

平成30年度

卒業論文

極低質量暗黒物質探索へ向けた
ジョセフソン接合素子による
GHz帯光子計数法の考察

広島大学 理学部 物理科学科

クォーク物理学研究室

B156264 柴田 早由里

指導教員：杉立 徹 教授

主査：本間 謙輔

副査：高橋 弘充

卒業論文概要 2018 年度（平成 30 年度）

極低質量暗黒物質探索へ向けた ジョセフソン接合素子による GHz 帯光子計数法の考察

今日、宇宙を構成する成分の 95% は暗黒成分であるとされており、暗黒成分の候補として極低質量の未観測粒子が挙げられている。これらの粒子の探索へ向けて、パルスの光波ビーム間の未知場を介した散乱から生じる GHz 帯信号光子を計数する手法が必要となる。本研究では、超伝導体-絶縁体-超伝導体から構成されるジョセフソン接合素子によるクーパ対のトンネル効果に着目した。パルスの臨界電流以下のバイアス電流を接合部に印加することで接合内の励起準位数を制御することができる。例えば 2 準位状態 $|0\rangle$ 、 $|1\rangle$ の制御は既に量子ビットに実装されている。接合のポテンシャルに束縛されたクーパ対がマイクロ波の入射によって $|1\rangle$ 状態に遷移した時、トンネル確率が上昇する。 $|1\rangle$ 状態からのトンネル効果の有無は、トンネル電流の増大による接合間の電位差の飛びとして従来観測されてきた。この飛びと相関する微弱トンネル電流自体を高精度で検知することが可能であれば、電流測定によって光子数を計数できるのではないかと考えた。そこで、コイルを介して電流増大を磁束に変換した上で、 $10^{-7}/\sqrt{\text{Hz}}$ 磁束量子に感度を持ち得る直流 SQUID を追加し、間接的に電流を測定する超伝導回路全体の概念設計に到った。

第2章 ジョセフソン効果

本章では、光子計数機に用いるジョセフソン効果の基本的原理について説明する。まず、2.1節では超伝導の基礎について述べる。次に、2.2節で本研究で着目したジョセフソン効果の理論とその振る舞いについて述べる。

2.1 超伝導

1911年、4.2K以下における水銀の電気抵抗の消失がH.Kamelingh Onnesによって発見された。1933年にはMeissnerとOcsenfeldによって超伝導体の完全反磁性が発見された。基本的な理論が発表されたのは1957年であり、その時の発表者J.Bardeen、L.N.Cooper、J.M.Schriefferの頭文字をとってBCS理論と呼ばれている。[3]

超伝導体はクーパー対と呼ばれる電子対によって構成される。クーパー対は、原子核の並んだ結晶格子中において、格子の歪み(フォノン)を媒介とした引力相互作用によって形成される。超伝導体におけるクーパー対は、ボース・アインシュタイン凝縮を行い、元のフェルミ面より低い準位 E に凝縮する。またこの時、準粒子が存在できないエネルギー領域が存在する。準粒子が持つエネルギーを E_q とすると、準粒子は

$$E + \Delta < E_q \quad (2.1)$$

の領域に存在する。ここで、 Δ は超伝導におけるエネルギーギャップを表している。図2.1に超伝導状態のバンド構造と状態密度の関係を示している。

クーパー対が E の準位に凝縮することから、超伝導体の内部の量子状態は均一となり、巨視的な波動関数で表すことができる。この巨視的波動関数における位相因子が、超伝導体における位相を表し、超伝導体の様々な物理現象と関係がある。その1つがジョセフソン効果である。

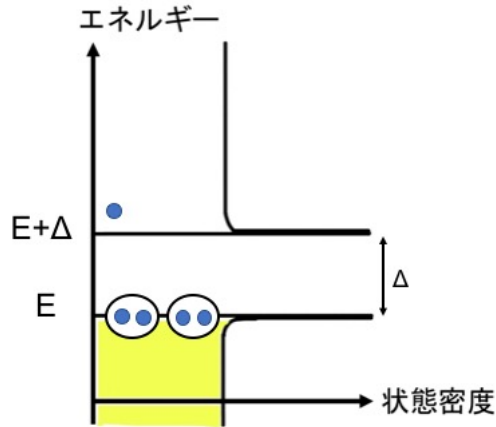


図 2.1. 超伝導状態のバンド構造と状態密度。超伝導状態におけるバンド構造を表している。青い丸 1 つが電子 (準粒子) を表し、2 つの電子を囲んだものがクーパー対である。また、黄色に塗られた部分は充填率を表している。したがって、クーパー対が存在するエネルギー準位 E 以下において、電子およびクーパー対が充填され、その状態密度はエネルギー準位 E 付近で増大している。準粒子は有限温度で熱励起によって存在する。

2.2 ジョセフソン効果

図 2.2 のように、2 つの超伝導体で薄い絶縁体を挟み込んだ構造を、ジョセフソン接合と言う。絶縁体が薄いため、それぞれの超伝導体は弱く結合している。

ジョセフソン接合において、接合全体に超伝導の性質が広がり、絶縁体障壁をクーパー対がトンネルすることで電流が流れる現象がジョセフソン効果である。この現象は 1962 年に B.C. Josephson によって理論的に予測され、1963 年に P.W. Anderson と J.M. Rowell によって観測された。バンド構造に対するジョセフソン効果の概念図を図 2.3 に示した。

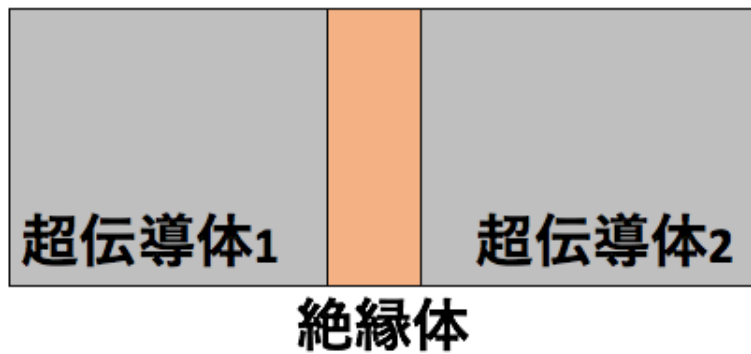


図 2.2. ジョセフソン接合の概念図

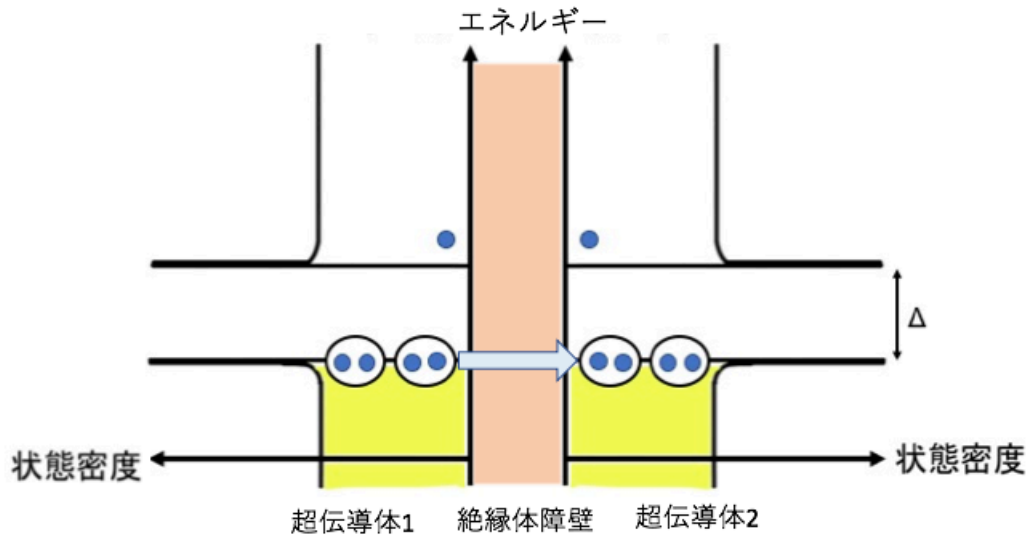


図 2.3. バンド構造に対するジョセフソン効果の概念図。クーパー対が乖離せずトンネルするため、トンネルはギャップエネルギー以下のエネルギー領域でトンネル効果が起き、絶縁体障壁を透過して超伝導体 1 から超伝導体 2 に電流が流れる。

