギーの式 (4.2) に代入して、

$$m_{\text{parent}} = \sqrt{(E_{\mu^+} + E_{\mu^-})^2 - (\vec{p}_{\mu^+} + \vec{p}_{\mu^-})^2} \quad (4.5)$$

$$= \sqrt{2m_\mu^2 + 2\sqrt{m_\mu^2 + |\vec{p}_{\mu^+}|^2}\sqrt{m_\mu^2 + |\vec{p}_{\mu^-}|^2} - 2\vec{p}_{\mu^+} \cdot \vec{p}_{\mu^-}} \quad (4.6)$$

が成り立つ。これを全てのミュー粒子対に対して行うことで、ミュー粒子対の不変質量分布を得た。

4.1.3 コンビナトリアルバックグラウンドの差引き — like sign method

コンビナトリアルバックグラウンドとは、無相関な 2 粒子同士の組合せで生じる背景事象である。本来は、ある親粒子が崩壊してできたミュー粒子対を見て、第 2.2 節のように親粒子の運動量質量分布を作りたいが、実際の実験ではどの 2 つのミュー粒子が共通の親を持つかを知ることはできない。そのため、崩壊前の親粒子が共通かどうかは問わずにミュー粒子同士を組み合わせる質量や運動量に対する分布を作った後、そこから無相関なミュー粒子同士を組み合わせることができる分布を差し引くことで、親粒子の運動量質量分布を再構成する。ここでの無相関なミュー粒子同士による背景分布をコンビナトリアルバックグラウンドと呼ぶ。

コンビナトリアルバックグラウンドの見積もりには二つの方法があり、それぞれ like sign method と event mixing technique と呼ばれている。P. Crocheta, P. Braun-Munzinger ら [26] などにおいてそれらの違いが詳しく議論されている。ALICE コラボレーションによる陽子陽子衝突、重心系衝突エネルギー 7 TeV の実験についての 2012 年の先行研究 [27] では、 b, c クォークを含む中間子の崩壊で出来る相関のある対は 0.5% 程度のため無視でき、かつ、統計的変動をより小さくできるため、event mixing technique が用いられている。先行研究 [24] においては like sign method が用いられているため、like sign method を記す。

見たい信号は、

$$\omega \rightarrow \mu^+ + \mu^-, \quad \phi \rightarrow \mu^+ + \mu^- \quad (4.7)$$

のような異符号のミュー粒子から計算できる不変質量の分布である。 ω, ϕ 中間子の質量領域では同じ符号 (like-sign) の電荷を持つミュー粒子対へと崩壊する粒子はほとんど無いため、同符号のミュー粒子同士は別の粒子から生じており互いに無相関だと考えられる。そのため、同符号の電荷のミュー粒子同士を組み合わせるそれぞれの運動量を式 4.6 に代入し不変質量分布を再構成することで、異符号だが無相関なミュー粒子の組による背景事象のスペクトルの形状を再現できる。それを適切に規格化して引き去るのが、like sign method である。

背景事象の数を N_{sig} とおき、同じ衝突事象 (same) において、表 4.1 のように、互いに異符号 (unlike-sign) の電荷を持つミュー粒子同士で作った組の数を N_{same}^{+-} 、正または負の電荷を持つミュー粒子同士の組の数をそれぞれ

表 4.1 like sign method における数のおき方

	信号	異符号の電荷	同符号 (like sign) の電荷同士	
	signal	unlike sign	正	負
同じ衝突事象 (same event)	N_{sig}	N_{same}^{+-}	N_{same}^{++}	N_{same}^{--}
異なる衝突事象 (mixed event)	-	N_{mix}^{+-}	N_{mix}^{++}	N_{mix}^{--}

N_{same}^{++} , N_{same}^{--} とおくと, 式 4.7 のような相関のあるミュー粒子対の数 N_{sig} の質量 m 範囲あたりの数 $\frac{d}{dm} N_{\text{sig}}$ は,

$$\frac{dN_{\text{sig}}}{dm} = \frac{dN_{\text{same}}^{+-}}{dm} - \frac{dN_{\text{bg}}}{dm} \quad (4.8)$$

$$= \frac{dN_{\text{same}}^{+-}}{dm} - 2R \sqrt{\frac{dN_{\text{same}}^{++}}{dm} \frac{dN_{\text{same}}^{--}}{dm}} \quad (4.9)$$

で表される。上式の R という因子は, ミュー粒子対の符号 ($++$, $--$, $+-$) に依るアクセプタンスの違いを補正するための因子であり, 次の式で表される。

$$R = \frac{\frac{dN_{\text{mix}}^{+-}}{dm}}{2\sqrt{\frac{dN_{\text{mix}}^{++}}{dm} \frac{dN_{\text{mix}}^{--}}{dm}}} \quad (4.10)$$

異なる衝突事象 (mixed event) における異符号のミュー粒子対と同符号のミュー粒子対の数の比を取っている。異なる衝突事象のミュー粒子同士を組み合わせるため, 確実に相関が無いミュー粒子対が得られる。この因子 R を用いて, same event から得られた同符号のミュー粒子対の分布 $\frac{d}{dm} N_{\text{same}}^{++}$, $\frac{d}{dm} N_{\text{same}}^{--}$ からバックグラウンド N_{bg} の分布を,

$$\frac{dN_{\text{bg}}}{dm} = \frac{\frac{dN_{\text{mix}}^{+-}}{dm}}{\sqrt{\frac{dN_{\text{mix}}^{++}}{dm} \frac{dN_{\text{mix}}^{--}}{dm}}} \sqrt{\frac{dN_{\text{same}}^{++}}{dm} \frac{dN_{\text{same}}^{--}}{dm}} \quad (4.11)$$

で求められる。

このように求めた分布を用いて,

$$\frac{dN_{\text{sig}}}{dm} = \frac{dN_{\text{same}}^{+-}}{dm} - \frac{dN_{\text{bg}}}{dm} \quad (4.12)$$

を得た。得た分布が図 4.3 である。

4.1.4 質量分布解析

逆符号電荷の (unlike sign の) ミュー粒子対の質量スペクトルからコンビナトリアルバックグラウンドを引き去り, 相関のあるミュー粒子対が作る信号の質量スペクトルを得た。フィッティング関数として, 背景事象には多項式を用い, 見たい軽いベクトル中間子から来る分布には Gauss 分布を用いた。

背景事象に多項式を用いるのは, 軽いベクトル中間子の質量領域の相関のあるミュー粒子対には複雑な生成過程があるため, それらを一括で差し引くためのものである。次数を徐々に上げながらフィットを試し, 適切にフィットができたのが 5 次であったため, 5 次多項式

$$b(x) = \sum_{i=0}^5 b_i x^i \quad (4.13)$$

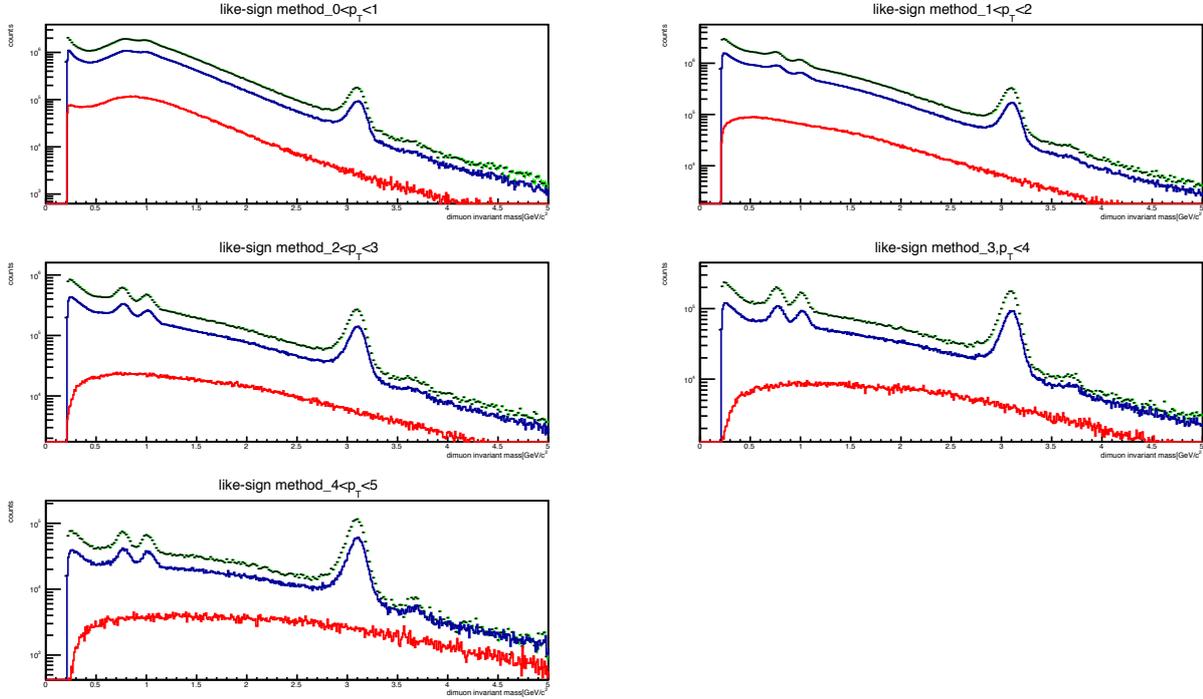


図 4.2 コンビナトリアルバックグラウンドの差し引き [24] 緑：unlike-sign な同じイベントの μ 粒子同士を組み合わせた組の数 N_{same}^{+-} の分布, 赤：コンビナトリアルバックグラウンド N_{bg} の分布, 青：信号 $N_{sig} = N_{same}^{+-} - N_{bg}$ の分布

(ここで b_i は i 番目の係数, x^i は x の i 乗 ($i = 0, \dots, 5$) を用いた。

軽いベクトル中間子の質量分布を Gauss 分布でフィットするのは, Breit - Wigner 分布が検出器によってならされた分布を Gauss 分布に近似するからである。軽いベクトル中間子の質量分布は 2.2 節のように Breit - Wigner 分布をしているため, それらが崩壊してできたミュー粒子対から再構成する質量も理想的には Breit - Wigner 分布に従うはずであり, その崩壊幅 (半値全幅) は表 2.4 で述べた通り, $\Gamma_\omega \simeq 8.5 \text{ MeV}/c^2$, $\Gamma_\phi \simeq 4.2 \text{ MeV}/c^2$ である。また, ある質量を持ち Breit - Wigner 分布の幅が極端に狭く無視できるような粒子を仮に考え, その粒子が崩壊してできたミュー粒子対を考えると, その対から再構成する質量は, 検出器で誤差を持って計測された運動量から計算されるため, その誤差を反映して質量分布は Gauss 分布に従う。平均値 m , 分散 σ^2 の Gauss 分布を $\text{Gauss}(m, \sigma^2)$ と表すことにし, その確率密度関数 $\text{Gauss}(x; m, \sigma^2)$ は,

$$\text{Gauss}(x; m, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (4.14)$$

