

2015 年度 卒業論文

非一様密度場におけるケルビン・ヘルムホルツ

不安定性の二次元シミュレーション

2015 年 2 月 10 日

広島大学理学部物理科学科

クォーク物理学研究室

上浦 昌彦

指導教員 杉立 徹 教授

主査 三好 隆博 助教

副査 小畷 康史 教授

要旨

様々な自然現象において渦構造は普遍的に観測される。潮流の境目で発生する渦潮はその典型例である。特に流体の速度勾配層において発生するケルビン・ヘルムホルツ不安定は、最も基礎的かつ重要な渦の形成機構である。ケルビン・ヘルムホルツ不安定性の本質的な機構は、速度勾配層における速度場の擾乱が圧力勾配を生成し、その圧力勾配が擾乱をさらに成長させることにある。一方、擾乱が大きく成長した非線形段階では、特に強い非一様密度場において2次的不安定性が励起され、強い乱流に発達することが近年の研究により示されてきた。しかし、ケルビン・ヘルムホルツ不安定性の非線形ダイナミクスに対する密度場構造の影響は未だ十分には理解されていない。そこで本研究では、様々な密度場構造のもとでケルビン・ヘルムホルツ不安定性の高精度二次元流体シミュレーションを実行し、ケルビン・ヘルムホルツ不安定性の非線形ダイナミクスに対する密度場の非一様性の影響を考察した。

目次

第1章 序論

第2章 基本原理

2.1 完全流体

2.1.1 基礎方程式

2.1.2 まとめ

2.2 ベルヌーイの定理

2.2.1 定理の導出

2.2.2 まとめ

2.3 ケルビンの循環定理

2.4 ヘルムホルツの渦定理

2.5 ケルビン・ヘルムホルツ不安定性

第3章 方法

3.1 有限体積法

3.2 HLL 法

3.3 HLLC 法

第4章 結果・考察

第5章 結論

参考文献

第1章 序論

流体力学において、ケルビン・ヘルムホルツ不安定は最も基礎的で重要な渦の形成機構で様々な観測、研究が行われてきた。

観測されているものの中には海流の速度差によって生じる渦潮（図1）や、宇宙ジェットのコブ（図2）、木星表面（図3）でのケルビン・ヘルムホルツ不安定など海上や惑星など地球内外を問わずいたるところで観測できる。

これまでの理論的研究によって、対流マッハ数の増加に伴いケルビン・ヘルムホルツ不安定性の線形成長率が減少することが指摘されてきた[1]。また、近年の高精度数値シミュレーションにより、非一様密度場中において強い乱流が発達することが明らかになった[2]。しかし、非一様密度場におけるケルビン・ヘルムホルツ不安定性の非線形ダイナミクスには明らかになっていない点が多くある。

そこで本論文では、流体の密度分布に着目し、ケルビン・ヘルムホルツ不安定性が様々な密度分布に対してどのように振舞うのかを高精度流体シミュレーションを用いて観測することで、非一様密度場におけるケルビン・ヘルムホルツ不安定性の形成機構に関する理解を深めることを目的とする。

本論文の構成として、第2章で流体力学に関する基礎的な方程式、ケルビン・ヘルムホルツ不安定の発生機構を導き、第3章で用いるプログラムの簡単な説明を行い、第4章で結果、考察をまとめ、第5章で結論をまとめる。



図1 海流の速度差によって海面上で引き起こされた渦潮[3]

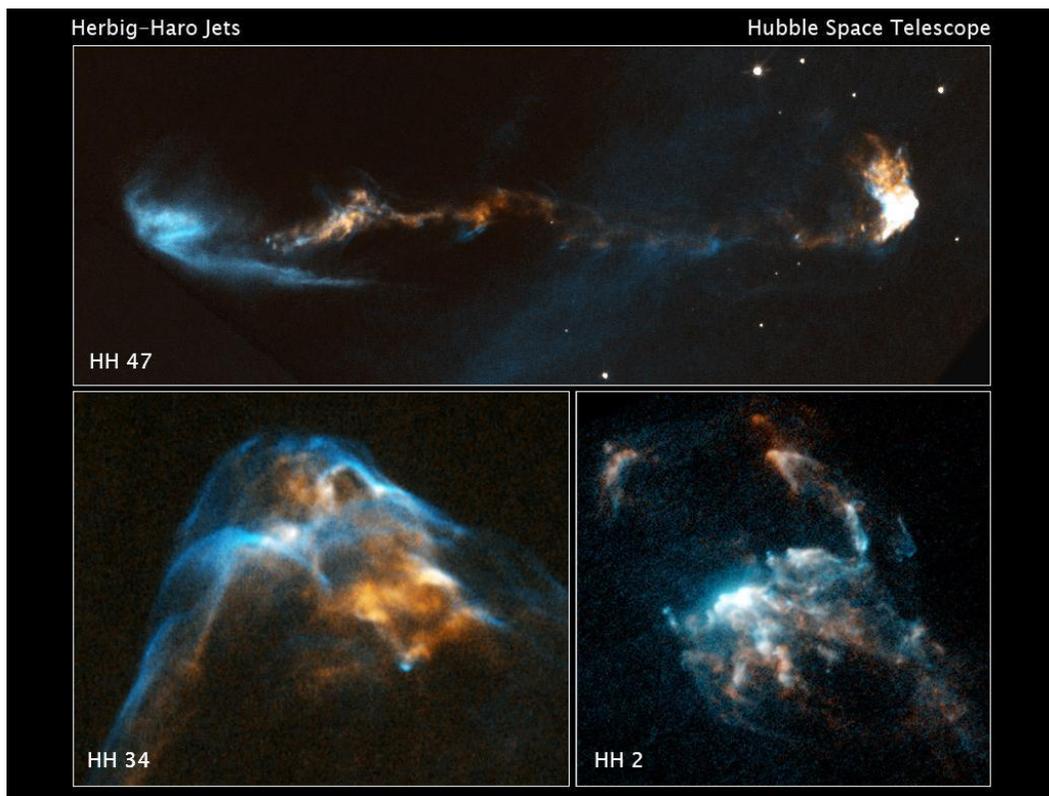


図 2 宇宙ジェットのコブの生成メカニズムがケルビン・ヘルムホルツ不安定性によるものが見られている[4]