この電流には、クーパー対のトンネル効果による超伝導電流、および励起された電子 (準粒子) による電流が含まれる。超伝導電流は、弱結合した位相の異なる 2 つの超伝導体が位相を揃えようとすることで、位相差分に応じた電流が流れるものであり、その電流密度は、

$$J = J_C \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = J_C \sin \varphi \quad (2.2)$$

と表される。ここで、 J_C は超伝導電流の取りうる最大値であり、臨界電流が発生するときの電流密度を意味する。 φ_1 、 φ_2 はそれぞれの超伝導体の位相、 φ は超伝導体間の位相差を示している。したがって超伝導電流は、

$$I = I_C \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = I_C \sin \varphi \quad (2.3)$$

と表される。 I_C は超伝導体における臨界電流である。また、2 つの超伝導体のクーパー対の密度を ρ_1, ρ_2 とすると、

$$J = \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\frac{\partial \rho_2}{\partial t} \quad (2.4)$$

と表すことができる。ここで、クーパー対の密度が定数である時にも、クーパー対のトンネル効果によるクーパー対密度変化を元の状態に引き戻す外部電流源 (バイアス電流) がかかっているため、その時間微分は 0 にならず、超伝導電流が流れる。このバイアス電流は、クーパー対を壊さずトンネル効果を起こすために、超伝導体における臨界電流以下の値を持つ。バイアス電流がジョセフソン臨界電流を超えた時、超伝導電流のみではバイアス電流を運びきれなくなるため、電位差の飛びが観測され、同時に準粒子電流がバイアス電流を肩代わりするように流れる。トンネル効果の有無は、この時の電位差の飛びとして従来観測されてきた。

接合両端の電位差 V と位相差の関係は [4]、

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{2eV}{\hbar} \quad (2.5)$$

と表され、 $V = 0$ の時も一定の位相差が生じ、電流が流れる。電圧降下が無い時のジョセフソン効果を直流ジョセフソン効果と言い、その時の超伝導電流は直流ジョセフソン電流と呼ばれる。

また、(2.3)(2.5)より、

$$\frac{dI}{dt} = \frac{2eV I_C}{\hbar} \cos \varphi \quad (2.6)$$

を得る。ここで、電圧と電流の時間変化の関係式 $V/L = dI/dt$ に代入して整理すると、

$$L_J = V \times \left(\frac{dI}{dt} \right)^{-1} = \frac{\hbar}{2e I_C \cos \varphi} \quad (2.7)$$

を得る。この L_J はジョセフソン接合に生じる非線形なインダクタンス成分であり、ジョセフソンインダクタンスと呼ばれる。

2.2.1 ジョセフソン接合の磁場に対する応答性

この節では、ジョセフソン接合に外部磁場を印加した時の応答性について述べる。外部磁場が存在しない時にトンネル電流分布が均一である接合について考える。この接合に磁場を印加すると、図 2.4 のようにフラウンホーファーパターンの最大超伝導電流 I_{\max} が観測される。この効果は Rowell によって初めて観測された。接合を貫く磁束を ϕ とした時、最大超伝導電流 I_{\max} は、

$$I_{\max} = I_C \left| \frac{\sin(\pi\phi/\phi_0)}{\pi\phi/\phi_0} \right| \quad (2.8)$$

となる。ここで、 ϕ_0 は磁束量子である。したがって、ジョセフソン接合における超伝導電流は外部磁場に対して高い感度を持ち、その感度は磁束量子程度である。この特性は、4.3.1 節で後述するような SQUID 磁気センサに応用されている。

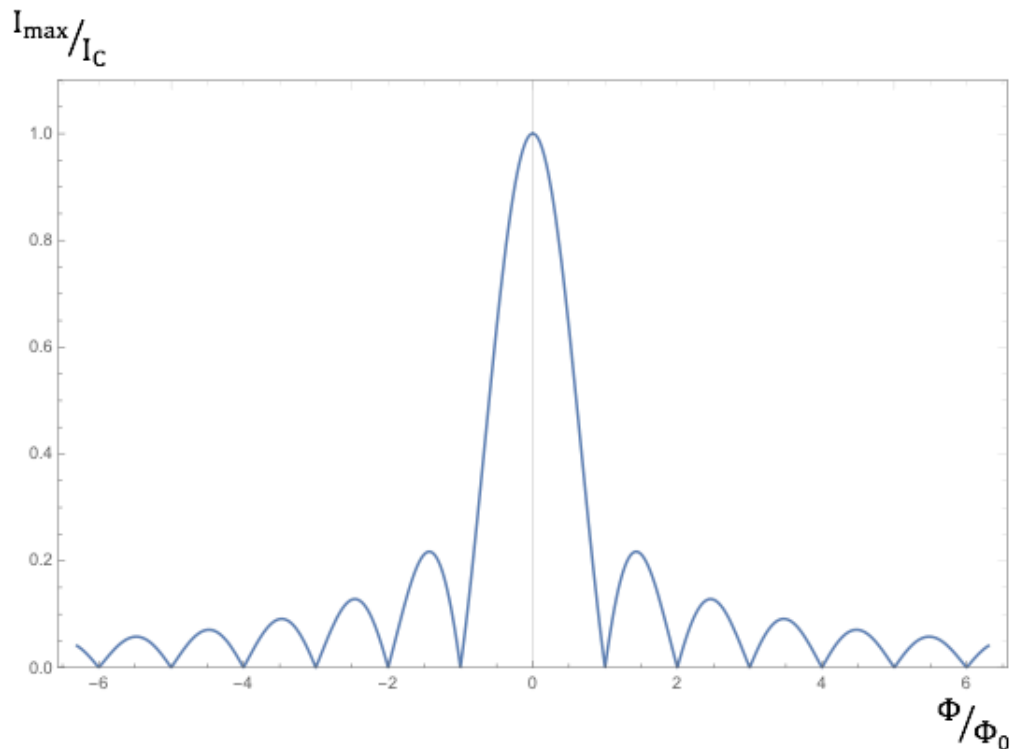


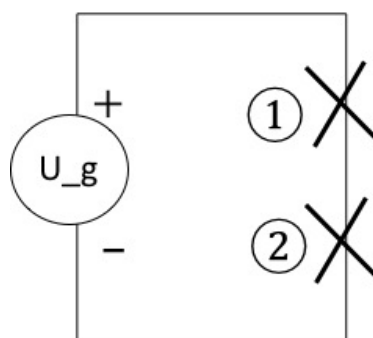
図 2.4. ジョセフソン接合の磁場に対する応答。縦軸は I_{\max}/I_C 、横軸は ϕ/ϕ_0 である。

第3章 超伝導量子ビットを (Qubit) を用いた光子計数技術

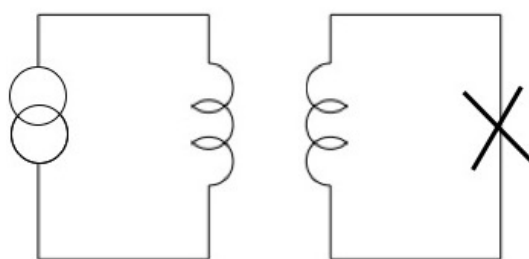
ジョセフソン接合におけるポテンシャルエネルギー内の励起準位数を基底状態 $|0\rangle$ と励起状態 $|1\rangle$ の状態に制限することで、量子もつれ状態を再現することは、既に超伝導量子ビット (Qubit) に実装されている [5, 6, 7]。この章では、超伝導量子ビット (Qubit) および超伝導量子ビット (Qubit) を用いて実際に行われているジョセフソン効果を応用した光子計数技術について概説する。

3.1 超伝導量子ビット (Qubit)

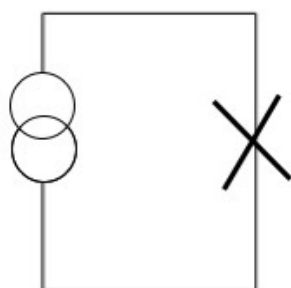
超伝導量子ビット (Qubit) には、電荷 Qubit、磁束 Qubit、位相 Qubit の三つの分類が存在する。それぞれの回路を図 3.1 に示した。これらを用いた光子の検出は、時間幅が短いパルス的な電圧等を印加することによって、連続的な環境ノイズを抑制することが可能である。また、超伝導量子ビット (Qubit) は、Divincenzero 条件を満たしているため、量子コンピューターの候補とされている [7]。



(a) 電荷 Qubit



(b) 磁束 Qubit



(c) 位相 Qubit

図 3.1. 超伝導量子ビット (Qubit) の回路図。(a) が電荷 Qubit、(b) が磁束 Qubit、(c) が位相 Qubit の回路図である。それぞれの回路において、×印はジョセフソン接合を表している。