で表され, MUON 導入時点では 3.4.3 節で述べた通り, $2 < p_T < 3 \text{ GeV}/c$ の運動量領域の ω, ϕ 中間子の質量域でそれぞれ $\sigma_\omega \simeq 44 \text{ MeV}/c^2$, $\sigma_\phi \simeq 46 \text{ MeV}/c^2$ である。軽いベクトル中間子が崩壊してできるミュー粒子対の質量分布を実験で得ると, Breit - Wigner 分布に従う質量でミュー粒子対が生成され, Gauss 分布で広げられるため, Breit - Wigner 分布と Gauss 分布の畳み込みとなるはずである。しかしその畳み込み積分は計算時間がかかること, 変数が増えることから, この分布を近似した。 ω, ϕ 中間子については, Breit - Wigner 分布の崩壊

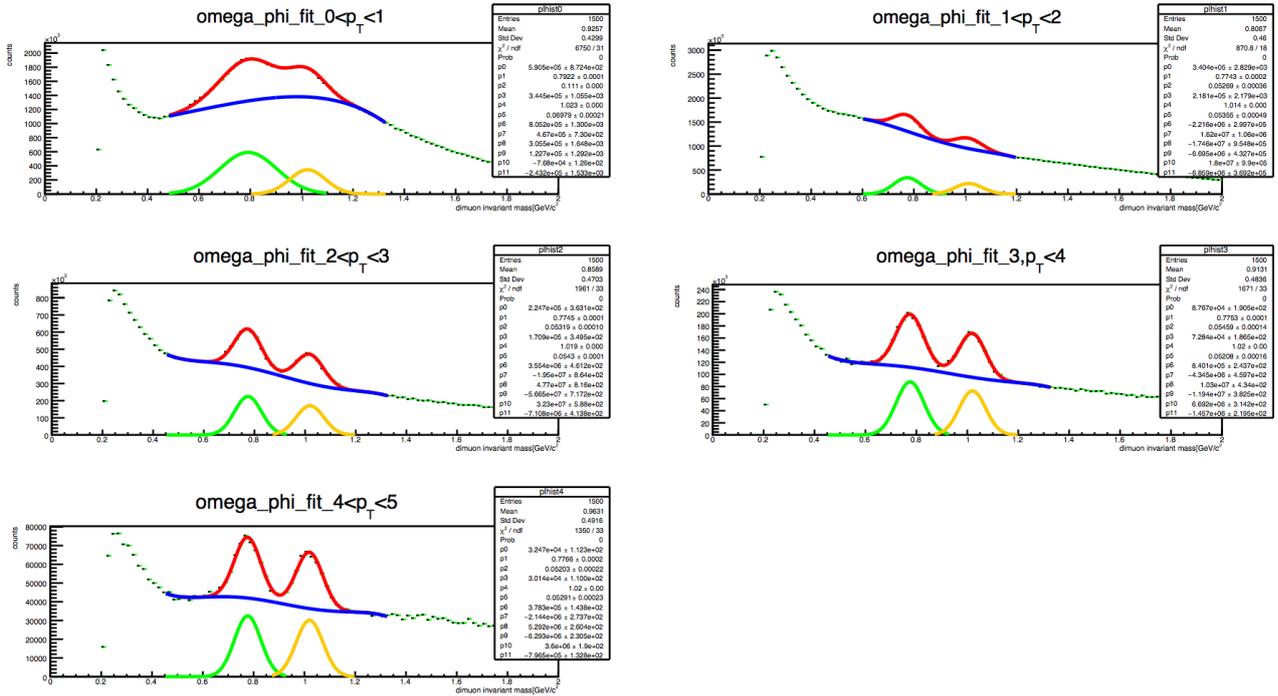


図 4.3 実データの ω, ϕ 中間子のフィッティング [24] 黒点：実データ N_{sig} の分布，赤線：フィッティングライン，青線：背景事象（5 次多項式），緑線： ω 中間子（Gauss 分布），黄線： ϕ 中間子これを基に質量分布を作成した

幅 Γ と Gauss 分布の σ を比べると σ が大きい $\Gamma < \sigma$ ため，粗く見れば Gauss 分布の方が強く影響すると考え，Gauss 分布に近似する。この時，検出器分解能による広がる幅の標準偏差を σ_{detector} ，崩壊幅を Γ とし，観測される Gauss 分布の標準偏差は，

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{\text{detector}}^2 + \Gamma^2} \quad (4.15)$$

で近似できると考える。

4.1.5 質量変化した質量分布の作成

本論文ではベクトル中間子の質量変化について，分布幅 Γ が変わらないこと，軽い方向に変化することを仮定し，また，コンビナトリアルバックグラウンドを完全に差し引ける理想化した場合を考える。そのような場合，質量変化は相関のあるミュー粒子対から来るもののみ考えれば良く，図 4.3 の分布を基にして質量分布を作れば良い。この時，S/N 比が良く計数も大きい運動量領域 $2 < p_T < 3 \text{ GeV}/c$ について考えた。また，MFT 導入以前以後それぞれについてシミュレーションを行い，質量分解能が向上することによる検出可能性の変化の評価を行なった。MFT の導入によって背景事象の分布も変わる可能性があるが，それについては評価せず背景事象の分布の形状は MFT の導入によつては変わらないとした。

背景事象は先行研究 [24] でフィットした 5 次多項式を規格化したものを確率密度関数とする乱数をヒストグラムに詰めて，分布を作成する。背景事象の数は，その 5 次多項式の積分値に合うようにした。

軽いベクトル中間子から来るミュー粒子対による分布は媒質中で質量変化が期待されるため，図 4.4 のような 2 つの Gauss 分布に従う乱数をそれぞれ用いることで，質量変化した軽いベクトル中間子を含む質量分布を作ることができる。Gauss 分布の幅は，3.4.3 節で述べたように，MFT 導入で小さくなる。MFT 導入以前の幅は先行研究のものを用いて， $\sigma_{\omega} = 53.19 \text{ MeV}/c^2$ ， $\sigma_{\phi} = 54.3 \text{ MeV}/c^2$ とし，MFT 導入後の幅は，式 4.15 に図 3.6 の値を代

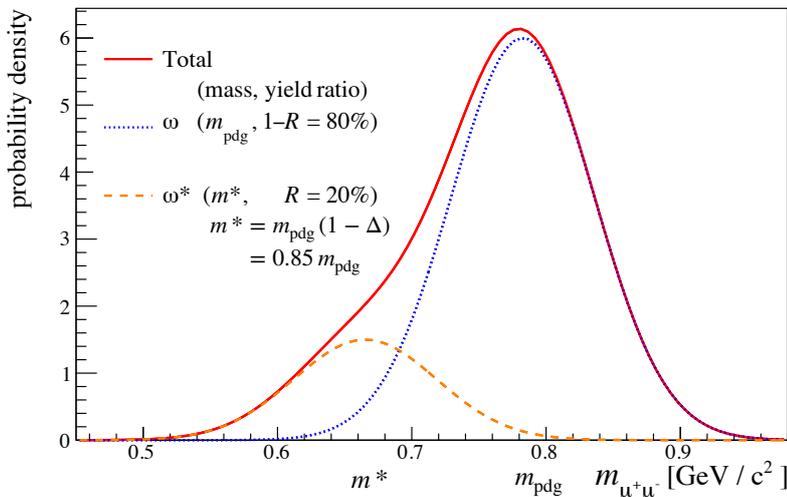


図 4.4 2 準位模型の確率密度関数。質量変化率 $\Delta = 0.15$, 質量変化した ω 中間子の ω 中間子全体に対する割合 $R = 0.2$ の例。

入して計算して, $\sigma_\omega = 19 \text{ MeV}/c^2$, $\sigma_\phi = 21.425 \text{ MeV}/c^2$ とした。

ここで質量変化のパラメータとして, 質量変化率を Δ , その中間子の収量全体に対する質量変化した中間子の収量の割合を R とすると, 軽くなった中間子の質量 m^* は $m^* = (1 - \Delta) m_{\text{pdg}}$, 軽くなった中間子の収量はその中間子の収量全て N_ω の R 倍, すなわち $R \cdot N_\omega$ と表せる。先行研究 [24] によるフィットで得られた収量が N_ω だとして, 質量変化していない Gauss 分布 $\text{Gauss}(m_\omega, \sigma_\omega^2)$ に従う乱数を $(1 - R) \cdot N_\omega$ 個ヒストグラムに詰め, 質量変化した Gauss 分布 $\text{Gauss}(m_\omega^*, \sigma_\omega^2)$ に従う乱数も $R \cdot N_\omega$ 個詰める。

このようにして, ある質量変化のパラメータ (Δ, R) で質量変化したヒストグラムを作った。

4.2 ω が質量変化した質量分布へのフィット

回帰曲線を前節のように作ったヒストグラムにあてはめる。あてはめには ROOT の Fit を用いる。フィットに用いる関数は, 質量分布を作るのに用いたのと同じ, 式 4.13 の $b(x)$ と式 4.14 の $\text{Gauss}(x)$ の足し合わせで, 次のように表される。

$$\begin{aligned}
 f_{2\text{level}}(x) &= N_\omega \left\{ (1 - R) \text{Gauss}(x; m_\omega, \sigma_\omega^2) + R \text{Gauss}(x; m_\omega^*, \sigma_\omega^2) \right\} \\
 &\quad + N_\phi \text{Gauss}(x; m_\phi, \sigma_\phi^2) + b(x) \\
 &= N_\omega \left\{ (1 - R) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\omega} \exp\left(\frac{-(x - m_\omega)^2}{2\sigma_\omega^2}\right) + R \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\omega} \exp\left(\frac{-(x - m_\omega^*)^2}{2\sigma_\omega^2}\right) \right\} \\
 &\quad + N_\phi \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\phi} \exp\left(\frac{-(x - m_\phi)^2}{2\sigma_\phi^2}\right) + \sum_{i=0}^5 b_i x^i
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

ここで, $m_\omega = 782.65 \text{ MeV}/c^2$, $m_\omega^* = (1 - \Delta) m_\omega$, $m_\phi = 1019.461 \text{ MeV}/c^2$ とした。この曲線を χ^2 フィットによってヒストグラムにあてはめる。フィットにおいて変化させるパラメータは以下の 10 個である。