図 3 木星大気中の擾乱[5]

第2章 基本原理

2.1 完全流体

完全流体（理想流体、非粘性流体）とは粘性を考慮しない、粘性を持つ実在の流体を単純化したものである。

2.1.1 基礎方程式

基礎方程式として、連続の式、運動方程式、エネルギー方程式、流体の状態方程式の4つの基礎方程式を導く[6]。

空間に固定された閉曲面 S をとり、その面要素の面積を dS 、閉曲面 S の外向きの法線ベクトルを \mathbf{n} 、流体の速度を \mathbf{v} 、密度を ρ とし、閉曲面 S で囲まれた空間の体積を V 、体積要素を dV で表すとする。 S で囲まれた流体に対して質量保存の法則を適用すると、単位時間あたりの V の変化量は

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV$$

で表されるので、単位時間に S を通過し、 V に流入する流体の質量

$$- \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$$

と等しくなる。よって

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$$

と書くことができる。Gauss の定理を適用すると

$$\int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dV$$

となるので、上式は

$$\int_V \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right\} dV = 0$$

と書ける。閉曲面 S は任意に決定できるので、上式が成り立つためには

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

が必要十分であり、この式を連続の式という。

連続の式同様に、閉曲面 S で囲まれた流体に対して運動量保存の法則を適用する。単位時間あたりの V 内での流体の運動量の時間変化は

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV$$

と書ける。流体粒子には面積力と体積力が働くので、単位面積当たりの力を面要素 dS に対する方向を考慮し $\mathbf{P}(\mathbf{n})$ 、単位質量当たりの流体粒子に働く力を \mathbf{F} とすると、 S における面積力の力積は

$$\int_S \mathbf{P}(\mathbf{n}) dS$$

V 内の流体に働く体積力の力積は

$$\int_V \rho \mathbf{F} dV$$

と表さる。これに単位時間あたりに S を通る運動量の流入量

$$- \int_S (\rho \mathbf{v}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$$

を加えたものが単位時間あたりの V 内での流体の運動量の時間変化になるので

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = - \int_S (\rho \mathbf{v}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS + \int_S \mathbf{P}(\mathbf{n}) dS + \int_V \rho \mathbf{F} dV$$

となる。また、面積力を $\mathbf{P}(\mathbf{n}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{n} = p_{ij} n_j \mathbf{e}_i$ 、 i 方向の体積力を F_i とし、和の規約を用いて表すと

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV = - \int_S \rho v_i v_j n_j dS + \int_S p_{ij} n_j dS + \int_V \rho F_i dV$$

と書ける。ここでガウスの定理より右辺第一項、二項はそれぞれ

$$- \int_S \rho v_i v_j n_j dS = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) dV$$

$$\int_S p_{ij} n_j dS = \int_V \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} dV$$

と書けるので

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV = - \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) dV + \int_V \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} dV + \int_V \rho F_i dV$$

と表すことができる。また、連続の式同様に V を任意に決定できるように

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} (p_{ij} - \rho v_i v_j) + \rho F_i$$

が成立する必要がある。この方程式を**運動方程式**という。ここで、粘性のない完全流体であることを仮定すると流体に働く応力は圧力のみなので応力 p_{ij} はクロネッカーのデルタを用いて

$$p_{ij} = -p\delta_{ij}$$

$$\delta = \begin{cases} 1(i=j) \\ 0(i \neq j) \end{cases}$$

と表せられるので、運動方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j + p\delta_{ij}) = \rho F_i$$

と書ける。これを**完全流体の運動方程式**という。

同様に S で囲まれた流体に対してエネルギー保存則を適用する。面 S での流体の全エネルギーの単位時間当たりの変化量は、単位体積あたりの運動エネルギーを $\frac{1}{2}\rho v^2$ 、単位質量あたりの内部エネルギーを U とすると

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + U \right) dV$$

で表され、単位時間あたりに流入する全エネルギー

$$- \int_S \rho \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + U \right) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS$$

単位時間に単位面積を通る熱量を表す熱量ベクトルを $\boldsymbol{\theta}$ とすると熱量の流入量

$$- \int_S (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}) dS$$

面積力、体積力がする仕事はそれぞれ

$$\int_S (\mathbf{P}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}) dS$$

$$\int_V \rho (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) dV$$

で表されるので、

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_V \rho \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + U \right) dV \\ &= - \int_S \rho \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + U \right) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS - \int_S (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_S (\mathbf{P}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}) dS \\ &+ \int_V \rho (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) dV \end{aligned}$$

和の規約を用いると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + U \right) dV \\ = - \int_S \rho \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + U \right) (v_i n_i) dS - \int_S (\theta_i n_i) dS + \int_S (p_{ij} n_i v_j) dS \\ + \int_V \rho F_i v_i dV \end{aligned}$$

同様にガウスの定理を用いて、右辺第二項、三項をそれぞれ

$$\begin{aligned} - \int_S (\theta_i n_i) dS &= \int_V \frac{\partial \theta_i}{\partial x_i} \\ \int_S (p_{ij} n_i v_j) dS &= \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} (p_{ij} v_j) dV \end{aligned}$$

と変形すると、

$$\frac{d}{dt} \left\{ \rho \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + U \right) \right\} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ p_{ij} v_j - \rho \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + U \right) v_i - \theta_i \right\} + \rho F_i v_i$$