3.2 電荷 Qubit

まず、電荷 Qubit についてである。電荷 Qubit は図 3.1.a のような回路で表される。電荷 Qubit は直列の電圧源 U_g と 2 つのジョセフソン接合から構成される。ハミルトニアンは、接合のポテンシャルと静電エネルギーにより

$$H = \frac{Q^2}{2C_J} - \frac{I_C \phi_0}{2\pi} \cos \varphi - \frac{I_q \phi_0}{2\pi} \varphi \quad (3.1)$$

と書くことができる。ここで、 I_q は準粒子による電流である。エネルギーポテンシャルは、

$$U = -\frac{I_C \phi_0}{2\pi} \cos \varphi - \frac{I_q \phi_0}{2\pi} \varphi \quad (3.2)$$

と書くことができる。外部電流源によって傾きが生じないため、ポテンシャルの形状は図 3.2 のようになる。

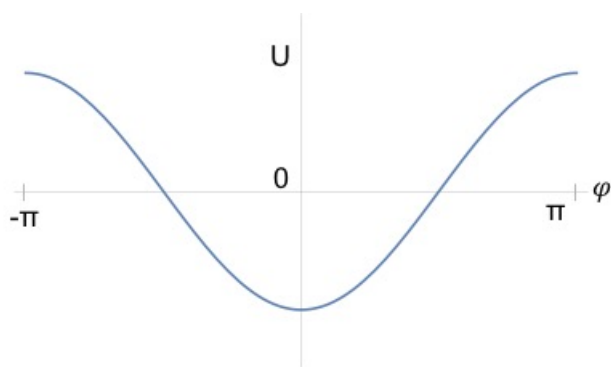


図 3.2. 電荷 Qubit のポテンシャルエネルギー

電荷 Qubit が超伝導 Qubit として用いられるためには、量子状態 $|0\rangle$ 状態、 $|1\rangle$ 状態の区別が必要である。電荷 Qubit はこの区別をクーロン島の中にある余分なクーパ対の数で行なっている。その模式図および概念図を図 3.3, 図 3.4 に図示した [8, 9]。

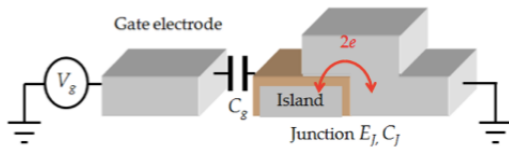


図 3.3. 電荷 Qubit の模式図。
引用: 児玉高明, 修士論文, 東京大学 (2010)
 C_g が図 2.8.a における①コンデンサに該当し、
 C_J が②コンデンサに該当する。

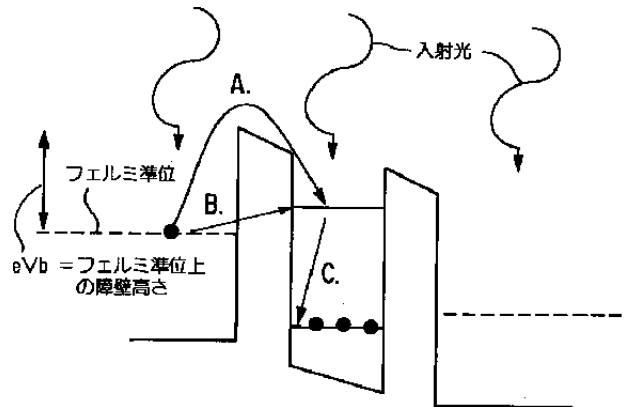


図 3.4. クーロンブロッケード効果。
引用: 株式会社東芝, asta muse 技術「光学装置」
<https://astamuse.com/ja/published/JP/No/1999004017>
二つのポテンシャル障壁に囲まれた部分がクーロン島に相当し、障壁の左側が図 2.8.a における①コンデンサに該当し、右側が②コンデンサに該当する。
破線はエネルギー準位を表している。

ジョセフソン接合を超伝導体-絶縁体-超伝導体という構造からコンデンサと考えると、2つのコンデンサの直列回路であることがわかる。この時、コンデンサ同士に挟まれた部分をクーロン島と呼ぶ [8]。このクーロン島は図 3.3 で「island」と記述されている。クーロン島に余分なクーパー対が存在するかどうかはバイアス電圧源による。電圧が印加された時、①コンデンサのフェルミ準位が上昇する。すなわち、図 3.4 のエネルギー障壁左側の準位が右側の準位に対して上昇する。この時、光子が入射することによって、①コンデンサ内のクーパー対がトンネル効果を起こしてクーロン島に移動する。この様子は図 3.4 における B の過程である。図 3.4 の A の過程は入射光子によってトンネルすることなく励起によって障壁を乗り越える過程を表している。この時クーロン島にはトンネルしたクーパー対が余分に 1 つ存在することになり、 $|1\rangle$ 状態となる。電圧が印加されない時は、ポテンシャル障壁に阻まれて①コンデンサ内のクーパー対はトンネルすることができず、クーロン島内にクーパー対は存在しない $|0\rangle$ 状態となる。このように電圧源によって電位差が発生しトンネル効果が制御される効果をクーロン・ブロッケード効果と呼ぶ。

3.3 磁束 Qubit

次に、磁束 Qubit についてである。磁束 Qubit は図 3.1.b のような回路で表される。磁束 Qubit は交流電流源と超伝導コイルおよびジョセフソン接合から構成される。この回路では、外部磁場を超伝導コイルを介してジョセフソン接合に印加している。この時ハミルトニアンは、

$$H = \frac{Q^2}{2C_J} - \frac{I_C \phi_0}{2\pi} \cos \varphi + \frac{1}{2} \left(\phi - \frac{\phi_0}{2\pi} \varphi \right)^2 \quad (3.3)$$

と書くことができる。 ϕ は超伝導ループに入り込む磁束を表している。エネルギーポテンシャルは

$$U = -\frac{I_C \phi_0}{2\pi} \cos \varphi + \frac{1}{2} \left(\phi - \frac{\phi_0}{2\pi} \varphi \right)^2 \quad (3.4)$$

と書くことができ、その形状は図 3.5 のような対称二連井戸型である。二つの井戸は、エネルギー障壁によって区別される。

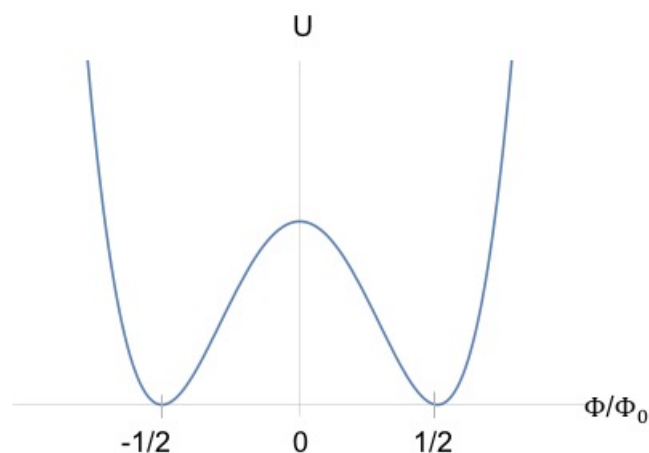


図 3.5. 磁束 Qubit のポテンシャルエネルギー

ここで、巨視的量子共鳴振動が起きる。巨視的量子共鳴振動とは、扱う粒子数が大きい巨視的な系において、連続している対称的な 2 つのポテンシャル井戸間で起きる、二状態間を往復する振動である [10]。クーパ対の集合が右側の井戸に局在している時は、左側の井戸へとトンネル効果が起こる。このトンネル効果によって、内部に入り込む磁束の符号が変化するため、超伝導ループに流れる電流の方向が変化する。したがって磁束 Qubit では、 $|0\rangle$ と $|1\rangle$ の量子状態の区別を外部磁場で制御可能な電流の流れる方向で区別している。磁束 Qubit を用いた光子の計数及び検出は、後述する Λ システムによる計数法を含め、既に行われている [11, 12, 13]。