- ω と ϕ の収量 N_ω と N_ϕ
- ω 中間子と質量変化した ω 中間子, ϕ 中間子の質量分布のピークの幅 $\sigma_\omega, \sigma_\phi$

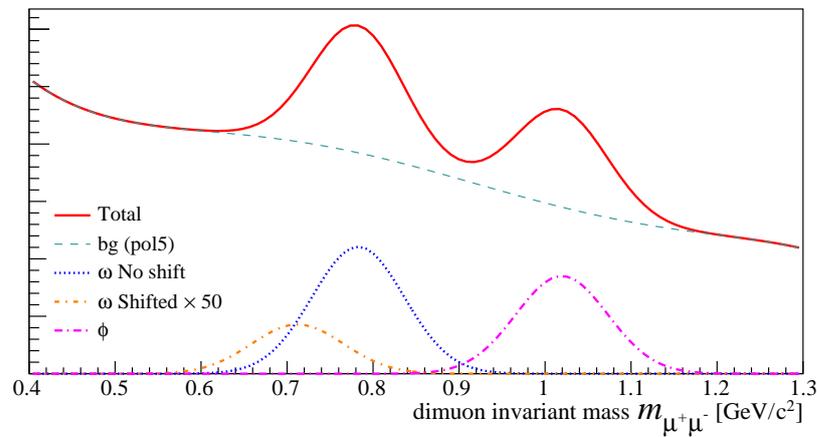


図 4.5 2 準位模型によるフィットの関数形

- 5 次多項式の係数 6 つ $b_i(x)$, $i = 0, \dots, 5$

ここで, ω 中間子と質量変化した ω 中間子は同じ幅 σ_ω を持つとした。

同様に, ω が質量変化していないモデルの曲線

$$\begin{aligned} f_{1 \text{ level}}(x) &= N_\omega \text{Gauss}(x; m_\omega, \sigma_\omega^2) + N_\phi \text{Gauss}(x; m_\phi, \sigma_\phi^2) + b(x) \\ &= N_\omega \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\omega} \exp\left(-\frac{(x - m_\omega)^2}{2\sigma_\omega^2}\right) + N_\phi \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\phi} \exp\left(-\frac{(x - m_\phi)^2}{2\sigma_\phi^2}\right) + \sum_{i=0}^5 b_i x^i \end{aligned} \quad (4.17)$$

も同じヒストグラムに対してフィットさせる。ここでも $m_\omega = 782.65 \text{ MeV}/c^2$, $m_\phi = 1019.461 \text{ MeV}/c^2$ とした。フィットにおいて変化させるパラメータは上の 10 個に加えて質量変化のパラメータ Δ, R である。

- ω と ϕ の収量 N_ω と N_ϕ
- ω, ϕ 中間子の質量分布のピークの標準偏差 $\sigma_\omega, \sigma_\phi$
- 5 次多項式の係数 6 つ $b_i(x)$, $i = 0, \dots, 5$
- Δ, R

2 準位模型のあてはめの際, 式 4.16 の 2 つのパラメータ Δ, R を特別扱いするとフィットを行なうことができる。実際の実験で得られるデータの解析では A.5 節のようにして, Δ, R も推定する必要があるが, この 2 つのパラメータの推定においては, 1 準位模型より χ^2 を小さくできる Δ, R とその他のパラメータの値があるにもかかわらず, ROOT の最適点は TH1D::Fit は最適な値を見つけられなかった。for 文を用いることで探すことができる。 Δ と R を少し異なる値に固定して他のパラメータについて Fit し, というように繰り返して, χ^2 が最小となるような最適な Δ と R の値を探すというやり方である。Fit を繰り返すため計算時間がかかるが, 1 準位模型より小さい χ^2 を得ることができる。

2 準位模型 (式 4.16) で χ^2 フィットをして得られた最小の χ^2 を $\chi_{2 \text{ level}}^2$, また, 1 準位模型 (式 4.17) での χ^2 の最小値を $\chi_{1 \text{ level}}^2$ と書き, $\Delta\chi^2$ を

$$\Delta\chi^2 = \chi_{1 \text{ level}}^2 - \chi_{2 \text{ level}}^2 \quad (4.18)$$

と定義する。この時, 2 準位模型で ($\Delta = 0, R = 0$) に制限したモデルが質量変化のない 1 準位模型であるから, A.6 節で説明するように尤度比検定を用いることができる。

$$\Delta\chi^2 > \chi_{2 \text{ df}}^2(C.L.) \quad (4.19)$$

の時、信頼水準 (Confidence Level) $C.L.$ で1準位模型を棄却し2準位模型を採択することにした (A.7節参照)。

ここで、シミュレーションであるため質量分布を作成した真の値 $\Delta = \Delta_{\text{true}}$ と $R = R_{\text{true}}$ を知っていることを利用する。 χ^2 フィットで見つかる最適な Δ と R はそのヒストグラムに固有に最適化された値であり、その時の χ^2 の値 $\hat{\chi}^2$ は最小化されているため、真のパラメータ $\Delta_{\text{true}}, R_{\text{true}}$ で計算した χ_{true}^2 と比べると必ず大きくなる $\hat{\chi}^2 \leq \chi_{\text{true}}^2$ 。ヒストグラムを何度も作り、それぞれで χ^2 を得るような場合を考えると、 $\chi_{\text{true}}^2 = \hat{\chi}^2 + \chi_{2, \text{df}}^2(p)$ となる確率、つまり最小値より $\chi_{2, \text{df}}^2(p)$ だけ大きくなる確率が p である (A.5節)。検出していないのに検出したという誤った結論を得ないこと、すなわち $\chi_{2, \text{level}}^2$ を過小評価しない ($\Delta\chi^2$ を過大評価しない) ことが重要な場合、かつ、真の値を知っている場合、真の値を用いてフィットすることは大きな問題にならないと思われるため、真の値を代入して固定した上で他の値をフィットした。なお、図に出てくるヒストグラムの自由度 “ndf” を考える際には、 Δ, R はフィットで得られるべき自由で調整可能なパラメータであるとして自由度を表示した。

第5章

結果

5.1 各シフトパラメータにおけるヒストグラムのあてはめ

各シフトパラメータに対してヒストグラムを作り、フィットを行った。図 5.1(a) は $\Delta = 9\%$, $R = 1\%$ で作ったヒストグラムへの 2 準位模型をフィットしたものであり、図 5.1(b) は同じヒストグラムについて、質量変化しない模型 ($R = 0$) をフィットしたものである。この場合、質量変化したモデル 2 準位模型の方が χ^2 の値が小さくなっており、 $\Delta\chi^2 = 40.8 - 34.4 = 6.4$ であり、1 準位模型より 2 準位模型の方がより良いフィットができています。

同じシフトパラメータのヒストグラムを複数作りそれぞれをフィットする時、図 5.2 のように $\Delta\chi^2 < 0$ となるような 2 準位模型でうまくフィットできないヒストグラムがあった。

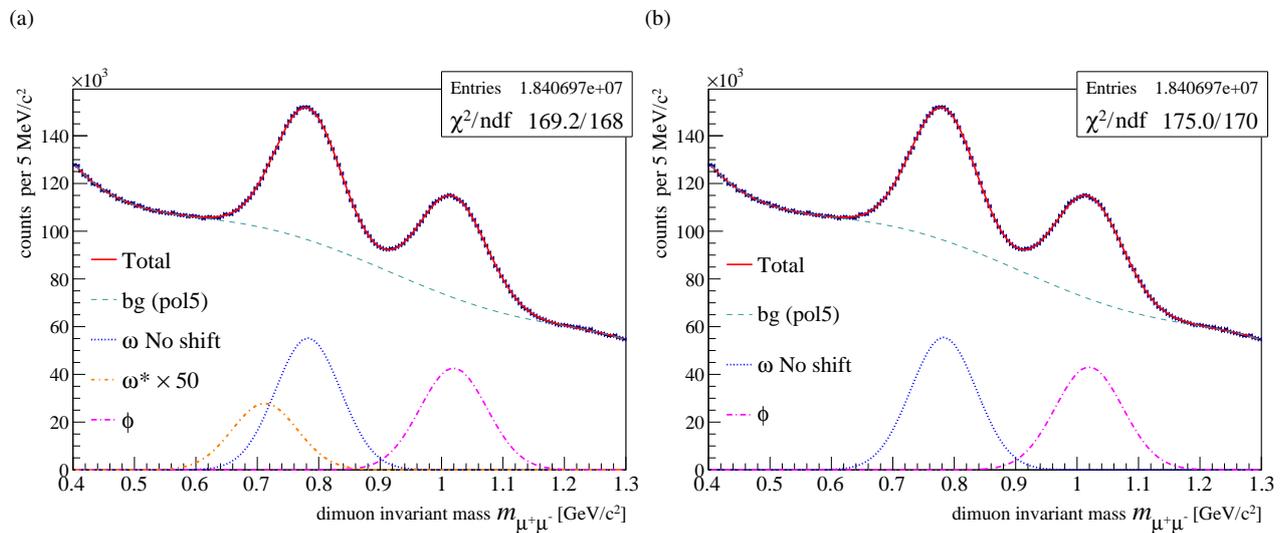


図 5.1 $\Delta = 9\%$, $R = 1\%$ 質量変化したヒストグラムに対して、(a) 2 準位模型, (b) 質量変化しない模型のあてはめ

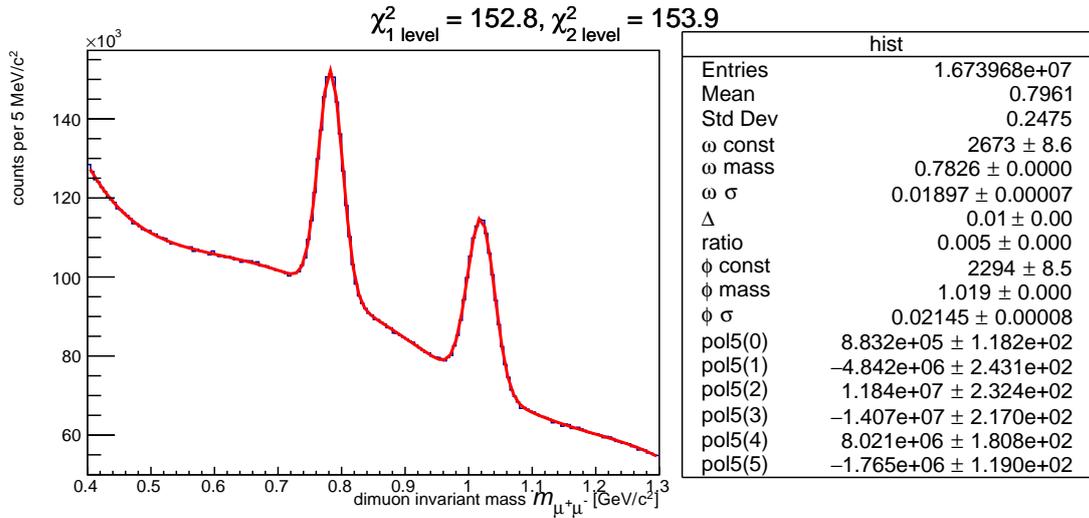


図 5.2 MFT の質量分解能で $\Delta = 1\%$, $R = 0.5\%$ 質量変化したヒストグラムに対して行なったフィット 1 準位模型の方が χ^2 が小さく, 2 準位模型でうまくフィットできていないものもあった。