が成り立つ。これを**エネルギー方程式**という。

ここで、内部エネルギーや密度、圧力等の熱力学的な量は**状態方程式**によって関係づけられる。特に、理想気体においては、

$$U = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)}$$

が成り立つ。ただし、 γ は比熱比である。

2.1.2 まとめ

完全流体の運動を支配する基礎方程式を以下にまとめる。ただし、外力は無視する。

運動方程式

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + p \mathbf{I}) = 0$$

エネルギー方程式

$$\frac{d}{dt} \left\{ \rho \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + U \right) \right\} + \text{div} \left\{ \rho \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + U \right) \mathbf{v} + p \mathbf{v} \right\} = 0$$

理想気体の状態方程式

$$U = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)}$$

ただし、 \mathbf{I} は単位行列を示す。これらの方程式系は**オイラー方程式**と呼ばれる。

2.2 ベルヌーイの定理

この節では、完全流体における流体の速さ、圧力および外力の関係について検討する。

前節で導出した運動方程式は、連続の式を用いて、

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \mathbf{F}$$

と書き換えられる。ここで、

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad}$$

は流体粒子にのった系での時間変化率を示すラグランジュ微分である。ベクトル恒等式

$$\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} = \frac{1}{2} \text{grad}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \text{grad})\mathbf{v}$$

を用いて上式をさらに書き換えると、

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \mathbf{F} - \frac{1}{2} \text{grad } v^2 + \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}$$

となる。また、密度が圧力の関数として与えられるバロトロピー流体においては、圧力関数を

$$P = \int_p \frac{dp}{\rho}$$

と定義すると

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{F} - \text{grad} \left(P + \frac{1}{2} v^2 \right) + \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}$$

と表すことができる。

ここで渦なしの時の渦度を考えると、

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v} = 0$$

より、速度ポテンシャル φ を用いて

$$\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$$

となり、運動方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } \varphi &= \mathbf{F} - \text{grad} \left(P + \frac{1}{2} v^2 \right) + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} \\ \text{grad} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + P + \frac{1}{2} v^2 \right) &= \mathbf{F} \end{aligned}$$

となる。これは、流れが渦なしであるためには外力 \mathbf{F} が保存力であることを示している。このため、 \mathbf{F} のポテンシャルを Ω として

$$\mathbf{F} = -\text{grad } \Omega$$

とすると、運動方程式は積分することが可能で、

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + P + \frac{1}{2} v^2 + \Omega = F(t)$$

を得る。ここで、 $F(t)$ は時間の関数ではあるが空間的には一定の値を取る。この式を**拡張されたベルヌーイの定理**とよび、速度ポテンシャルから圧力を求める式と考えることもできるので**圧力方程式**とも呼ばれる。

次に保存場での定常流の場合を考える。定常流では流れが時間とともに変化しないので

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0$$

となり、運動方程式は

$$\mathit{grad} \left(\frac{1}{2} u^2 + P + \Omega \right) = \mathbf{u} \times \mathit{rot} \mathbf{u} = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}$$

となり、

$$\frac{1}{2} u^2 + P + \Omega = C$$

のように、一定の量が存在することを示す。

$$\mathit{grad} C = \mathbf{u} \times \mathit{rot} \mathbf{u} = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}$$

より右辺は \mathbf{u} , $\boldsymbol{\omega}$ に直行していることを表しているので、左辺の量は流線、渦線方向の成分を持たないことを意味する。つまり、流線、渦線方向の勾配、 $\mathit{grad} C = 0$ でなければならない。流線に沿った微小距離 l を用いて表すと

$$\frac{\partial C}{\partial l} = 0$$

$$C = \text{const.}$$

渦線の場合も同様にして成り立つ。よって、任意の流線とそれを通る全ての渦線によって形成される曲面に関して成り立っている。これを**ベルヌーイの定理**と呼び、この曲面を**ベルヌーイ面**と呼ぶ。

最後に、密度が一様な定常流の場合を考える。保存場での定常流同様に

$$\frac{1}{2} u^2 + P + \Omega = \text{const.}$$

ここで密度が一様なので、圧力関数 P は

$$P = \frac{p}{\rho}$$

と表され、保存外力が重力である場合は、重力加速度を g 、鉛直上向きの座標を z として

$$\Omega = gz$$

と書けるので

$$\frac{1}{2} \rho u^2 + p + \rho gz = \text{const.}$$

となる。これが一般的な**ベルヌーイの定理**である。

2.3 ケルビン循環定理

バロトロピー流体の保存力場での運動を考え、流体とともに動く任意の閉曲線 C をとり、 C に沿う循環の時間変化を考える。ここで言う循環とは速度の接線成分 v_l を C に沿って一周線積分したもので、 k_c とすると

$$k_c = \oint_C v_l ds = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$$

と表される。 C 上の点の位置を \mathbf{x} とすると、 $d\mathbf{l} = d\mathbf{x}$ なので

$$\begin{aligned} \frac{Dk_c}{Dt} &= \frac{D}{Dt} \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \oint_C \frac{D}{Dt} (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}) \\ &= \oint_C \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot d\mathbf{x} + \oint_C \mathbf{v} \cdot \frac{Dd\mathbf{x}}{Dt} \end{aligned}$$

となる。右辺第一項は前節のベルヌーイの定理で導出した運動方程式を用いると

$$\oint_C \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot d\mathbf{x} = \oint_C \left(\frac{1}{\rho} \text{grad } p + F \right) \cdot d\mathbf{x} = - \oint_C \text{grad}(P + \Omega) \cdot d\mathbf{x} = -[P + \Omega]_C = 0$$

右辺第二項も

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot \frac{Dd\mathbf{x}}{Dt} = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\left(\frac{D\mathbf{x}}{Dt}\right) = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \frac{1}{2} \oint_C dv^2 = \frac{1}{2} [v^2]_C = 0$$