3.3.1 Λ システムによる計数法

磁束 Qubit を用いた光子計数技術の例として、 Λ システムによる光子計数法が挙げられる [11, 12]。

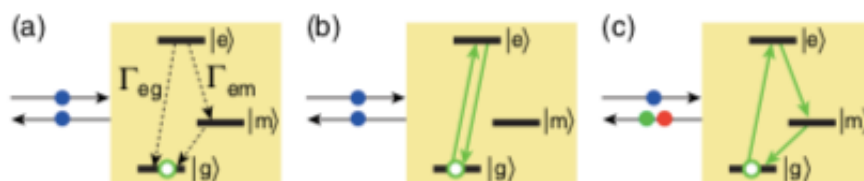


図 3.6. Λ システムと光子の反応の関係。

引用: K. Koshino et al. Physical Review Letters. 111, 153601 (2013)

青丸は入射光子を、緑丸はシステム内の Qubit 状態を示している。 $|g\rangle$ は Qubit の基底準位、 $|e\rangle$ は励起準位、 $|m\rangle$ は中間準位である。 Γ_{eg} 、 Γ_{em} はそれぞれ $|e\rangle$ 状態の Qubit が $|g\rangle$ 状態に減衰する確率、 $|m\rangle$ 状態の Qubit が $|g\rangle$ 状態に減衰する確率である。(a) は単一光子の入射に対して Qubit が励起しない単純反射を示している。(b) は単一光子の入射に対して Qubit が基底準位と励起準位の間を振動する弾性散乱を示している。(c) は単一光子の入射に対する Qubit の非弾性散乱を示している。(c) では Qubit はまず入射光子によって $|e\rangle$ に遷移し、その後 $|e\rangle$ 、 $|m\rangle$ 間を振動した後 $|g\rangle$ に戻る。

Λ システムはラマン遷移を利用している。ラマン遷移とは Qubit の振動する準位がある中間状態の準位間の振動を経由する遷移である。 $|m\rangle$ は有限の寿命を持つため、 $|m\rangle$ の状態にある Qubit は $|g\rangle$ 状態に遷移する。ここで、図 3.6.a と図 3.6.b の反応は相殺するように調整することが可能なため、単一光子の入射に対して図 3.6.c の反応のみを決定論的に導ける。

回路上では Qubit は共振器と結合されている。共振器と Qubit それぞれについて基底準位 $|0\rangle$ と励起準位 $|1\rangle$ のみが存在するとする。したがって、 $|m, n\rangle$ ($m = \text{Qubit}, n = \text{resonator}$) とすると、系の状態は、 $|0, 0\rangle$ 、 $|1, 0\rangle$ 、 $|0, 1\rangle$ 、 $|1, 1\rangle$ のいずれかで記述される。ここで、励起エネルギーの大きさの関係から、 $|0\rangle = |0, 0\rangle$ 、 $|m\rangle = |1, 0\rangle$ 、 $|e\rangle = |1, 1\rangle, |1, 0\rangle$ を得る。それぞれの準位間の振動を磁束 Qubit を介して観測することによって単一光子の入射を検出できる。この方法は単一光子に対する検出感度がある。しかし複数個の光子の計数を行う時は準位数を $|0\rangle$ と $|1\rangle$ だけでなくさらに増やす必要があり、準位数を増やすことでより準位間の振動の種類が増えるため、解析が困難になると予想される。

3.4 位相 Qubit

最後に、位相 Qubit についてである。位相 Qubit は図 3.1.c のような回路で表される。この回路は交流電流源とジョセフソン接合から構成され、ハミルトニアンは

$$H = \frac{Q^2}{2C_J} - \frac{\hbar I_C}{2e} \cos \varphi - \frac{\hbar I_b}{2e} \varphi \quad (3.5)$$

と書くことができる。

3.4.1 電流バイアスされた接合部のポテンシャルエネルギー

トンネル電流 I が接合部において一様であるとし、微小時間における接合部のポテンシャルエネルギー dU を以下のようにおく。[4, 5]

$$dU = IV dt \quad (3.6)$$

を得る。ここで、 V は 2 つの超伝導体における電位差である。(2.3) および (2.5) より、

$$dU = \frac{\hbar I_C}{2e} \sin \varphi d\varphi \quad (3.7)$$

両辺積分して

$$U = -\frac{\hbar I_C}{2e} \cos \varphi + const \quad (3.8)$$

となる。バイアス電流 I_b についても同様の計算を行うことで、ポテンシャルエネルギーに対して

$$U = -\frac{\hbar I_C}{2e} \cos \varphi - \frac{\hbar I_b}{2e} \varphi \quad (3.9)$$

を得る。パルス的なバイアス電流が位相差 φ に対するポテンシャルの傾きを生じさせ、ポテンシャルに束縛されるエネルギー準位の数を知ることができる [14]。

ポテンシャル障壁の高さ (ポテンシャルの深さ) を ΔU とおくと、 ΔU は

$$\Delta U = \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{1 - \frac{I_b}{I_C}} \quad (3.10)$$

と書ける。この ΔU の範囲のポテンシャルにクーパー対は束縛される。バイアス電流が臨界電流に限りなく近づいた時、 ΔU は 0 に近づき、クーパー対は束縛されず、常伝導状態になる [15]。位相 Qubit のポテンシャルエネルギーを図 3.7 に示した。

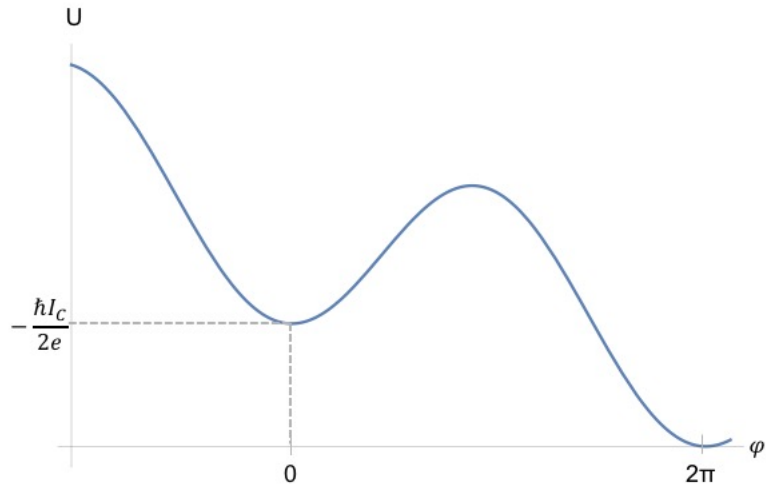


図 3.7. 位相 Qubit のポテンシャルエネルギー

3.4.2 ジョセフソンプラズマ振動

接合部では、ポテンシャルエネルギーと静電エネルギーのやりとりからプラズマ振動が生じる。この振動周波数は、

$$\omega_p = \sqrt{\frac{I_C}{4\phi_0 C_J}} \left[1 - \left(\frac{I_b}{I_C} \right)^2 \right]^{\frac{1}{4}} \quad (3.11)$$

であり、振動は障壁部分に局在する。この振動は、エネルギー準位間隔が十分小さい二準位状態では、 $|0\rangle$ と $|1\rangle$ 間の励起振周波数となる。ここで、 ϕ_0 は磁束の最小単位である磁束量子であり、以下のように定義されている。

$$\phi_0 = \frac{h}{2e} = 2.07 \times 10^{-15} \text{ [Wb]} \quad (3.12)$$

二準位状態における準安定状態 $|1\rangle$ の準位数 N は、 $N \sim \Delta U / \hbar \omega_p$ となる [14]。

3.4.3 電流バイアスされたジョセフソン接合の RSJ モデル

この節では、ジョセフソン接合の等価回路である RSJ モデルについて述べる。

理論的な電流-電圧特性を導出するために、McCumber(1968)、Stewart(1968)、Johnson(1968)らは、ジョセフソン接合の等価回路として図 3.8 のようなモデルを提案した [4, 16]。高周波下にジョセフソン接合を置くことで、前述したインダクタンス成分に流れる電流は制限されるため、インダクタンス成分を無視することができる。

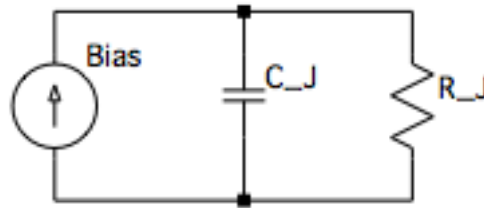


図 3.8. 電流バイアスされたジョセフソン接合の等価回路 (RSJ モデル)

ジョセフソン接合は、超伝導体-絶縁体-超伝導体というその構造から、キャパシタンス成分 C_J を含むと考えられる。また、微小な抵抗成分 R_J も含まれるとされていることから、RC 並列回路と考えられている。この時、回路に関する電流の式は

$$I = I_C \sin \varphi + \frac{V}{R_J} + C_J \frac{dV}{dt} \quad (3.13)$$

となる。ここで、 V は接合両端に生じる電位差である。(2.5) より、

$$I = I_C \sin \varphi + \frac{\hbar}{2e} \frac{1}{R} + \frac{\hbar}{2e} C \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \quad (3.14)$$