5.2 検出できるシフトパラメータの領域

5.2.1 $\Delta\chi^2$ の計算値

前節のフィットを各シフトパラメータ Δ, R の値について行う。シフトパラメータ Δ, R について, $0 \leq \Delta \leq 0.2$, $0 \leq R \leq 0.025$ の範囲をそれぞれ 50 分割して,

$$\Delta = 0, 0.004, 0.008, \dots, 0.2 \quad (5.1)$$

$$R = 0, 0.0005, 0.0010, \dots, 0.025 \quad (5.2)$$

の各値についてヒストグラムを 50×50 個作った。前節のように 1 準位模型と 2 準位模型それぞれでフィットして得た $\Delta\chi^2$ の値を (Δ, R) 平面に表示したのが, 図 5.3 である。

5.2.2 平均化

ヒストグラムを多数生成しそれぞれをフィットしたが, それぞれのヒストグラムは統計的の偏りを持っているため, $\Delta\chi^2$ もその偏りを反映して増減するが, ここでは全体的な傾向を見たいため, (Δ, R) 平面における周りの値を用いて平均する。ここで, 平均化の際に図 5.5 における濃い青色の $\Delta\chi^2 < 0$ の点はプログラム上 $\Delta\chi^2 < 0$ となってしまうが, 2 準位模型で $R = 0$ とすると 1 準位模型であり, 必ず $\Delta\chi^2 = 0$ でフィットできるため, $\Delta\chi^2 = 0$ とした。その上で平均化を行う。平均化に際して (Δ, R) 平面において, $\Delta = 0, 0.004, 0.008, \dots, 0.2$ を 0 番目, 1 番目, \dots , 50 番目の値であるとして, $i = 0, 1, \dots, 50$ の値, また, 同様に $R = 0, 0.0005, 0.0010, 0.0015, \dots, 0.025$ を $j = 0, 1, \dots, 50$ の値であるとし, その (i, j) 番目であるようなシフトパラメータでのヒストグラムから得た $\Delta\chi^2$

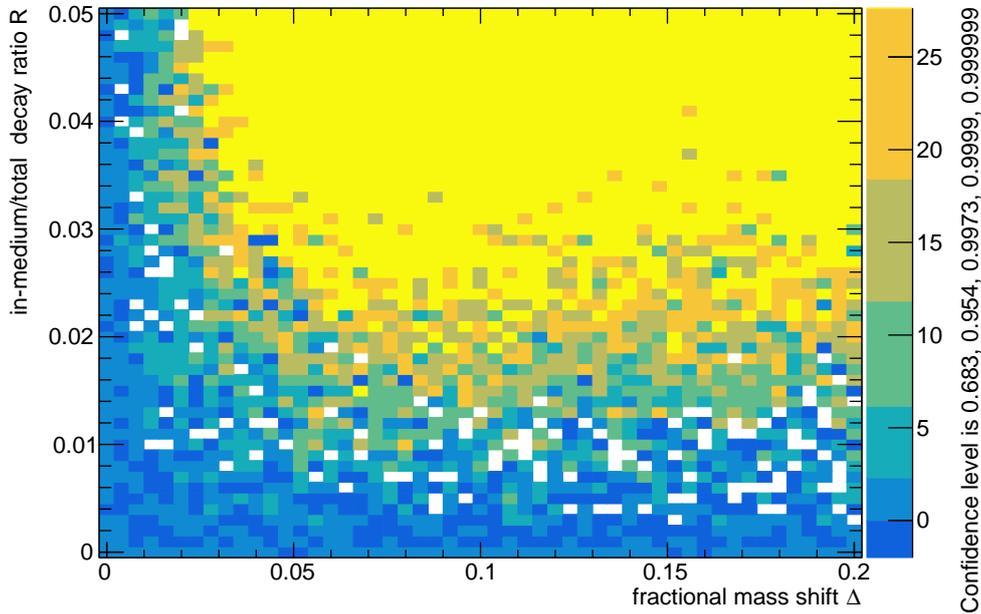


図 5.3 (Δ, R) だけ質量変化したヒストグラムに対して行なったフィットから得た $\Delta\chi^2$ の値
横軸 Δ , 縦軸 R , 色は $\Delta\chi^2$ の値を表しており, 右にその値の大きさが示してある。色が青から黄色にかけて順に $\Delta\chi^2 < \chi^2_{2\text{df}}(CL)$ の CL が, 68%, 95%, 99.7%, 99.99%, 99.9999% であることを示している。濃い青色や白色のは, パラメータ Δ, R を持つヒストグラムにおいて, 2 準位模型の χ^2 として 1 準位模型の χ^2 より小さい値が得られなかった点を意味している

の値を $\Delta\chi^2(i, j)$ と書くことにし, 平均化した値を $\langle\Delta\chi^2(i, j)\rangle$ と表すことにすると,

$$\begin{aligned} \langle\Delta\chi^2(i, j)\rangle &= \frac{1}{9} \sum_{k=i-1}^{i+1} \sum_{l=j-1}^{j+1} \Delta\chi^2(k, l) \\ &= \frac{1}{9} \{ \Delta\chi^2(i-1, j-1) + \Delta\chi^2(i-1, j) + \Delta\chi^2(i-1, j+1) \\ &\quad + \Delta\chi^2(i, j-1) + \Delta\chi^2(i, j) + \Delta\chi^2(i, j+1) \\ &\quad + \Delta\chi^2(i+1, j-1) + \Delta\chi^2(i+1, j) + \Delta\chi^2(i+1, j+1) \} \end{aligned} \quad (5.3)$$

である。ただし, $i=0$ または $j=0$ の点においては, $\langle\Delta\chi^2(i, j)\rangle = 0$ とした。

図 5.3 の値を式 5.3 を用いて平均したこの $\langle\Delta\chi^2(i, j)\rangle$ を図に表示したものが, 図 5.4(a) である。この図によると, 例えば $\Delta = 10\%$, $R = 1\%$ のような場合, $\Delta\chi^2$ が $(\Delta, R) = (0, 0)$ の点から右上に 2 本目の線である, $\chi^2_{2\text{df}}(95\%)$ よりも大きな値が得られているので, 95% の信頼水準で 2 準位模型を採択する。

質量変化率が 10% あったとして, Run2 のデータ量で MFT なしに質量変化を信頼水準 99.7% で検出するには, $R = 1.3\%$ 変化する必要があるが, MUON+MFT では, $R = 1\%$ 変化する必要があることが分かった。

また, 質量変化率が小さい $1\% < \Delta < 6\%$ の領域で, MFT の導入前後で信頼水準を比べると, 例として $\Delta = 2.5\%$, $R = 2\%$ の時, MFT 導入前は信頼水準 68% 程度であるが, MFT 導入で信頼水準 99.7% に達するという結果を得た。質量変化率が小さい時に MFT の導入で信頼水準は大きく高くなった。

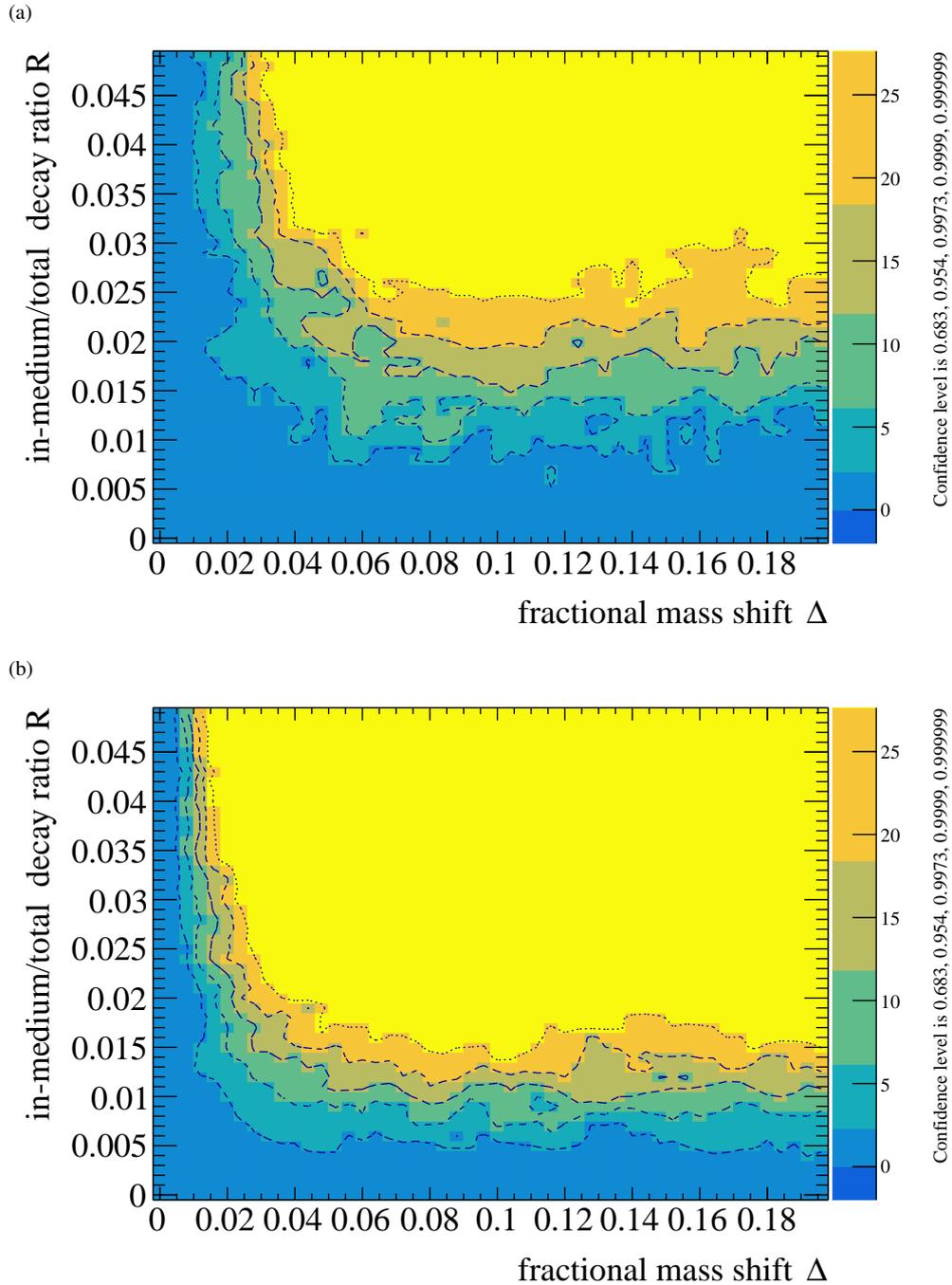


図 5.4 (Δ, R) だけ質量変化したヒストグラムに対して行なったフィットから得た $\Delta\chi^2$ の値を平滑化したもの。(a) は MUON の, (b) は MFT+MUON の分解能を仮定したシミュレーション。横軸 Δ , 縦軸 R , 色は $\Delta\chi^2$ の値を表している。濃い方から順に $\Delta\chi^2 < \chi^2_{2\text{df}}(CL)$ の CL が, 68%, 95%, 99.7%, 99.99%, 99.9999% の領域である。