となり、循環の時間変化

$$\frac{Dk_c}{Dt} = \left[\frac{1}{2} v^2 - P - \Omega \right]_C = 0$$

となる。この式の意味することは、保存力場のもとでの完全流体の運動において、流体とともに動く任意の閉曲線に沿う循環は不変であることを意味している。このことをケルビンの循環定理という。

2.4 ヘルムホルツの渦定理

流れの中に1本の曲線をとって、曲線状の各点を通る渦線を描くと曲面ができる。この曲面を渦面という。渦面上に閉曲線 C をとり、 C に沿う循環を考えると、

$$k_c = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$$

渦面の定義より

$$\boldsymbol{\omega} \perp d\mathbf{S}$$

であるので

$$k_c = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

となる。ここで、閉曲線 C が流れとともに移動し、閉曲線 C' になったとするとケルビンの循環定理より循環は不変であるので

$$k_c = \oint_{C'} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S'} \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

となる。閉曲線 C' は元の閉曲線 C を適当にとることで、面 S' 上で任意にとれるので上式が成り立つためには面 S' のいたるところで $\omega \cdot ds = 0$ でなければならない。つまり、渦面 S が流れとともに変形し、 S' になったとしても S' は渦面でなければならない。また、複数の渦線が集まって、管状をなしているとき、その渦線群の束を渦管と呼ぶが、これもまた一種の渦面とみなすことができ、流体が流れていっても1つの渦管は常に1つの渦管として保たれる。このことと、ケルビンの循環定理をあわせると、1つの渦管は1つの渦管として保たれ、渦管の強さは時間変化しない。これをヘルムホルツの渦定理という。

2.5 ケルビン・ヘルムホルツ不安定

ケルビン・ヘルムホルツ不安定は速度シア一層（速度勾配層）において発生する流体不安定である。ここでは簡単のため、 x 軸上で速度不連続面をもつ二次元安定性を考える。 $y > 0$, $y < 0$ の方向の物理量をそれぞれ下付の添え字1, 2で表し、平衡流を

$$\begin{cases} U_1 = (U_1, 0) (y > 0) \\ U_2 = (U_2, 0) (y < 0) \end{cases}$$

と与える。

まず、一様な渦層に微小振動 η を与えたときにこの擾乱が成長するかどうかを検討する。境界条件として運動学的境界条件を与える。これは流体粒子の速度の法線成分が界面速度の法線成分と一致することを要請している。両側の流体に対してこれを要請することで界面での流速の法線成分が連続的につながる。また、渦度は速度不連続面に集中していて、それ以外の領域では渦なしであるとする。これは、渦が流体とともに動くとするヘルムホルツの渦定理と符合する。

そしてもう一つ、力学的境界条件を要請する。これは界面で圧力が連続であることを要請している。まず、運動学的境界条件を考える。界面を曲線のパラメータ ξ を用いて

$$\mathbf{X}(\xi, t) = (X(\xi, t), \eta(\xi, t), t)$$

と表すと界面の運動速度はラグランジュ微分で考えると

$$\left. \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \right|_{\xi} = \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}, \eta_x \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}, \eta_t \right)$$

である。添え字付の η_x, η_t は η のそれぞれ x, t に関する偏微分を表す。界面の変形に伴う速度場の擾乱は渦なしで、その速度ポテンシャルを各領域で $\phi_j (j = 1, 2)$ とおく。

界面の形は $F = (x, y; t) = y - \eta(x, t) = 0$ と表され、その法線ベクトルは ∇F の方向を向く。

$$\nabla F = \left(-\frac{\partial \eta}{\partial x}, 1 \right) = (-\eta_x, 1)$$

領域1の外向き単位法線ベクトル \mathbf{n} は

$$\mathbf{n} = \frac{1}{(1 + \eta_x^2)^{1/2}} (-\eta_x, 1)$$

で与えられる。これらを用いて運動力学的境界条件を

$$\mathbf{n} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \Big|_{\xi} - (U_j + \nabla \varphi_j) \right) = 0$$

$$\frac{1}{(1 + \eta_x^2)^{1/2}} (-\eta_x, 1) \cdot \left\{ \left(\mathbf{i} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + \mathbf{j} \left(\eta_x \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + \eta_t \right) - \mathbf{i} U_j - \left(\mathbf{i} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right) \right) \right\} = 0$$

$$-\eta_x \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} - U_j - \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right) + \eta_x \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + \eta_t - \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} = 0$$

$$\eta_t + U_j \eta_x = -\eta_x \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} = (1 + \eta_x^2)^{1/2} (\mathbf{n} \cdot \nabla) \varphi_j \quad (\text{at } y = \eta)$$

と表す。線形安定性解析では、界面変位の振幅は波長に比べてずっと短い

$$|\eta_x| \ll 1$$

を仮定するので、

$$\eta_t + U_j \eta_x = \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \quad (\text{at } y \approx 0)$$

に帰着する。そして、初期の擾乱が有限領域のみあるとする運動学的境界条件は、全ての時間で

$$\begin{aligned} \nabla(U_1 x + \varphi_1) &\rightarrow 0 \quad (y \rightarrow -\infty) \\ \nabla(U_2 x + \varphi_2) &\rightarrow 0 \quad (y \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

これを線形化し

$$\begin{aligned} \nabla \varphi_1 &\rightarrow 0 \quad (y \rightarrow -\infty) \\ \nabla \varphi_2 &\rightarrow 0 \quad (y \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

と書ける。次に力学的境界条件を考える。2つの流れが同じ流体からできているときは界面で表面張力が働かないので、圧力はその面を通して連続でなければならない。つまり、

$$(p_1 - p_2)_{y=\eta} = 0$$

$$p_1 = p_2 \quad (y = \eta)$$

である。渦なしかつ密度一様ときのベルヌーイの定理は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + P + \frac{1}{2} v^2 + \Omega &= F(t) \\ P &= \frac{p}{\rho} \end{aligned}$$