を得る。

3.4.4 巨視的量子崩壊

位相 Qubit における量子状態 $|1\rangle$ 、 $|0\rangle$ の区別は、クーパー対が存在するエネルギー準位によって区別される。クーパー対の存在するエネルギー準位によっては、巨視的量子崩壊が起きる確率が異なる。

巨視的量子崩壊とは、巨視系で粒子のトンネル効果によって準安定状態が崩壊する現象である。ポテンシャルに対する巨視的量子崩壊によるトンネル効果の概念図を、図 3.9 に表した。基底状態のトンネル効果は、暗電流によるものである。励起状態、基底状態のエネルギー準位におけるクーパー対のトンネル確率をそれぞれ Γ_1 、 Γ_0 とすると 2 つのトンネル確率は $\Gamma_1/\Gamma_0 \sim 1000$ ほど異なる [14]。本研究では、まずマイクロ波の照射によってクーパー対の励起及びトンネル効果を起こし、次にトンネル効果による電流の増大を高精度で測定することで、照射したマイクロ波の光子数を計数することができるのではないかと考えた。

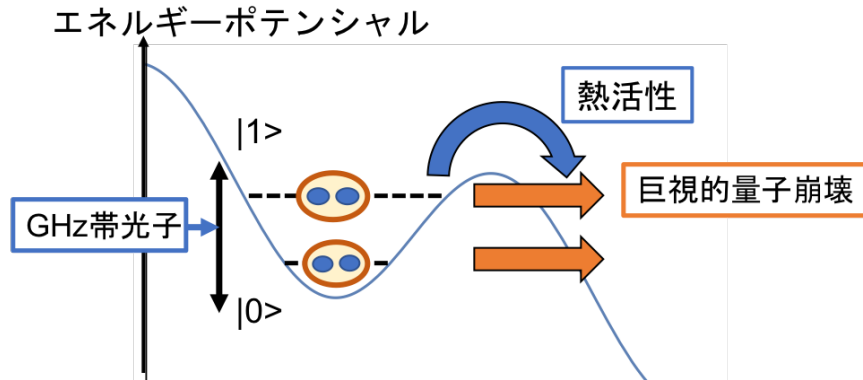


図 3.9. トンネル効果の概念図。簡単のため、バイアス電流はエネルギー準位の数に2つになるように設定したとする。 $|0\rangle$ はポテンシャルに束縛されたクーパー対の基底状態のエネルギー準位、 $|1\rangle$ は励起状態、すなわち準安定状態のエネルギー準位である。橙色の矢印はそれぞれの準位におけるクーパー対のトンネルを表していてこの反応は主に低温域で起きる。一方、高温域では青い矢印のようにクーパー対が熱活性によってポテンシャル障壁を飛び越えてしまうことがある。

ここで、巨視的量子崩壊と区別しておきたいのが、高温領域で発生する熱活性による電流である。巨視的量子崩壊が低温域で支配的なことに対して、高温領域では熱揺らぎによって、粒子がポテンシャル障壁をトンネルすることなく乗り越えてしまうことで電流が発生する。その概念図を図 3.9 に示している。熱活性が起きる温度と巨視的量子崩壊が起きる温度の境界 (クロスオーバー温度) は約 1 [K] である [15]。したがって、巨視的量子崩壊によるトンネル効果を観測するために、本研究では 1 [K] より十分低い温度下で実験を行うことを前提としている。

3.4.5 ジョセフソン効果の I-V 特性

ジョセフソン接合の I-V 特性を図 3.10 に示す [16, 17]。無バイアスの状態では、電圧降下無しで直流ジョセフソン電流が流れる。直流ジョセフソン電流は臨界電流以下の量が流れるが、直流ジョセフソン電流を臨界電流に近い値に維持したままマイクロ波入射によるクーパー対のトンネル効果が起きた時、ギャップエネルギーに相当する電位差 (Δ/e) の飛びが確認される。このギャップエネルギーに相当する電位差をギャップ電圧と呼ぶ。電位差の飛びが確認された後、I-V 特性は常伝導状態に切り替わる。常伝導状態から再び超伝導状態に戻る時は、ギャップ電圧付近で電流が急激に減少し、その後電圧変化に対して緩やかに電流が減少する。ギャップ電圧の飛びが起きる際、バイアス電流によって決定された準安定状態の数に応じて直流ジョセフソン電流の最大値が決定する。

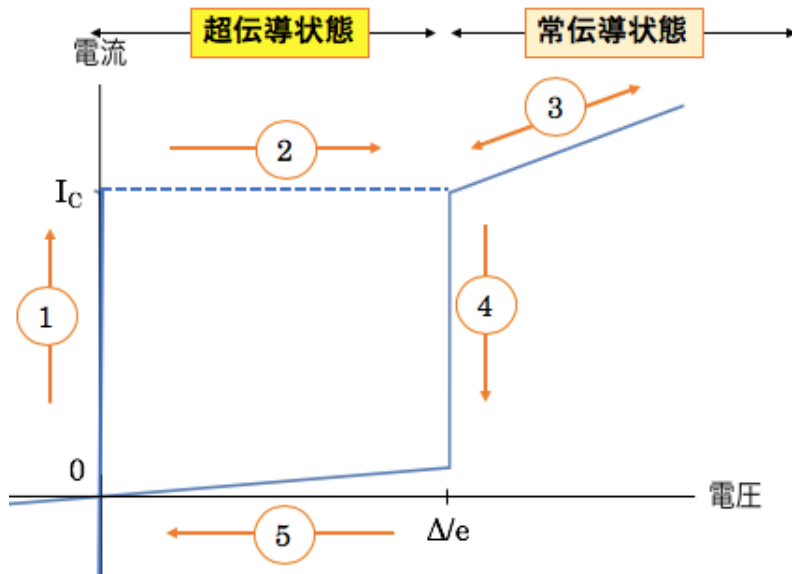


図 3.10. ジョセフソン接合の I-V 特性。青色の線が I-V 特性を表している。青色の破線はマイクロ波が入射した時のトンネル効果による電位差の飛びを表している。橙色の矢印はジョセフソン接合が超伝導状態から常伝導状態に転移した後、再び超伝導状態に転移する過程を示している。

3.4.6 位相 Qubit による計数法

この節では位相 Qubit による光子計数法について述べるとともに、3.3.1 節で述べた Λ システムによる光子計数法との比較を行う。計数するための基本回路を図 3.11 に示した [18]。

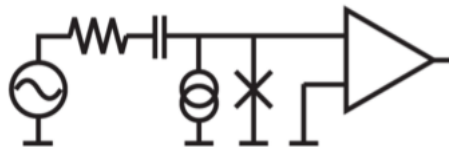


図 3.11. 位相 Qubit の光子計数回路 (1 素子)。

引用:Y.-F. Chen et al.Physical Review Letters.107.217401 (2011)

左の交流電圧源がマイクロ波信号源に相当する。入力された信号によってジョセフソン接合中でクーパー対のトンネル効果が起き、その際のトンネル電流の増大を増幅機で増幅している。

この素子を複数個並列することによる光子計数法の回路が図 3.12 である。ここで、二つの並列したジョセフソン接合のそれぞれのトンネル電流の増大を観測する。それぞれのジョセフソン接合のクーパー対が励起した確率及びそれぞれの接合で起きたトンネル効果の時差の相関から、マイクロ波光子を計数を行なっている。

この計数法では、回路に含まれる熱的な励起のノイズが統計による予想値とに完全には一致していないため、回路内で光子を生成してしまう可能性がある。したがって、 Λ システムと比較し

て単一光子の検出精度は劣っている。一方で、 Λ システムは単一光子の検出は可能だが、複数個の光子の検出に対しては解析が困難である。位相 Qubit を用いた計数法では複数個の検出に対しても 3.4.2 節より、バイアス電流によってポテンシャルに束縛された準安定状態の粒子数の上限を制御することができるため、計数可能である光子数の範囲が Λ システムより広いと見込まれる。また、位相 Qubit を用いた計数法は磁束 Qubit それぞれに共振器を結合する Λ システムと比較して回路の構造が単純であるため図 3.12 のようにアレイ化することが可能であるように思われる。