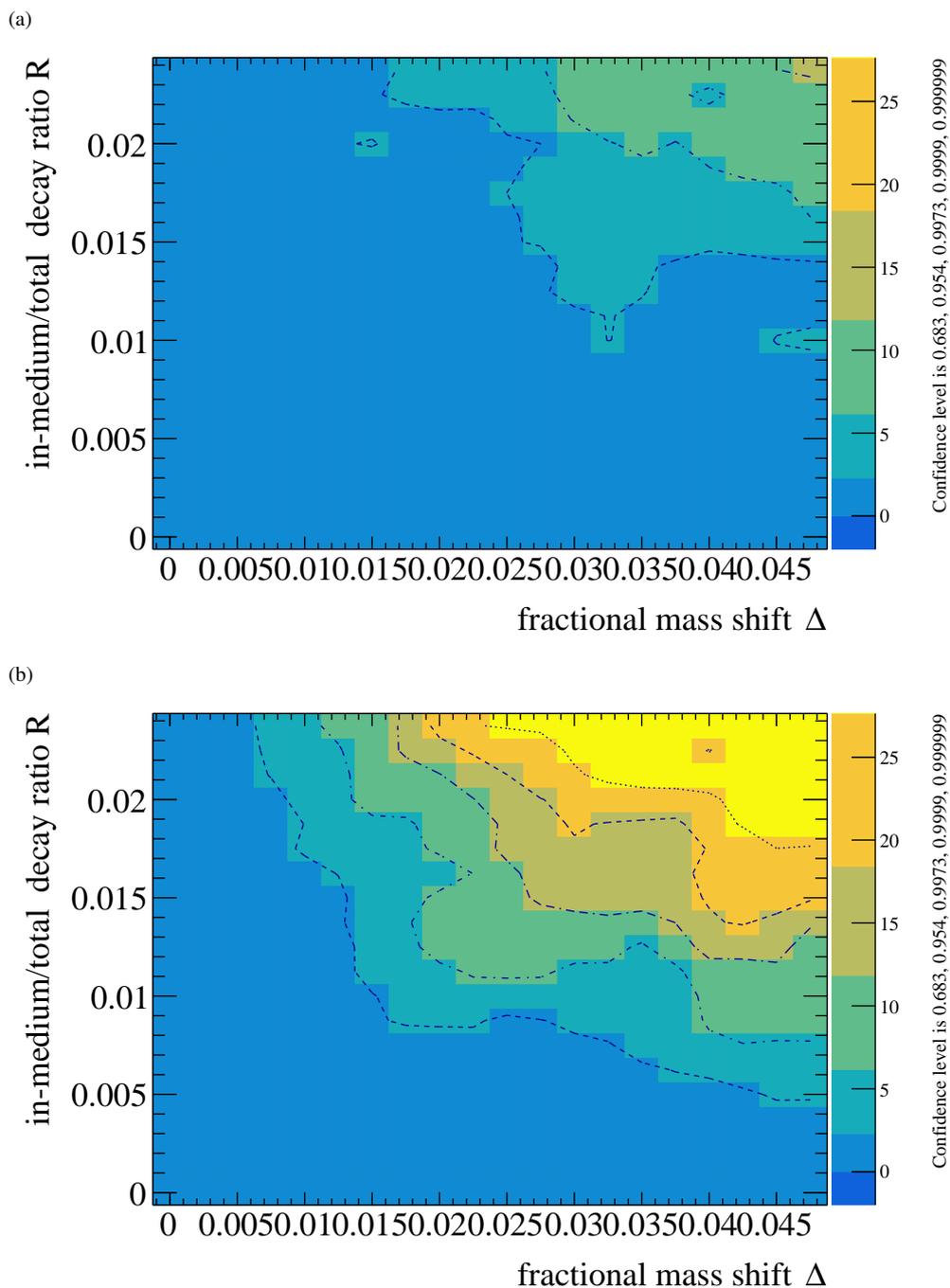


図 5.5 小さい Δ , R に対しての図 5.5 と同じ計算を行った図。(Δ , R) だけ質量変化したヒストグラムに対して行なったフィットから得た $\Delta\chi^2$ の値を平滑化した。(a) は MUON の、(b) は MFT+MUON の分解能を仮定したシミュレーション。横軸 Δ 、縦軸 R 、色は $\Delta\chi^2$ の値を表している。濃い方から順に $\Delta\chi^2 < \chi^2_{df}(CL)$ の CL が、68%、95%、99.7%、99.99%、99.9999% の領域である。

第 6 章

議論

この章では、本研究における不備、本研究で得られた結果から言えること、それらを踏まえた今後の展望について述べる。

6.1 今後の課題

本論文で考慮に入れていない効果がいくつか残っている。

- コンビナトリアルバックグラウンドの差し引き

基にしたデータではコンビナトリアルバックグラウンドの多くの部分が差し引けておらず、相関のあるミュー粒子対のみのスペクトルとなっていない。そのため本論文では、陽子陽子衝突での運動量領域 $2 < p_T < 3 \text{ GeV}/c$ におけるコンビナトリアルバックグラウンドを含む背景事象がほぼ完全に差し引けるものとして質量分布作成や解析を行なったが、実際にはコンビナトリアルバックグラウンドが今回考えた背景事象の 2 倍を超えない程度存在し、それによる各 bin の統計誤差の増加は $\sqrt{2}$ 倍を超えない程度である。よって χ^2 の値は約 2 倍小さくなり、1/2 倍程度 χ^2 の変化が小さくなる。そのため実際の検出可能性はより小さくなる。

- 背景事象の質量分布作成に 5 次多項式を用いていること

高次の多項式は凸凹を持つため、 ϕ 中間子や ω 中間子のピークの形状の一部を変形させてしまう可能性がある。そのため、多項式を背景事象の表現に使うと、 ϕ 中間子や ω 中間子の取量やスペクトルを適切に表現できない。これを回避するためには、背景事象の表現に多項式ではなく指数関数を用い、それに ρ, ω, ϕ 中間子によるピークを加えた式で実データをフィットして、同じ議論をすることが必要となる。

- 背景事象のフィットに際して背景事象の質量分布作成と同じ関数形である 5 次多項式を用いていること

このことは、背景事象の形を事前に知っていることとほぼ対応する。実際の実験で得るデータを扱う際には、背景事象の質量スペクトルの形状は実際の物理を反映したもので説明されるのが望ましいため、本論文のやり方において、実際の検出器での測定に十分近いとは思えない。

- 他の運動量領域におけるデータの変化

他の運動量領域はデータ数が異なること、また、信号-背景事象（コンビナトリアルバックグラウンド）比が変わることにより、検出可能性が変わる。

- 運動量損失を考慮していないこと

ミュー粒子は検出器中や媒質中で散乱を受けることで運動量を失う。この時、ミュー粒子対から再構成した質量は運動量を失ったぶんだけ低質量側にずれる。そのため実際の質量スペクトルは低質量側に尾を引くような形となる。今回の解析では、Gauss 分布を用いており、中心値に対して対象な形をしているため、低質

量側に尾を引いたようなスペクトルが本来の質量スペクトルの形である場合、本論文のやり方ではうまくいかない可能性がある。検出器による運動量損失は、Geant4 などの検出器効果を考慮したシミュレーションを行うことで、再現できる。また、Crystal Ball 関数 [21, 22, 23] と呼ばれる関数を用いてあてはめを行うことで、より実際に近い解析が出来る。この関数は、運動量損失を考慮して Gauss 分布の低質量側に尾を引くような形状をしており、運動量損失の大きさに合わせた尾を再現できる。

- ω , ϕ 中間子の分布幅を正確に考慮していないこと

本研究では Breit - Wigner 分布の形状を近似して質量分布作成や解析を行った。Breit - Wigner 分布と Gauss 分布の畳み込みは Voigt 分布と呼ばれており、Voigt 関数は数値積分で関数形を求めることが可能なため、ヒストグラム 1 つだけを考えるような場合には Voigt 関数で分布させることでより良くフィットされる。また、高温高密度媒質中でベクトル中間子の分布幅が変わることも予測されているが、考慮しなかった。

- ミスマッチによる背景事象

MFT や MUON の飛跡検出アルゴリズムは誤って他のミュオン粒子の作る飛跡同士を結びつけてしまう（ミスマッチする）ことがある。ミスマッチによる飛跡は飛跡が異なるため運動量が実際のミュオン粒子と異なる。そのため、そのようなミュオン粒子的な飛跡と物理的なミュオン粒子、また、そのようなミュオン粒子同士を結びつけてしまって生じる背景事象がある。このような背景事象は系統的な誤差として効いてくる可能性があり、その詳細について理解して考慮する必要があるが考慮していない [19, 2.6.4 節]。

- 陽子・原子核衝突、また、原子核・原子核衝突における変化

衝突系が変わると、信号と背景事象の比が変化し検出可能性は変わるため、その衝突系におけるデータを基に質量分布作成を行う必要がある。また、原子核相互衝突では背景事象が大幅に増えるため本論文と同じ方法で検出可能性を議論できるかは不明である。

6.2 得られた知見と考察

本論文の結果は前節のような効果を踏まえず行なっているものであるが、それらの効果を荒く見積もった上で言えることについて記す。

5.2.2 節で述べたように、1 つ 1 つのデータには統計的なふらつきがあり、本論文では平均を取ることでふらつきを覆い隠して、質量変化の検出可能性について考えた。それに対して実験ではある 1 つのデータを得るため、そのデータが偶然質量変化を検出しやすいものである可能性も検出しにくいものである可能性もある。ただし、ある質量変化のパラメータに対する平均的な $\Delta\chi^2$ の大きさを知ることができたため、本論文では、ある質量変化のパラメータに対する平均的な検出可能性を考えることができた。