より

$$P = \frac{p}{\rho} = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + \Omega \right) + F(t)$$

とかける。ここで、空間的にいたるところで一定の値を取る時間の任意関数 $F(t)$ を $C_j = C_j(t)$ とおくと、領域 j での圧力 p_j は速度ポテンシャル φ_j を用いて

$$\frac{p_j}{\rho} = - \left\{ \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} + \frac{1}{2} (\mathbf{U}_j + \nabla \varphi_j)^2 + \Omega \right\} + C_j(t)$$

となる。ここで C_1, C_2 は擾乱がないときに圧力が連続になるようにとる。擾乱がない場合は、界面の変位がないので、

$$\varphi_j = 0$$

このとき、領域 1, 2 それぞれで

$$\frac{p_1}{\rho} = - \left(\frac{1}{2} |\mathbf{U}_1|^2 + \Omega \right) + C_1$$

$$\frac{p_2}{\rho} = - \left(\frac{1}{2} |\mathbf{U}_2|^2 + \Omega \right) + C_2$$

$p_1 = p_2$ とすると

$$\frac{1}{2} |\mathbf{U}_1|^2 + C_1 = \frac{1}{2} |\mathbf{U}_2|^2 + C_2$$

を得る。擾乱がある場合は

$$\begin{aligned} \frac{p_1}{\rho} &= - \left\{ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{1}{2} (\mathbf{U}_1 + \nabla \varphi_1)^2 + \Omega \right\} + C_1 \\ &= - \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \frac{1}{2} (\mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{U}_1 + 2 \mathbf{U}_1 \nabla \varphi_1 + \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_1) - \Omega + C_1 \quad (\nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_1 \approx 0) \\ &= - \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \frac{1}{2} |\mathbf{U}_1|^2 - U_1 \mathbf{i} \cdot \left(\mathbf{i} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right) - \Omega + C_1 \\ &= - \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \frac{1}{2} |\mathbf{U}_1|^2 - U_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \Omega + C_1 \end{aligned}$$

同様に領域 2 でも

$$\begin{aligned} \frac{p_2}{\rho} &= - \left\{ \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \frac{1}{2} (\mathbf{U}_2 + \nabla \varphi_2)^2 + \Omega \right\} + C_2 \\ &= - \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \frac{1}{2} |\mathbf{U}_2|^2 - U_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \Omega + C_2 \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} p_1 &= p_2 \\ \frac{1}{2} |\mathbf{U}_1|^2 + C_1 &= \frac{1}{2} |\mathbf{U}_2|^2 + C_2 \end{aligned}$$

より、 $y \approx 0$ で

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \quad (y \approx 0)$$

を得る。これらの線形方程式は界面 η を x, y のフーリエ積分で表すと解くことができ、運動学的境界条件で導出した

$$\eta_t + U_j \eta_x = \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \quad (\text{at } y \approx 0)$$

より、 η が x に正弦的に依存しているとすると、やはり、 $\partial \varphi_j$ も x に正弦的に依存することになる。したがって擾乱は

$$\eta, \varphi_j \propto e^{ikx}$$

のように、各々が独立に振舞うようなフーリエ成分の重ね合わせになる。ここで k は波数ベクトルをあらわしている。界面の形を

$$\eta(x, t) = \text{Re}[e^{ikx} a(t)]$$

とおく。流体は非圧縮であるので連続の式より

$$\text{div } \mathbf{v} = 0$$

である。よって速度ポテンシャル φ_j はラプラス方程式に従い

$$\nabla^2 \varphi_j = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \varphi_j = 0$$

$\varphi_j = \Phi(y, t) e^{ikx}$ と仮定し、 $\Phi_j = e^{\lambda y}$ とすると

$$\begin{aligned} \lambda^2 \Phi_j &= k^2 \Phi_j \\ (\lambda - k)(\lambda + k) &= 0 \\ \lambda &= \pm k \end{aligned}$$

よって

$$\Phi_j = e^{\pm ky}$$

となり、重ね合わせの原理により

$$\Phi_j = A_1(t) e^{|k|y} + A_2(t) e^{-|k|y}$$

とおける。次に、同じく運動学的境界条件

$$\nabla \varphi_1 \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow -\infty)$$

より領域 1 で、 $e^{-|k|y}$ を含む項は $y \rightarrow -\infty$ で発散するので除き、

$$\Phi_1 = A_1(t) e^{|k|y} \quad (y < 0)$$

同様に、領域 2 で、 $e^{|k|y}$ を含む項は $y \rightarrow \infty$ で発散するので除き、

$$\Phi_2 = A_2(t) e^{-|k|y} \quad (y > 0)$$

よって、界面の形に合うラプラス方程式の解として

$$\varphi_1(x, y, t) = \text{Re}[e^{ikx} e^{|k|y} A_1(t)] \quad (y < \eta)$$

$$\varphi_2(x, y, t) = \text{Re}[e^{ikx} e^{-|k|y} A_2(t)] \quad (y > \eta)$$

となる。また、運動学的条件は領域 1 で

$$\eta_t + U_1 \eta_x = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \quad (y \approx 0)$$

なので、

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &= \text{Re}[e^{ikx} a(t)] \\ \varphi_1(x, y, t) &= \text{Re}[e^{ikx} e^{|k|y} A_1(t)] \quad (y < \eta) \end{aligned}$$

を用いて

$$\dot{a}(t) e^{ikx} + ikU_1 e^{ikx} a(t) = |k| e^{ikx} e^{|k|y} A_1(t)$$

となる。上付きドットは時間微分をあらわす。ここで $y \approx 0$ より

$$e^{ikx} (\dot{a}(t) + ikU_1 a(t)) = |k| e^{ikx} A_1(t)$$

$$\dot{a}(t) + ikU_1 a(t) = |k| A_1(t)$$

領域 2 でも同様にして

$$\dot{a}(t) + ikU_2 a(t) = |k| A_2(t)$$

を得る。以上より、運動学的境界条件

$$\eta_t + U_j \eta_x = \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \quad (\text{at } y \approx 0)$$