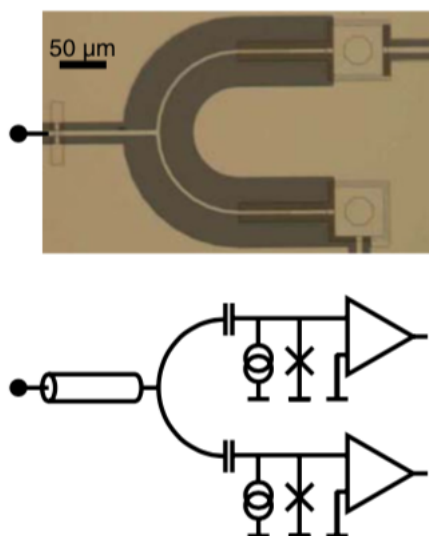


図 3.12. 位相 Qubit の光子計数回路 (2 素子)

引用:Y.-F. Chen et al.Physical Review Letters.107.217401 (2011)

上図が実際の回路の電子顕微鏡写真、下図がその回路図である。上図の回路における、右側の円状の部分がジョセフソン接合である。

謝辞

卒業論文の作成にあたり、お世話になった方々に深く感謝申し上げます。

まず、多くの助言をいただきました、本間先生、杉立先生、志垣先生、三好先生に深く感謝申し上げます。杉立先生には、研究室内での進捗発表で卒業研究に関する様々な助言を頂きました。志垣先生には4年前期に基本的な研究技術などについて指導して頂きました。三好先生には、4年前期に研究室のセミナーで原子核理論について指導して頂きました。そして、研究室同期の皆様をはじめ、クォーク物理学研究室の皆様には大変お世話になりました。毎日夜遅くまで頑張っている皆様の姿に刺激をもらい、時には相談に乗ってもらいながら一緒に頑張ることができました。ありがとうございました。

最後に、半年間に渡って、手厚い指導をしてくださった本間謙輔先生に深く感謝申し上げます。お忙しい中、卒業論文指導の時間を何度もつくっていただき、丁寧に指導してくださいました。テーマを決定するときから執筆まで、方針や課題をその都度一緒に考えてくださいました。本間先生の指導がなければ、この卒業論文は完成できなかったと思っております。本当にありがとうございました。

卒業論文を執筆するにあたって、多くの人に支えられ、一緒に頑張る仲間がいることの大切さを実感しました。執筆に携わってくださったすべての方々に感謝の意を示し、謝辞といたします。

参考

- [1] L. Rosenberg : 特集『暗黒物質の正体』, 日経サイエンス 第48巻 第5号 (2018).
- [2] 鶴 剛 : 宇宙物理入門 講義資料 第4章 輻射の物理の基礎とブラックボディ, http://www-cr.scphys.kyoto-u.ac.jp/member/tsuru/data/lecture/AstrophysIntro2017_pdf/Section4_v0.pdf
- [3] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J.R. Schrieffer: Theory of Superconductivity, Physical Review.108.5 (1957).
- [4] A.Barone,G.Paterno, 太田 浩, 山下 努 : 『ジョセフソン効果の物理と応用』, 近代科学社 (1988).
- [5] John M.Martinis, and Kevin Osborne: Superconducting Qubits and the Physics of Josephson Junctions, Cornell University(2004).
- [6] A. J. Berkley, H. Xu, R. C. Ramos, M. A. Gubrud, F. W. Strauch, P. R. Johnson, J. R. Anderson, A. J. Dragt, C. J. Lobb, and F. C. Wellstood : Entangled Macroscopic Quantum States in Two Superconducting Qubits, Science.300.1548 (2003).
- [7] M. H. Devoret, A. Wallraff, and J. M. Martinis : Superconducting Qubits: A Short Review, Cornell University(2004).
- [8] 児玉 高明 : 修士論文『Josephson charge qubit を用いた量子コヒーレンスの実験』, 東京大学 (2010).
- [9] 株式会社東芝 : asta muse 技術「光学装置」, <https://astamuse.com/ja/published/JP/No/1999004017>.
- [10] 高木 伸 : 新物理学選書『巨視的トンネル現象』, 岩波書店 (1997).
- [11] K. Inomata, Z. R. Lin, K. Koshino, W. D. Oliver, J. S. Tsai, T. Yamamoto, and Y. Nakamura: Single microwave-photon detector using an artificial Λ -type three-level system, Nature Commun. 7. 12303 (2016).
- [12] K. Koshino, K. Inomata, T. Yamamoto, and Y. Nakamura : Implementation of an impedance-matched Λ system by dressed-state engineering, Physical Review Letters. 111. 153601 (2013).

- [13] A. Opremcak, I. V. Pechenezhskiy, C. Howington, B. G. Christensen, M. A. Beck, E. Leonard Jr., J. Suttle, C. Wilen, K. N. Nesterov, G. J. Ribeill, T. Thorbeck, F. Schlenker, M. G. Vavilov, B. L. T. Plourde, and R. McDermott : Measurement of a superconducting qubit with a microwave photon counter, *Science*.361.6408 (2018).
- [14] Guillermo Romero, Juan Jose Garcia-Ripoll, and Enrique Solano : Photodetection of propagating quantum microwaves in circuit QED, *Physica Scripta*.T 137. 014004 (2009).
- [15] 門脇 和男 : 『超伝導磁束状態の物理』, 裳華房 (2017).
- [16] T. A. Fulton and L. N. Dunkleberger : Lifetime of the zero-voltage state in Josephson tunnel junctions, *Physical Review B*.9.4760 (1974).
- [17] R. C. Jaklevic, J. Lambe, J. E. Mercereau, and A. H. Silver : Macroscopic Quantum Interference in Superconductors, *Physical Review*. 140. A1628(1965).
- [18] Y.-F. Chen, D. Hover, S. Sendelbach, L. Maurer, S. T. Merkel, E. J. Pritchett, F. K. Wilhelm, and R. McDermott : Microwave Photon Counter Based on Josephson Junctions, *Physical Review Letters*.107.217401 (2011).
- [19] 内藤 喜之 : 『マイクロ波・ミリ波工学』, コロナ社 (1986).
- [20] 大沼 俊朗 : 『超伝導電磁気学』, コロナ社 (1995).
- [21] John M. Martinis, S. Nam, and J. Aumentado : Rabi Oscillations in a Large Josephson-Junction Qubit, *Physical Review Letters*.89.117901 (2002).
- [22] R.W. Simmonds, K. M. Lang, D. A. Hite, S. Nam, D. P. Pappas, and John M. Martinis : Decoherence in Josephson Phase Qubits from Junction Resonators, *Physical Review Letters*.93.077003 (2004).
- [23] K. B. Cooper, Matthias Steffen, R. McDermott, R.W. Simmonds, Seongshik Oh, D. A. Hite, D. P. Pappas, and John M. Martinis : Observation of Quantum Oscillations between a Josephson Phase Qubit and a Microscopic Resonator Using Fast Readout, *Physical Review Letters*.93.180401 (2004).
- [24] John M. Martinis, K. B. Cooper, R. McDermott, Matthias Steffen, Markus Ansmann, K. D. Osborn, K. Cicak, Seongshik Oh, D. P. Pappas, R. W. Simmonds, and Clare C. Yu : Decoherence in Josephson Qubits from Dielectric Loss, *Physical Review Letters*.95.210503 (2005).
- [25] Matthias Steffen, M. Ansmann, R. McDermott, N. Katz, Radoslaw C. Bialczak, Erik Lucero, Matthew Neeley, E. M. Weig, A. N. Cleland, and John M. Martinis : State Tomography of Capacitively Shunted Phase Qubits with High Fidelity, *Physical Review Letters*.97.050502 (2006).
- [26] M. W. Cromar, and P. Carelli : Low-noise tunnel junction dc SQUID's, *Applied Physics Letters*. 38, 723 (1981).

- [27] R. F. Bradley: Cryogenic, low-noise, balanced amplifiers for the 300-1200 MHz band using heterostructure field-effect transistors, Nuclear Physics B (Proc. Suppl.) 72 (1999).
- [28] Michael Muck, Marc-Olivier Andre, John Clarke, Jost Gail, and Christoph Heiden: Radio-frequency amplifier based on a niobium dc superconducting quantum interference device with microstrip input coupling, Applied. Physics. Letters. 72, 2885 (1998).
- [29] Marc-Olivier Andre, Michael Muck, John Clarke, Jost Gail, and Christoph Heiden: Radio-frequency amplifier with tenth-kelvin noise temperature based on a microstrip direct current superconducting quantum interference device, Applied. Physics. Letters. 75, 698 (1999).
- [30] John M. Martinis, Michel H. Devoret, and John Clarke : Energy-Level Quantization in the Zero-Voltage State of a Current-Biased Josephson Junction, Physical Review Letters.55.1543 (1985).
- [31] 丹羽 雅昭 : 『超伝導の基礎』第3版, 東京電機大学出版局 (2009).
- [32] 高野 文彦 : 『多体問題』, 培風館 (1975).