本論文の示唆する結果は、質量変化率 Δ も質量変化する粒子の割合 R も大きい時に検出が可能というものであり、結果は、質量変化率 Δ が大きくても、 R が十分大きくないと検出は難しいというものである。密度温度とも異なる状況の実験ではあるが、KEK E325 [9] のように ω 中間子の質量変化率が 9% だったとして、質量変化を Run2 のデータ量で MFT なしに質量変化を信頼水準 99.7% で検出するには、 $R = 1.3\%$ 変化する必要がある。陽子相互衝突は原子核相互衝突に比べてエネルギーと密度が小さいため、質量変化の割合は小さいと考えられる。また、仮に ω 中間子の質量変化が起きたとしても、陽子は小さいため ω 中間子が媒質から外に出る前にミュオン粒子対に崩壊する可能性は低く、 R は小さい。そのため、質量変化した ω 中間子の数の ω 中間子全体の数に対する割合 R がとても小さく、統計的に検出できる可能性は高くないことが予想される。

本論文の質量分布作成に用いた質量分布解析においては、コンビナトリアルバックグラウンドの差し引きが完全にはなされておらず背景事象としていたこと、また、 ρ 中間子の作るピークを含めて背景事象としていたことから、背景事象の質量分布の形状はあまり正確でない可能性があり、系統誤差については関数形などについてより良く考

える必要がある。しかし、質量分布の再現に際してコンビナトリアルバックグラウンドや ρ の作るピークが差し引きされておらず含まれていたため、前節のコンビナトリアルバックグラウンドの節でも議論した通り、ヒストグラムの各ビンの統計誤差は、実際のデータと比較して半分よりは大きい程度になっている (図 4.3)。そのため、誤ってはいが差し引いていたコンビナトリアルバックグラウンドを足した時、 χ^2 や $\Delta\chi^2$ は本論文の値の 1/2 倍より小さくならないと考えられる。そのためコンビナトリアルバックグラウンドと ρ の作るピークを正確に考慮に入れることによる χ^2 の大きさの変化は数倍程度であると考えられる。

本論文では軽いベクトル中間子の作るピークを Gauss 分布で近似した。Gauss 分布は左右対称なため質量が軽い側への質量変化が起きた時それを軽い側だけ値を大きくすることは出来ないためフィットが難しく、比較的早く見つけられる。しかし実際は運動量損失により質量が軽い側に尾を引く分布となるため、そのような分布 (Crystal Ball 関数) でフィットする必要がある。このような場合、軽い方向に質量変化した粒子の数が多くなくピークが見えにくい時には、運動量損失による尾を大きくすることで程度までフィットすることができるため、より検出感度が悪くなることが予想できる。そのため、本論文の結果で述べた質量変化より小さい質量変化しか起きていない場合に、質量スペクトルの変形を見つけるのは難しいことが予想できる。

6.3 本論文の手法の限界

本論文で用いた手法での限界について述べる。

まず、多項式を背景事象の質量分布の作成や解析に用いた。背景事象の内容についての詳細を述べておらず、背景事象が何らかの要因でピークを持つような場合は誤った結果を得る可能性がある。

また、見たい質量分布と重なるピークがあるときについて今回の手法は議論していない。例えば、 ϕ 中間子が $\Delta = 23\%$ 質量変化して ω のピークに重なるような場合について考えていない。

親粒子の質量スペクトルの形状が変化するような場合、論文の方法をそのまま適用することはできない。例えば分布幅がとて大きく背景事象との区別が難しい場合や、Breit - Wigner 分布でなく多峰性の分布になる場合などについてである。このようなことを考えると、本論文の手法を適用して検出可能性を議論できるのは、最初に仮定した通り、軽いベクトル中間子の質量分布が Breit - Wigner 分布的な形を保ったまま Δ が数 % 変化するような場合についてである。分布幅が大きくは変化しないような場合も議論できる可能性もある。

6.4 今後の展望

2つの異なる関数でのフィットを比較し検出可能性を議論するための手法を身につけたため、6.1 節に述べたような課題を 1 つずつ解決していくことで、より実際の測定に近いシミュレーションができる。

本論文の手法は、ある関数と、その関数のパラメータをある値に固定した (ここでは $\Delta = R = 0$ のような) より簡単な関数とでフィットを比べる際に用いることができる。より関係が複雑な複数の関数でのフィットを行い検定を行うにはより混みいった議論が必要となるが、いくつかの関係においては議論すべき統計量が知られている [28, 8.3 節] ため、検定が行える可能性がある。

また、本研究は陽子相互衝突のデータを基に行ったが、陽子陽子衝突においては衝突によって生じるハドロン媒質が小さく、質量変化が仮に媒質中で起きたとしてもその媒質中でベクトル中間子が崩壊する割合は著しく低い。そのため陽子相互衝突で質量変化が起きていたとしても実際に検出できる可能性は低い。それに対して、原子核原子核衝突においては質量スペクトルの変形が予想されているため、質量状態変化の検出可能性についての議論が必要がある。原子核相互衝突では QGP が生成され、ハドロン媒質も大きいのが、背景事象も多くなる。そのため、本研究の状況において検出可能性を議論することは、原子核相互衝突における検出可能性評価のためのより簡単な状況におけるテストであると位置付けることができ、有用であると考えられる。

本研究では運動量領域を $2 < p_T < 3 \text{ GeV}/c$ に制限して、信号背景事象比の高い領域のみを考えたものの、1次元の質量分布を考慮して質量分布作成や質量状態変化についての解析を行った。これに対し、運動量と衝突中心度に対する分布も考えて3次元の解析を行うことが考えられる。運動量が小さいミュー粒子対については崩壊前のベクトル中間子が媒質中に存在する時間が長かった可能性が高く、媒質中で崩壊する割合が大きくなると考えられる。また、原子核同士衝突において衝突中心度が大きい事象については高温高密度媒質が大きくなるため、この時も媒質中で崩壊する割合が大きくなると考えられる。これらの効果を考慮することで測定感度が上がる可能性がある。

背景事象の見積もりについて、新しい検出器 MFT の導入により、軽いベクトル中間子についての解析においては背景事象となっている b, c クォークの影響についてより詳細な議論ができる可能性がある [19]。そのことで、背景事象を減らし、信号背景事象比を高くできる可能性がある。

第 7 章

結論

高エネルギー原子核衝突によって生成される QGP 中における、軽いベクトル中間子の質量スペクトルの変形についての検出可能性評価の事前研究として、本研究では陽子陽子衝突実験のミュオン対測定による質量スペクトルの形状変化の検出について研究した。ALICE 実験 2016 年 $\sqrt{s} = 13$ TeV の陽子陽子衝突の統計量では MFT 導入前において背景事象の質量スペクトルの形状の不定性を無視すると、1.6% の ω 中間子が質量変化率 10% で質量状態変化するような場合 99.7% の信頼水準で 2 準位模型を採択できることが分かった。また、同じ統計量で MFT 導入後の検出器の性能を仮定すると、1.1% の ω 中間子が質量変化率 10% で質量状態変化するような場合、同じく 99.7% の信頼水準で 2 準位模型を採択できることが分かった。また、質量変化率が小さい場合には MFT を導入することで、媒質中での崩壊の割合が小さくとも見つかることがわかった。

6 章で述べたような課題が未だ残っている結果ではあるが、検出感度を評価するための 1 つの指標を得ることができた。

本論文の手法は、ある関数と、その関数のあるパラメータの値を固定したより簡単な関数とでフィットを比べる際に用いることができる。より関係が複雑な複数の関数でのフィットを行いそのフィットの良さを比較するにはより混みいった議論が必要となるが、本論文における $\Delta = R = 0$ とすると 1 ピークのモデルと一致するような、同じ形状のピークが 2 つ重なっているような場合においては用いることが出来た。

本研究は陽子相互衝突のデータを基に行った。陽子相互衝突では仮に ω 中間子の質量変化が起きたとしても、質量変化した ω 中間子の ω 中間子全体に対する割合 R がとても小さいため、検出できる可能性は高くはないことが予想される。本研究は陽子相互衝突に対して行ったが、これを原子核相互衝突の簡易的なシミュレーションと捉えることもできる。原子核相互衝突では陽子相互衝突と比較して誤差が多くなるため信号背景事象比が小さくなり、難しい解析となる。本研究において 2 つの異なる関数でのフィットを比較し検出可能性を議論するための手法が得られたため、今後は 6 章に述べたような課題を原子核相互衝突における質量分解能や統計量や信号背景事象比を考慮しながら 1 つずつ解決していくことで、原子核相互衝突実験のミュオン対測定に即した軽いベクトル中間子の質量スペクトル変形のシミュレーションが可能となる。

付録

A 尤度比検定と $\Delta\chi^2$

この章では、4章の $\Delta\chi^2$ を用いた尤度比検定について説明する。平均 μ で、分散 σ^2 の正規分布を $N(\mu, \sigma^2)$ と表す。

A.1 最小二乗法

最小二乗法とは、誤差の二乗和を最小にする推定法である。一般的な統計モデル

$$y_i = f_i(\boldsymbol{\theta}) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{A.1})$$

を考える。ここで、 $f_i, i = 1, \dots, n$ は既知関数、未知パラメータ $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_p)'$ はパラメータ空間 $\Theta \subset \mathbb{R}^p$ に属しているとする。また、誤差 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ は互いに独立で、同一の平均 0、分散 σ^2 を持つとする。この時、誤差の二乗和

$$\sum_{i=1}^n \{y_i - f_i(\boldsymbol{\theta})\}^2 \quad (\text{A.2})$$

を最小にするような $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ を求める方法を最小二乗法と呼ぶ [28, 第 7.2 節]。

例として、単回帰モデルを考える。説明したい目的変数 y があり、それに影響を与える説明変数 x がある。データとして、 n 個の標本 $(y_1, x_1), \dots, (y_n, x_n)$ が与えられているとする。このようなデータに対して

$$y_i = \theta_0 + \theta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{A.3})$$

を想定する。ここで、 $\boldsymbol{\theta} = (\theta_0, \theta_1)'$ は未知のパラメータで $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ は互いに独立な確率変数である。 ε_i が平均 0、分散 σ^2 を持つと仮定するとき、上式は

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 (x_i - \bar{x}) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{A.4})$$