は領域 1, 2 側の界面上でそれぞれ

$$\dot{a}(t) + ikU_1 a(t) = |k|A_1(t)$$

$$\dot{a}(t) + ikU_2 a(t) = |k|A_2(t)$$

に帰着する。振幅関数を $e^{\sigma t}$ 型、 $a(t) = a(0)e^{\sigma t}$, $A_j(t) = A_j(0)e^{\sigma t}$ ととると、上式はそれぞれ

$$\begin{aligned} \sigma a + ikU_1 a &= |k|A_1 \\ \sigma a + ikU_2 a &= -|k|A_2 \end{aligned}$$

となり、ここで、力学的境界条件

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \quad (y \approx 0)$$

はラプラス方程式の解

$$\varphi_1(x, y, t) = \text{Re}[e^{ikx} e^{|k|y} A_1(t)] \quad (y < \eta)$$

$$\varphi_2(x, y, t) = \text{Re}[e^{ikx} e^{-|k|y} A_2(t)] \quad (y > \eta)$$

より

$$\begin{aligned} e^{ikx} e^{|k|y} \dot{A}_1 + U_1 i k e^{ikx} e^{|k|y} A_1 &= e^{ikx} e^{-|k|y} \dot{A}_2 + U_2 i k e^{ikx} e^{-|k|y} A_2 \\ (\dot{A}_1 + ikU_1 A_1) - (\dot{A}_2 + ikU_2 A_2) &= 0 \\ (\sigma + ikU_1)A_1 - (\sigma + ikU_2)A_2 &= 0 \end{aligned}$$

と書くことができる。

ここで

$$\begin{aligned} \sigma a + ikU_1 a &= |k|A_1 \\ \sigma a + ikU_2 a &= -|k|A_2 \end{aligned}$$

より

$$(\sigma + ikU_1)^2 a - (\sigma + ikU_2)^2 a = 0$$

となる。 $a \neq 0$ なので、両辺を a で割り、 σ に関して解くと、

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{-ik(U_1 + U_2) \pm \sqrt{-k^2(U_1 + U_2)^2 + 2k^2(U_1^2 + U_2^2)}}{2} \\ &= -\frac{ik}{2}(U_1 + U_2) \pm \frac{1}{2}|k||U| \quad (U = U_1 - U_2) \end{aligned}$$

となり、この実部が正のとき、擾乱は指数関数的に成長し、 $\text{Re}[\sigma]$ が増幅率を与える。つまり、 $\frac{1}{2}|k||U|$ が正のとき、 $\text{Re}[\sigma] > 0$ より速度不連続面をもつこの流れは線形不安定であることが結論付けられる。これをケルビン・ヘルムホルツ不安定という。ケルビン・ヘルムホルツ不安定が起こるのは、渦度の濃淡が一方向的に拡大し続けるからであり、固有関数はそれぞれ、

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{|k|}(\sigma a + ikU_1 a) \\ &= \frac{a}{|k|} \left\{ -\frac{ik}{2}(U_1 + U_2) \pm \frac{1}{2}|k||U| + ikU_1 \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{a}{2} \left(\pm |U| + i \frac{k}{|k|} U \right)$$

$$A_2 = \frac{a}{2} \left(\mp |U| + i \frac{k}{|k|} U \right)$$

を満たす。実定数 ε を用いて界面振幅を $a = -i\varepsilon e^{\sigma t}$ 、複素数 σ の実部と虚部をそれぞれ σ_r, i とおくと界面の形は

$$\eta = \varepsilon e^{\sigma_r t} \sin \theta \quad (\theta = kx + \sigma_i t)$$

とかける。

ケルビン・ヘルムホルツ不安定を視覚的に理解するために、変位 η と渦の強さの密度の関係を図4に示す。

$U_1 > U_2$ のとき、渦度は、**1** ($\eta = 0, \frac{\partial \eta}{\partial x} < 0$) から **2** ($\eta = 0, \frac{\partial \eta}{\partial x} > 0$) にむかってはきだされる。この移流は変位した部分の渦度が $\frac{\partial \eta}{\partial x} > 0$ の渦層上の任意の点に対して、負の x 方向の速度を引き起こすためである。図4の**2**のように、点に集積された渦度によって、点の周りに反時計回りの速度が引き起こされ、渦層の正弦変動の振幅を増すことで不安定を引き起こす。**2**のような点での渦度の集積と回転は共に持続し、擾乱は空間的な形を変えずに指数関数的に成長し続ける。これはすなわち、 $\text{Re}[\sigma] > 0$ を意味しており、逆に、 $\text{Re}[\sigma] < 0$ のとき、**1**、**3**での渦密度が大きく、移流によって渦度が平滑化されていく。