付録 A ギャップエネルギーの導出

超伝導の性質の1つであるギャップエネルギーを導出した。[31, 32]

付録. 1 BCS 基底状態

まず、フェルミ面を基準にした運動量 \mathbf{k} を持つ粒子のエネルギーを $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ とおいて、ハミルトニアンを以下のように定義する。ここで、第1項を H_0 、第2項を H_1 と置いた。

$$H = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \varepsilon_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}} \sum_{\mathbf{k}\sigma} \sum_{\mathbf{k}'\sigma'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\sigma} c_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}\sigma'}^\dagger c_{\mathbf{k}'\sigma'} c_{\mathbf{k}\sigma} \quad (\text{A.1})$$

$$= H_0 + H_1 \quad (\text{A.2})$$

$c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger$ 、および $c_{\mathbf{k}\sigma}$ は電子の生成消滅演算子、 $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\sigma}$ は結合強度、 $u_{\mathbf{k}}$ 、 $v_{\mathbf{k}}$ は複素パラメータである。ここで、真空を

$$\forall \mathbf{k}, \quad c_{\mathbf{k},\sigma} |0\rangle = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$\langle 0|0\rangle = 1 \quad (\text{A.4})$$

と定義する。エネルギー期待値が変分原理より停留値を取るように複素パラメータを定めることで、基底状態のエネルギーを導出した。

$$|\Psi_{\text{BCS}}\rangle = \prod_{\mathbf{k}} (u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger) |0\rangle \quad (\text{A.5})$$

次に、 $\langle \Psi_{\text{BCS}} | \Psi_{\text{BCS}} \rangle = 1$ となるように規格化を行う。この時、生成消滅演算子について以下のような反交換関係を用いた。

$$\{c_{\mathbf{k}\sigma}, c_{\mathbf{k}'\sigma'}^\dagger\} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\sigma\sigma'} \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned}
1 &= \langle \Psi_{\text{BCS}} | \Psi_{\text{BCS}} \rangle \\
&= \left\{ \prod_{\mathbf{k}} \langle 0 | (u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{\mathbf{k}\uparrow}) \right\} \prod_{\mathbf{k}} (u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger) | 0 \rangle \\
&= \prod_{\mathbf{k}} \langle 0 | (u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{\mathbf{k}\uparrow}) (u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger) | 0 \rangle \\
&= \prod_{\mathbf{k}} \langle 0 | (u_{\mathbf{k}}^2 + v_{\mathbf{k}}^2 c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{\mathbf{k}\uparrow} c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger) | 0 \rangle \\
&= \prod_{\mathbf{k}} \langle 0 | \left\{ u_{\mathbf{k}}^2 + v_{\mathbf{k}}^2 (1 - c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{\mathbf{k}\uparrow}) (1 - c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}) \right\} | 0 \rangle \\
&= \prod_{\mathbf{k}} \langle 0 | \left\{ u_{\mathbf{k}}^2 + v_{\mathbf{k}}^2 (1 - c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow} - c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{\mathbf{k}\uparrow} - c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger c_{\mathbf{k}\uparrow} c_{-\mathbf{k}\downarrow}) \right\} | 0 \rangle \\
&= \prod_{\mathbf{k}} \langle 0 | (u_{\mathbf{k}}^2 + v_{\mathbf{k}}^2) | 0 \rangle \\
&= \prod_{\mathbf{k}} (u_{\mathbf{k}}^2 + v_{\mathbf{k}}^2)
\end{aligned} \tag{A.7}$$

従って、規格化条件は以下のように求められた。

$$\forall \mathbf{k} \quad , \quad u_{\mathbf{k}}^2 + v_{\mathbf{k}}^2 = 1 \tag{A.8}$$

次に、エネルギーの期待値を求めた。

$$\begin{aligned}
E_0 &= \langle \Psi_{\text{BCS}} | H | \Psi_{\text{BCS}} \rangle \\
&= \langle \Psi_{\text{BCS}} | H_0 | \Psi_{\text{BCS}} \rangle + \langle \Psi_{\text{BCS}} | H_1 | \Psi_{\text{BCS}} \rangle
\end{aligned} \tag{A.9}$$

第1項は、以下のように計算できる。

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_{\text{BCS}} | H_0 | \Psi_{\text{BCS}} \rangle &= \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} \langle \Psi_{\text{BCS}} | (c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{\mathbf{k}\uparrow} + c_{\mathbf{k}\downarrow}^\dagger c_{\mathbf{k}\downarrow}) | \Psi_{\text{BCS}} \rangle \\
&= \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} \left\{ \langle \Psi_{\text{BCS}} | c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{\mathbf{k}\uparrow} | \Psi_{\text{BCS}} \rangle + \langle \Psi_{\text{BCS}} | c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow} | \Psi_{\text{BCS}} \rangle \right\} \\
&= \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} \{ v_{\mathbf{k}}^2 + v_{\mathbf{k}}^2 \} \\
&= 2 \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^2
\end{aligned} \tag{A.10}$$

第2項について計算する前に、 H_1 を展開する。

$$\begin{aligned}
H_1 &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}} \sum_{\mathbf{k}\sigma} \sum_{\mathbf{k}'\sigma'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{q}} c_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}\sigma'}^\dagger c_{\mathbf{k}'\sigma'} c_{\mathbf{k}\sigma} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{q}} (c_{\mathbf{k}'\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}'\downarrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{\mathbf{k}\uparrow} + c_{\mathbf{k}'\downarrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}'\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\uparrow} c_{\mathbf{k}\downarrow}) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{q}} (c_{\mathbf{k}'\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}'\downarrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{\mathbf{k}\uparrow} + c_{\mathbf{k}'\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}'\downarrow}^\dagger c_{\mathbf{k}\downarrow} c_{-\mathbf{k}\uparrow})
\end{aligned} \tag{A.11}$$

ここで、改めて $-\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}$ と書くことで、以下のように H_1 を導くことができる。

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{q}} (c_{\mathbf{k}'\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}'\downarrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{\mathbf{k}\uparrow} + c_{\mathbf{k}'\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}'\downarrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{\mathbf{k}\uparrow}) \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{q}} c_{\mathbf{k}'\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}'\downarrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{\mathbf{k}\uparrow} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

(A.12) を用いて、第2項を計算した。

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{\text{BCS}} | H_1 | \Psi_{\text{BCS}} \rangle &= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{q}} \langle \Psi_{\text{BCS}} | c_{\mathbf{k}'\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}'\downarrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{\mathbf{k}\uparrow} | \Psi_{\text{BCS}} \rangle \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{q}} \langle 0 | (u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{\mathbf{k}'\uparrow}) c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{\mathbf{k}\uparrow} (u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger) | 0 \rangle \\ &\quad \times \langle 0 | (u_{\mathbf{k}'} + v_{\mathbf{k}'} c_{-\mathbf{k}'\downarrow} c_{\mathbf{k}'\uparrow}) c_{\mathbf{k}'\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}'\downarrow}^\dagger (u_{\mathbf{k}'} + v_{\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}'\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}'\downarrow}^\dagger) | 0 \rangle \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{q}} \langle 0 | u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} | 0 \rangle \times \langle 0 | u_{\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}'} | 0 \rangle \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{q}} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}'} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

(A.10)、(A.13) より、BCS 基底状態のエネルギー期待値は

$$E_0 = 2 \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^2 + \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{q}} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}'} \quad (\text{A.14})$$

となる。次に、変分原理を用いて BCS 基底状態のエネルギー期待値 E_0 が最小になるように $u_{\mathbf{k}}$ 、 $v_{\mathbf{k}}$ が満たす条件を決定する。

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial E_0}{\partial v_{\mathbf{k}}} \\ &= \frac{\partial}{\partial v_{\mathbf{k}}} \left\{ 2 \sum_{\mathbf{k}'} \varepsilon_{\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}'}^2 + \sum_{\mathbf{k}'} \sum_{\mathbf{k}''} V_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''\mathbf{q}} u_{\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}''} v_{\mathbf{k}''} \right\} \\ &= 4v_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} + 2 \sum_{\mathbf{k}''} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}''\mathbf{q}} u_{\mathbf{k}''} v_{\mathbf{k}''} \left(-\frac{v_{\mathbf{k}}^2}{u_{\mathbf{k}}} + u_{\mathbf{k}} \right) \end{aligned}$$