と書ける。ここで、 $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i/n$, $\beta_0 = \theta_0 - \theta_1 \bar{x}$, $\beta_1 = \theta_1$ である。この時、パラメータ β_0, β_1 について、

$$\sum_{i=1}^n \{y_i - \beta_0 - \beta_1 (x_i - \bar{x})\}^2 \quad (\text{A.5})$$

を最小にする (β_0, β_1) の組を探すこととなる。この場合、

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y}, \quad \hat{\beta}_1 = \frac{s_{xy}}{s_x^2} \quad (\text{A.6})$$

ここで、

$$s_{yx} = s_{xy} = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x}), \quad s_x^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (\text{A.7})$$

であり、 $s_x^2 \neq 0$ とした。

A.2 カイ 2 乗最小化

一般的なモデル A.1 に戻る。 y_i は誤差 ε_i を含む測定値であり、 ε_i は正規分布 $N(0, \sigma^2)$ に従うとする。モデル g が正しい時、 y_i のモデルによる予測値 g_i との差 $y_i - f_i(\boldsymbol{\theta})$ は誤差 ε_i のみとなり、それは正規分布 $N(0, \sigma^2)$ に従うので、 σ で割った

$$\frac{y_i - f_i(\boldsymbol{\theta})}{\sigma}$$

は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。標準正規分布に従う変数を 2 乗して n 個足したものは自由度 n のカイ 2 乗分布をする。ここでは、モデルのパラメータの数 p だけ自由度が減るため、

$$\sum_{i=1}^n \frac{(y_i - f_i(\boldsymbol{\theta}))^2}{\sigma^2} \quad (\text{A.8})$$

は自由度 $n - p$ のカイ 2 乗分布をする。分散が一定な時は、式 A.2 の値を最小にするような $\boldsymbol{\theta}$ を求めることは、 σ^2 は $\boldsymbol{\theta}$ に対して定数であるため、A.8 式の値を最小にすることと同じである。

より一般に、 ε_i が、同一の平均 0 を持つが分散が各々異なりそれぞれ σ_i^2 であるような場合を考える。この場合も同様に、モデルが正しい時、 $y_i - f_i(\boldsymbol{\theta}) (= \varepsilon_i)$ は正規分布 $N(0, \sigma_i^2)$ となるので、それぞれを σ_i で割った $\frac{y_i - f_i(\boldsymbol{\theta})}{\sigma_i}$ はそれぞれ標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。よって、

$$\chi^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - f_i(\boldsymbol{\theta}))^2}{\sigma_i^2} \quad (\text{A.9})$$

は自由度 $n - p$ のカイ 2 乗分布に従う。この χ^2 の値を最小化するフィットをカイ 2 乗最小化、カイ 2 乗フィットと呼ぶ [29, 第 9 章]。

A.3 最尤推定

モデルの含むパラメータを $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ とおいて、標本 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ に対する統計モデルを

$$P(\mathbf{X}) = \sum_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) \quad (\text{A.10})$$

とする。ここで、尤度関数 $f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})$ を \mathbf{x} を固定して $\boldsymbol{\theta}$ の関数とみなすとき、

$$L(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{x}) \quad (= f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})) \quad (\text{A.11})$$

と表し、尤度関数と呼ぶ。

最尤推定値と呼ばれる量がある。尤度関数 $L(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{x})$ が最大となる $\boldsymbol{\theta}$ を $\boldsymbol{\theta}$ の最尤推定値と呼び、 $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x})$ と表す。すなわち、

$$L(\hat{\boldsymbol{\theta}}; \mathbf{x}) = \sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} L(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{x}) \quad (\text{A.12})$$

が成り立つ。漸近正規性についての議論は省略する [28, 7.4 節]。

A.4 Poisson 回帰における最尤法と最小二乗法

ある決まった時間に起きる事象の回数の分布は Poisson 分布に従う。パラメータ $\lambda (> 0)$ の Poisson 分布 $\text{Poisson}(\lambda)$ の確率関数は

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, \quad x = 0, 1, \dots \quad (\text{A.13})$$

で与えられる。パラメータ λ の Poisson 分布は平均も分散も λ であり、また、Poisson(λ) は $\lambda \rightarrow$ 大で正規分布 $N(\lambda, \lambda)$ になる。そのため、データ y_i を得た場合、 $\lambda_i \approx y_i$ と考えることで、 y_i の誤差も $\sqrt{\lambda_i} \approx y_i$ とできる。[29, 第 4.6 節, 第 9 章]

このような時、データが得られる確率である尤度は以下の式になる。

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{x}) &= \prod_i \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y_i - f_i(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}))^2}{2\sigma_i^2}\right) \\ -\log L(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{x}) &= \sum_i \log(\sigma_i \sqrt{2\pi}) + \left(\frac{(y_i - f_i(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}))^2}{2\sigma_i^2}\right) \\ &= (\text{const.}) + \frac{1}{2}\chi^2 \\ -2\log L(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{x}) &= (\text{const.}) + \chi^2 \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

(const.) はフィットに対して定数、すなわち $\boldsymbol{\theta}$ に対して定数であることを言っている。最尤法では L を最大にする $\boldsymbol{\theta}$ 、すなわち $-\log L$ を最小化する $\boldsymbol{\theta}$ を探しているのだから、 χ^2 を最小とする $\boldsymbol{\theta}$ を探す χ^2 フィットと一致していることがわかる。

以上のように、Poisson 回帰においてデータの y_i が十分大きい時、最尤法と χ^2 フィットは一致する [29, 第 3.9 節, 第 9 章]。

A.5 パラメータの推定

任意の関数形 $y = f(x)$ をモデルに採用して式 A.9 の χ^2 を最小化するパラメータを $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 、その時の最小な χ^2 を $\hat{\chi}^2$ とする。その $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ の誤差の推定は、1次元のパラメータを 68% (いわゆる 1σ) で推定する時、 $\chi^2 = \hat{\chi}^2 + 1$ となるようなパラメータの値 $\underline{\theta}, \bar{\theta}$ を探すことで実現でき、 θ の誤差範囲 (1 パラメータ 68% 信頼水準) は $\underline{\theta}$ から $\bar{\theta}$ までである。同様に $2\sigma, (\dots, n\sigma)$ (95.4%, (...)) 信頼水準のパラメータの上限下限は、

$$\Delta\chi^2 \stackrel{\text{def}}{=} \chi^2 - \hat{\chi}^2 = n^2 \quad (\text{A.15})$$

となるようなパラメータを探すことで行える。

推定するパラメータが m 個ある時、つまり m 次元のパラメータの誤差の推定においては、 $\Delta\chi^2$ が n^2 ではなく、自由度 m の χ^2 分布に従うと考えて、信頼水準 (Confidence Level; C.L.) の $\chi_m^2(\text{C.L.})$ を用いて、

$$\Delta\chi^2 \stackrel{\text{def}}{=} \chi^2 - \hat{\chi}^2 < \chi_m^2(\text{C.L.}) \quad (\text{A.16})$$

となるようなパラメータの領域がパラメータの誤差範囲である。

この信頼水準の解釈として、

$$\Delta\chi^2 = \chi_m^2(95\%) \quad (\text{A.17})$$

となるようなパラメータ $\boldsymbol{\theta}_{95\%}$ の時について説明する。この時、真の分布のパラメータが $\boldsymbol{\theta}_{95\%}$ である時に、そのフィットに用いたデータを得る確率が 5% であるというものである。この基礎となっているのが次節の尤度比検定である。

A.6 尤度比検定と $\Delta\chi^2$

尤度比検定の考え方と、尤度比基準が $\Delta\chi^2$ に近似されることを説明する。

パラメータを θ とし、その集合を Θ とする。帰無仮説 H_0 を、パラメータ θ の範囲を $\Theta_0 \subset \Theta$ の内部に制限して $\theta \in \Theta_0$ 、対立仮説を $\theta \in \Theta$ とする。ここで制限したパラメータの数は p だとする。それぞれの仮説において最尤法

で選んだパラメータでの尤度 $L(x; \hat{\theta}_0), L(x; \hat{\theta})$ 同士で比をとって、尤度比基準

$$\lambda = \frac{L(x; \hat{\theta}_0)}{L(x; \hat{\theta})} \quad (\text{A.18})$$

を考える。この λ について、 $\lambda < c$ の時に帰無仮説を棄却する検定のことを尤度比検定と呼ぶ [28, 8.3 節]。

c の選び方については、 $-2 \log c = \chi_p^2(95\%) (\approx 5.99)$ とすれば良い。

これには、帰無仮説が正しい時には、 $n \rightarrow$ 大で漸近的に対数尤度比の (-2) 倍の分布は、自由度 p の χ^2 分布に一致すること [28, 8.3 節]

$$-2 \log \lambda \rightarrow \chi_p^2$$

を用いる。信頼水準 95% で帰無仮説を棄却するならば、

$$-2 \log \lambda > \chi_p^2(95\%) \quad (\text{A.19})$$

となる時、帰無仮説を棄却すれば良い。

ここで尤度比基準は尤度の比であるので、対数尤度比の (-2) 倍を考える。A.18 式より、

$$-2 \log \lambda = -2 \log L(\theta_0) + 2 \log L(\hat{\theta}) \quad (\text{A.20})$$

A.4 節の近似により、

$$-2 \log \lambda \rightarrow + \left(\sum_{i=1}^n \left(\log \left[\sqrt{2\pi} \sigma_i \right] \right) + (\chi^2)_{\hat{\theta}_0} \right) - \left(\sum_{i=1}^n \left(\log \left[\sqrt{2\pi} \sigma_i \right] \right) + (\chi^2)_{\hat{\theta}} \right) \quad (\text{A.21})$$

$$= (\chi^2)_{\hat{\theta}_0} - (\chi^2)_{\hat{\theta}} \stackrel{\text{def}}{=} \Delta \chi^2 \quad (\text{A.22})$$

よって、 $-2 \log \lambda \rightarrow \Delta \chi^2$ と分かったので、

$$\Delta \chi^2 > \chi_p^2(95\%) \quad (\text{A.23})$$

となる時、帰無仮説を棄却すれば良い。つまり、対立仮説を信頼水準 95% で受け入れられる。

まとめると、尤度比基準は $\Delta \chi^2$ で近似でき、 $\Delta \chi^2$ の大きさは帰無仮説が正しいとき χ^2 分布に従うため、 $\Delta \chi^2 > \chi_p^2(C.L.)$ の時に信頼水準 $C.L.$ で対立仮説を採択することにする。