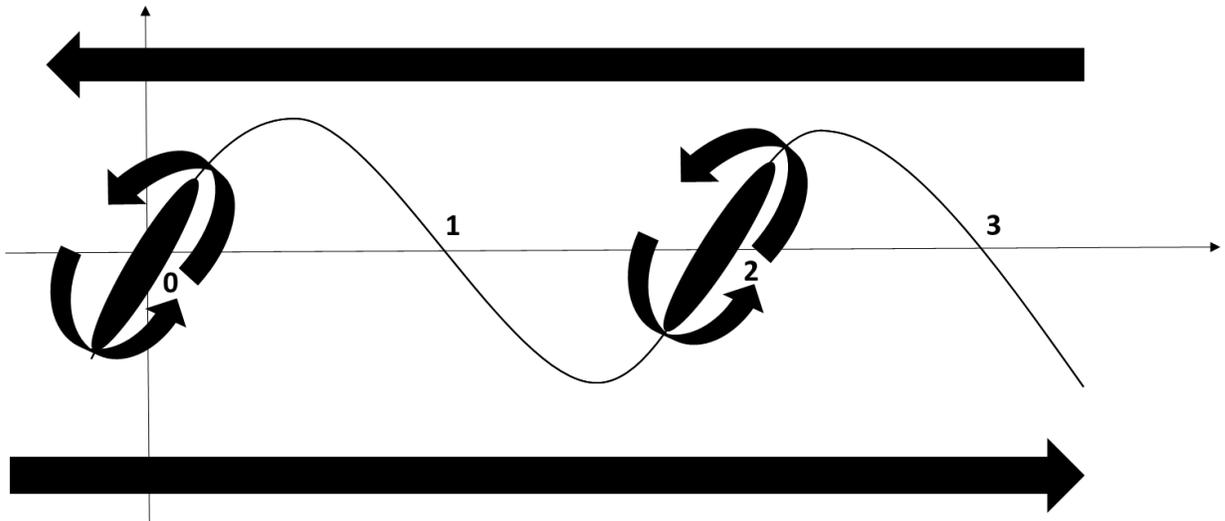


図4 ケルビン・ヘルムホルツ不安定のメカニズム

第3章 方法

本章では、オイラー方程式を数値的に解く方法について述べる。

3.1 有限体積法

空間を有限個の検査体積（セル）に分割し、各セルにおいて保存則を満たすように物理量の時間発展を計算する方法を有限体積法と呼ぶ。

有限体積法では物理量はセル平均値として与えられる。一方で、各セルで保存則を適用するため、物理量が未定義であるセル境界面において流束（**数値流束**）を評価する必要がある。

数値流束は数値シミュレーションの安定性や解像度を決定づける極めて重要な概念である。様々な数値流束の評価方法が考案されてきたが、近年では、衝撃波を高解像かつ安定に数値的に再現でき、かつ計算効率もよい HLLC 法 (Harten-Lax-van Leer Contact scheme) [7 Toro et al.] が用いられる。

3.2 HLL 法

まず、HLLC 法の基礎となる HLL 法[8 Harten et al.]について解説する。HLL 法は、考案者である Harten、Lax、van Leer の頭文字から名づけられた近似リーマン解法のひとつである。

有限体積法ではセル境界をはさんで物理量が不連続に変化する。したがって、有限体積法は各セル境界において多数の衝撃波管問題（リーマン問題）を解くこととみなすこともできる。

特に、HLL 法では、セル境界におけるリーマン問題を非常に単純化させて解く（図 5）。最大、最小の特性速度をそれぞれ S_L, S_R として、 $0 \geq S_L, 0 \leq S_R$ である場合を考える。また、初期条件として、初期物理状態を \mathbf{U}, \mathbf{F} とする。この方法では、リーマン問題を考える際に現れる特性速度の内、最大、最小の特性速度 S_L, S_R のみに注目し、 S_L, S_R で囲まれた区間を一様の物理状態 $\mathbf{U}_i, \mathbf{F}_i$ ($i = L, C, R$) であると考え。その他の領域では物理量の情報が伝わっていないので、初期物理状態 \mathbf{U}, \mathbf{F} のままである。

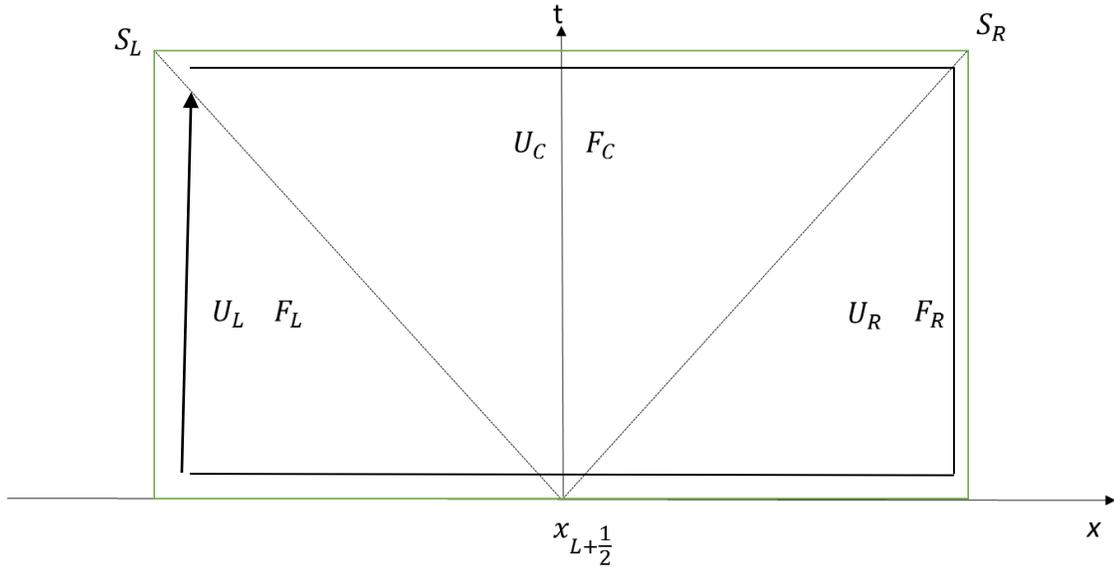


図5 HLL法の概念図

ここで、図5全領域面積分を考え、 $0 \geq S_L$ に注意して、ストークスの定理を用いて線積分に直すと、

$$U_C = \frac{U_C(S_R - S_L) - S_R U_R + F_R - F_L + S_L U_L}{S_R U_R - S_L U_L + F_L - F_R} \frac{S_R - S_L}{S_R - S_L}$$