ここで、 Δ 、 $E_{\mathbf{k}}$ を

$$\Delta = \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{q}} u_{\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}'} \quad , \quad E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\varepsilon_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2} \quad (\text{A.15})$$

とおく。(A.15)、(A.8) より、

$$u_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2} \pm \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}}}{2E_{\mathbf{k}}} \quad , \quad v_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2} \mp \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}}}{2E_{\mathbf{k}}} \quad (\text{A.16})$$

$\varepsilon_{\mathbf{k}}$ は土の符号を持つので、ここでは $u_{\mathbf{k}}$ 、 $v_{\mathbf{k}}$ の条件を以下のように求めた。

$$u_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} \right) \quad , \quad v_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} \right) \quad (\text{A.17})$$

(A.15)、(A.17) より、

$$\Delta = \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{q}} \left(-\frac{\Delta}{2E_{\mathbf{k}'}} \right) \quad (\text{A.18})$$

この式は、超伝導におけるギャップ方程式と呼ばれている。ここで、結合強度 $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{q}}$ は微小空間のみで値を持つため、以下のように仮定する。ここで、デバイ振動数を ω_D と定義した。

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{q}} = \begin{cases} -V & (|\varepsilon_{\mathbf{k}}| < \hbar\omega_D) \\ 0 & (|\varepsilon_{\mathbf{k}}| > \hbar\omega_D) \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

したがって、ギャップ方程式について、以下のように定義する。

$$\begin{aligned} \Delta &= V \sum_{|\varepsilon| < \hbar\omega_D} \frac{\Delta}{2E_{\mathbf{k}'}} \\ &\equiv V \sum'_{\mathbf{k}'} \frac{\Delta}{2E_{\mathbf{k}'}} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

ここでは \sum' は $|\varepsilon_{\mathbf{k}}| < \hbar\omega_D$ の範囲で和をとる。両辺を Δ で割って、

$$1 = \frac{V}{2} \sum'_{\mathbf{k}'} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{\mathbf{k}'}^2 + \Delta^2}} \quad (\text{A.21})$$

と変形することができる。状態密度を $\rho(\varepsilon)$ とおくと、

$$\sum'_{\mathbf{k}'} \rightarrow \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} \rho(\varepsilon) d\varepsilon \quad (\text{A.22})$$

と書くことができるが、フェルミエネルギーを ε_F とすると、 $\varepsilon_F \gg \hbar\omega_D$ より、 $\rho(\varepsilon) \rightarrow \rho(\varepsilon_F)$ と書ける。

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{V}{2} \rho(0) \int_{\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2}} \\ &= \rho(0) V \sinh^{-1} \left(\frac{\hbar\omega_D}{\Delta} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

したがって、 Δ は、

$$\Delta = \frac{\hbar\omega_D}{\sinh^{-1}(1/\rho(0)V)} \quad (\text{A.24})$$

と導くことができる。

付録. 2 励起状態

Bogoliubov 変換を導入する。

Bogoliubov 変換

$$\begin{aligned}
 \alpha_{\mathbf{k}\uparrow} &= u_{\mathbf{k}}c_{\mathbf{k}\uparrow} - v_{\mathbf{k}}c_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger} \\
 \alpha_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} &= u_{\mathbf{k}}c_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} - v_{\mathbf{k}}c_{-\mathbf{k}\downarrow} \\
 \alpha_{-\mathbf{k}\downarrow} &= u_{\mathbf{k}}c_{-\mathbf{k}\downarrow} + v_{\mathbf{k}}c_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} \\
 \alpha_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger} &= u_{\mathbf{k}}c_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger} + v_{\mathbf{k}}c_{\mathbf{k}\uparrow}
 \end{aligned} \tag{A.25}$$

ここで、反交換関係を計算した。

$$\left\{ \alpha_{\mathbf{k}\uparrow}, \alpha_{\mathbf{k}'\uparrow}^{\dagger} \right\} = \left\{ \alpha_{-\mathbf{k}\downarrow}, \alpha_{-\mathbf{k}'\downarrow}^{\dagger} \right\} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \tag{A.26}$$

$$\left\{ \alpha_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger}, \alpha_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} \right\} = \left\{ \alpha_{\mathbf{k}\uparrow}, \alpha_{\mathbf{k}\uparrow} \right\} = 0 \tag{A.27}$$

Bogoliubov 変換を行った上での真空を $|\Psi\rangle$ とおく。

ここで、 $|\Psi\rangle = \prod_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}\uparrow} \alpha_{-\mathbf{k}\downarrow} |0\rangle$ と仮定すると、

$$\alpha_{\mathbf{k}\uparrow} |\Psi\rangle = 0 \tag{A.28}$$

と導くことができるので、確かに $|\Psi\rangle$ は Bogoliubov の真空状態である。また、

$$\begin{aligned}
 |\Psi\rangle &= \prod_{\mathbf{k}} (u_{\mathbf{k}} + c_{\mathbf{k}\uparrow} - v_{\mathbf{k}}c_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger})(u_{\mathbf{k}}c_{-\mathbf{k}\downarrow} + v_{\mathbf{k}}c_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger}) |0\rangle \\
 &= \prod_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}(u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}}c_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger}c_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger}) |0\rangle \\
 &= |\Psi_{\text{BCS}}\rangle
 \end{aligned} \tag{A.29}$$

と導くことができる。1 粒子励起状態を $|\Psi_{\mathbf{k}}\rangle$ とすると、

$$\begin{aligned}
 |\Psi_{\mathbf{k}}\rangle &= \alpha_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} |\Psi_{\text{BCS}}\rangle \\
 &= c_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} \prod_{\mathbf{k}' \neq \mathbf{k}} (u_{\mathbf{k}'} + v_{\mathbf{k}'}c_{\mathbf{k}'\uparrow}^{\dagger}c_{-\mathbf{k}'\downarrow}^{\dagger}) |0\rangle
 \end{aligned} \tag{A.30}$$

この時、2 粒子励起状態は

$$|\Psi_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\rangle = \alpha_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} \alpha_{-\mathbf{k}'\downarrow}^{\dagger} |\Psi_{\text{BCS}}\rangle = c_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} c_{-\mathbf{k}'\downarrow}^{\dagger} \prod_{\mathbf{k}'' \neq \mathbf{k}, \mathbf{k}'} (u_{\mathbf{k}''} + v_{\mathbf{k}''}c_{\mathbf{k}''\uparrow}^{\dagger}c_{-\mathbf{k}''\downarrow}^{\dagger}) |0\rangle \tag{A.31}$$

と書くことができるので、励起状態のエネルギーは、

$$H_{red} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \varepsilon_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma} - V \sum_{\mathbf{k}} \sum'_{\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}'\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}'\downarrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{\mathbf{k}\uparrow} \quad (\text{A.32})$$

$$\begin{aligned} E &= \langle \Psi_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} | H_{red} | \Psi_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \rangle \\ &= \sum_{l\sigma} \varepsilon_l \langle \Psi_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} | c_{l\sigma}^\dagger c_{l\sigma} | \Psi_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \rangle - V \sum_l \sum'_{l'} \langle \Psi_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} | c_{l'\uparrow}^\dagger c_{-l'\downarrow}^\dagger c_{-l\downarrow} c_{l\uparrow} | \mathbf{k}\mathbf{k}' \rangle \\ &= E_0 + \varepsilon_{\mathbf{k}}(1 - 2v_{\mathbf{k}}^2) + \varepsilon_{\mathbf{k}'}(1 - 2v_{\mathbf{k}'}^2) + 2V(u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}} + u_{\mathbf{k}'}v_{\mathbf{k}'}) \sum_l' u_l v_l \\ &= E_0 + \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2}{E_{\mathbf{k}}} + \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}'}^2 + \Delta^2}{E_{\mathbf{k}'}} \\ &= E_0 + E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}'} \quad (\text{A.33}) \end{aligned}$$

と求められる。したがって、運動量 \mathbf{k} および \mathbf{k}' の電子を励起するためには $E_{\mathbf{k}}$ 、 $E_{\mathbf{k}'}$ のエネルギーが必要になり、このエネルギーは (A.15) より、必ず Δ より大きい。したがって、 Δ はエネルギーギャップと呼ばれ、超伝導の様々な性質に関係している。