A.7 尤度比基準を $\Delta \chi^2$ で近似した尤度比検定の本文中での利用

この論理を、本文中における状況 (4.2 節) に適用して、信頼水準 $C.L. = 95\%$ として説明する。質量変化がない 1 準位模型を真の分布として多数のヒストグラムを生成する。それぞれのヒストグラムを、1 準位模型と 2 自由度増えた (パラメータの数が 2 つ異なる) 2 準位模型それぞれで χ^2 フィットして $\chi_{1 \text{ level}}^2, \chi_{2 \text{ level}}^2$ を得る。この時、A.6 節の議論により、 $\Delta \chi^2$ の値の分布は、自由度が 2 の χ^2 分布をするはずである。この $\Delta \chi^2$ の分布を自由度 2 の χ^2 分布 ($\chi_{2 \text{ df}}^2$) と見做すと、図 A.1 のグラフのような自由度 2 の χ^2 分布において 5.991 (≈ 6) 以上の値を持つのは 5% である。このことを表 A.1 で $\chi_{2 \text{ df}}^2(95\%) = 5.991$ と表している。

ここで、あるデータのヒストグラムを作った。これについて 1 準位模型と 2 準位模型どちらの仮説がより良い説明をするか判断するために検定したい。そのヒストグラムを 1 準位模型と 2 準位模型それぞれでフィットして例えば $\Delta \chi^2 = 6$ を得たとする。上で述べた通り、2 自由度の χ^2 分布において、6 以上の値は 5% という小さい確率でしか得られない。5% の確率でしか得られない大きい $\Delta \chi^2 = 6$ という値が得られたので、2 準位模型を優位と考え、1 準位模型を有意水準 (危険度) 5% で棄却する。危険度というのは、その検定したいヒストグラムを生成した真の分布が質量変化がない 1 準位模型である確率は依然として存在するのに、誤って 2 準位模型を採択してしまうという「危険度」($1 - C.L.$) が 5% である。この時、2 準位模型の信頼水準が 95% という。このような論理で質量変化がない 1 準位模型を棄却し、質量変化がある 2 準位模型を信頼水準 $C.L.$ で採択する。

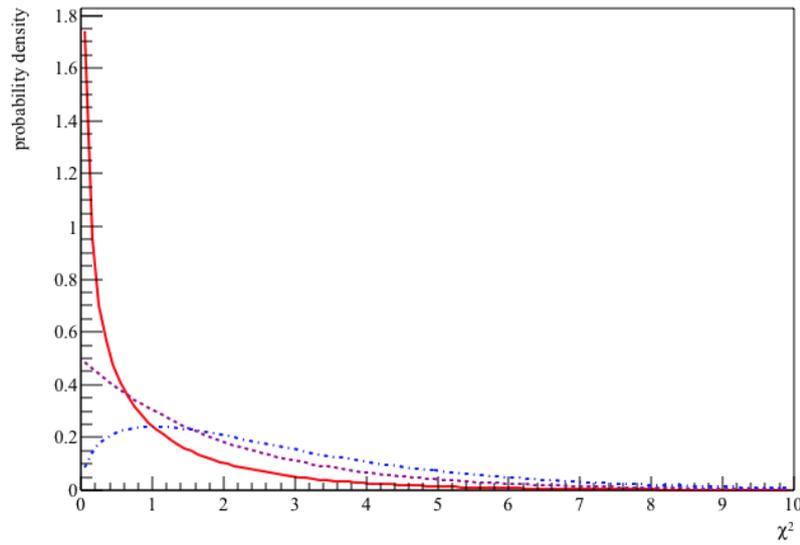


図 A.1 χ^2 分布。横軸は χ^2 の値，縦軸は確率密度である。3 つある線はそれぞれ自由度が異なり，赤色の実線は自由度 1，紫の点線は自由度 2，青の 1 点破線は自由度 3 である。

表 A.1 χ^2 分布の上側 α 点 $\chi_m^2(\alpha)$ ここで α は本文中では有意水準（危険度）と対応する。ROOT の `TMath::ChisquareQuantile` で得た値の上 2 桁。

自由度 m	α					
	“1 σ ”	.10	“2 σ ”	“3 σ ”	“4 σ ”	“5 σ ”
	.32		0.046	0.0027	6.3e-05	5.7e-7
1	1	2.7	4	9	16	25
2	2.3	4.6	6.2	12	19	29
3	3.5	6.3	8.0	14	22	31

謝辞

本研究を進めるにあたり、お世話になった多くの方々に感謝いたします。逐一ご指導くださいました志垣賢太准教授に感謝いたします。毎週の解析ミーティングや質問に伺った際に毎度的確なアドバイスをいただき、研究を前に進められるよう研究の道筋を示していただきました。

杉立徹教授には、研究に際して不都合や不具合のないよう研究室を運営してくださるとともに、研究や実験に置いて重要な心構えや考え方について多くのご指導をいただきました。本間謙輔助教にはラボエクササイズの時をはじめとして、ミーティングで鋭い指摘をいただき大変勉強になりました。三好隆博助教には、セミナーを担当していただき、また、コンピュータについて何度も教えてくださいました。山口頼人特任助教には、解析ミーティングや質問に伺った際に解析や実験準備についての的確な指摘をいただく他、頻繁にお話させていただきました。クォーク物理学研究室の先生方に感謝いたします。

また、研究室の学生の方々には、物理の議論やプログラムの相談をさせていただき自分の研究についての理解を深めることができました。また、他の方々の研究内容をお聞きすることで物理の知識の幅を広げることができました。ありがとうございました。特に、ミーティングやメールにて重要な指摘やアドバイスをいただいた永嶋さん、また、方法やデータについて詳しく説明して下さった川本さん、プログラミングについての相談を頻繁にさせていただいた大佐古さん、卒論について詳しく説明して下さった吉川さん、ありがとうございました。最後に、幾度も議論に付き合ってください遊びに行ってくれたりした4年生の皆さんには頭が上がりません。楽しかったです。本当にありがとうございました。

参考文献

- [1] 永江知文, 永宮正治. 原子核物理学. 裳華房, 第7版, 2月2013.
- [2] M. Tanabashi, et al. Review of particle physics. *Phys. Rev. D*, Vol. 98, p. 030001, Aug 2018.
- [3] Bogden Povh, Klaus Rith, Christoph Scholz, and Frank Zetsche. 素粒子・原子核物理入門. シュプリンガー・フェアラーク東京, 第1版, January 1997.
- [4] 秋葉康之. クォーク・グルーオン・プラズマの物理—実験室で再現する宇宙の始まり—. 共立出版, 4月2014.
- [5] W. Weise. Nuclear aspects of chiral symmetry. *Nuclear Physics A*, Vol. 553, pp. 59–72, 1993.
- [6] Tetsuo Hatsuda, Hiroyuki Shiomi, and Hitoshi Kuwabara. Light Vector Mesons in Nuclear Matter. *Progress of Theoretical Physics*, Vol. 95, No. 6, pp. 1009–1028, 06 1996.
- [7] R. Muto, et al. Evidence for In-Medium Modification of the ϕ Meson at Normal Nuclear Density. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 98, p. 042501, Jan 2007.
- [8] K. Ozawa, et al. Observation of ρ/ω Meson Modification in Nuclear Matter. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 86, pp. 5019–5022, May 2001.
- [9] M. Naruki, et al. Experimental signature of medium modifications for ρ and ω mesons in the 12 GeV $p + A$ reactions. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 96, p. 092301, Mar 2006.
- [10] M. H. Wood, et al. Light vector mesons in the nuclear medium. *Phys. Rev. C*, Vol. 78, p. 015201, Jul 2008.
- [11] Ryugo S. Hayano and Tetsuo Hatsuda. Hadron properties in the nuclear medium. *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 82, pp. 2949–2990, Oct 2010.
- [12] LHC ALICE-J GROUP. "LHC 加速器". <http://alice-j.org/lhc%e5%8a%a0%e9%80%9f%e5%99%a8/>. (Accessed on 01/30/2019).
- [13] CERN. "Science". <https://home.cern/science>. (Accessed on 01/30/2019).
- [14] LHC long term schedule. <https://lhc-commissioning.web.cern.ch/lhc-commissioning/schedule/LHC-long-term.htm>. (Accessed on 01/31/2019).
- [15] ALICE - A Large Ion Collider Experiment. <http://aliceinfo.cern.ch/Public/Welcome.html>. (Accessed on 01/30/2019).
- [16] ALICE collaboration. "Welcome to the ALICE collaboration". <http://alice-collaboration.web.cern.ch/>. (Accessed on 01/21/2019).
- [17] V0 detector | alice.web.cern.ch. <http://alice.web.cern.ch/content/v0-detector>. (Accessed on 01/28/2019).
- [18] Christian Finck (for Alice Muon Spectrometer collaboration). The Muon Spectrometer of the ALICE. *Journal of Physics: Conference Series*, Vol. 50, pp. 397–401, nov 2006.
- [19] Martinez Garcia Gines and Orsini Fabienne. Addendum of the Letter of Intent for the upgrade of the ALICE experiment : The Muon Forward Tracker. Technical Report CERN-LHCC-2013-014. LHCC-I-022-ADD-1, CERN, Geneva, Aug 2013. Final submission of the presen LoI addendum is scheduled for September 7th.
- [20] 黒田真未. "ALICE 実験前方ピクセル検出器導入時の物理性能評価". Master's thesis, 広島大学理学研究科物理科学専攻, 2月2018.
- [21] M. Oreglia. *A Study of the Reactions $\psi' \rightarrow \gamma\gamma\psi$* . PhD thesis, SLAC, 1980.
- [22] John Erthal Gaiser. *Charmonium Spectroscopy From Radiative Decays of the J/ψ and ψ'* . PhD thesis, SLAC, 1982.
- [23] Tomasz Skwarnicki. *A study of the radiative CASCADE transitions between the Upsilon-Prime and Upsilon resonances*. PhD thesis, Cracow, INP, 1986.
- [24] 吉川和樹. 高エネルギー原子核衝突におけるハドロン質量状態変化の μ 粒子対崩壊を介した検出感度評価 (広島大学理学部物理科学科卒業論文), 2018.
- [25] R. Brun and F. Rademakers. ROOT: An object oriented data analysis framework. *Nucl. Instrum. Meth.*, Vol. A389, pp. 81–86, 1997.
- [26] P. Crochet and P. Braun-Munzinger. Investigation of background subtraction techniques for high mass dilepton physics. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, Vol. 484, No. 1, pp. 564–572, 2002.
- [27] B. Abelev, et al. Light vector meson production in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV. *Physics Letters B*, Vol. 710, No. 4, pp. 557–568, 2012.
- [28] 藤越康祝, 若木宏文, 柳原宏和. 確率・統計の数学的基礎. 広島大学出版会, 第1版, 3月2011.
- [29] 奥村晴彦. R で楽しむ統計. 共立出版, 9月2016.