となる。また $x_{L+1/2}$ での $U_{L+1/2}, F_{L+1/2}$ を考えると、 S_L, S_R により

$$U_{L+1/2}^{HLL} = \begin{cases} U_L & 0 \leq S_L \\ U_C & S_L \leq 0 \leq S_R \\ U_R & 0 \geq S_R \end{cases}$$

$$F_{L+1/2}^{HLL} = \begin{cases} F_L & 0 \leq S_L \\ F_L + S_L(U_C - U_L) & S_L \leq 0 \leq S_R \\ F_R & 0 \geq S_R \end{cases}$$

と分けることができ、上記の式と、前章で求めた基本方程式を用いて物理量の時間発展を考える。これがHLL法と呼ばれる数値解法である。HLL法は計算効率が高く、また衝撃波を安定に解くことができる。一方、数値解が数値拡散により滑らかになることも知られている。

3.3 HLLC法

HLL法は非常に簡便に定式化でき、また保存則の形式によらず適用可能であった。一方、 S_L, S_R で囲まれた領域において解が一定と近似するため、密度の不連続（接触不連続）を精度よく解像することができなかった。そこで、ここでは密度の不連続を正確に解像するため、HLL法で考慮されていない中間の特性波（エントロピー波）を考慮する（図6）。

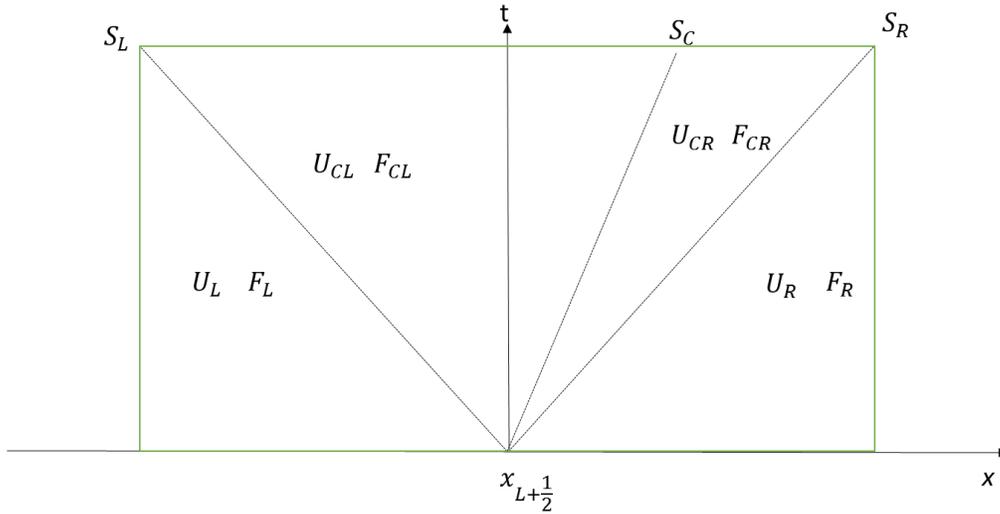


図 6 HLLC 法 の 概 念 図

こ っ こ で 中 間 状 態 は 以 下 の よ う に 与 え ら れ る。

$$U_{Ck} = \rho_k \left(\frac{S_k - v_k}{S_k - S_C} \right) \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ S_C \\ \frac{E_k}{\rho_k} + \left(S_C + \frac{p_k}{\rho_k (S_k - v_k)} \right) \end{array} \right.$$

こ れ か ら、 数 値 流 束 F は、

$$U_{L+\frac{1}{2}}^{HLLC} = \begin{cases} U_L & 0 \leq S_L \\ U_{CL} & S_L \leq 0 \leq S_C \\ U_{CR} & S_C \leq 0 \leq S_R \\ U_R & 0 \geq S_R \end{cases}$$

$$F_{Ck} = F_k + S_k (U_{Ck} - U_k)$$

$$F_{L+\frac{1}{2}}^{HLLC} = \begin{cases} F_L & 0 \leq S_L \\ F_{CL} & S_L \leq 0 \leq S_C \\ F_{CR} & S_C \leq 0 \leq S_R \\ F_R & 0 \geq S_R \end{cases}$$

と 与 え ら れ る。 こ こ で、 $k=L,R$ を、 E は 単 位 質 量 当 た り の エ ネ ル ギ ー を 表 し て い る。 HLLC 法 と 呼 ば れ る 数 値 解 法 で あ り、 衝 撃 波 を 安 定 に 解 像 す る と 共 に、 接 触 不 連 続 も 正 し く 解 像 で き る。 し た が っ て、 HLLC 法 は HLL 法 に 比 べ て、 密 度 に 対 す る 数 値 拡 散 が 小 さ い 数 値 解 法 で あ る と 言 え る。

特 に 本 研 究 で は、 WENO 法 (Weighted Essentially Non-Oscillatory scheme) [9 Shu,Osher] を 用 い て HLLC 法 を 高 次 精 度 化 し た。

第4章 結果・考察

以下では密度を ρ 、 x 、 y 方向の速度を V_x 、 V_y 、圧力を P_r 、対流マッハ数を M_c で表すとする。なお、ここでの速度 V_x 、 V_y は音速 $c = 1$ に対しての速度であり、対流マッハ数は、流れ 1、2 に対して、それぞれの流速を $u_{1,2}$ 、そのときの音速を $c_{1,2}$ と表すとき、

$$M_c = \frac{u_1 - u_2}{c_1 + c_2}$$

で定義される。

まず、 $\rho = 1$ 、 $V_x = 0.5$ を初期条件として与えたとき(以降条件 1 と呼ぶ)の ρ 、 V_x 、 V_y 、 P_r 、 M_c の時間変化、およびフーリエモード (1~4) のフーリエ振幅の時間変化を図 7~12 図で示す。ここでいうフーリエ振幅とは、前章で求めた増幅率 $\text{Re}[\sigma]$ のことで、すなわち、各フーリエモードでのフーリエ振幅の傾きは擾乱の成長率を表している。なお、グラフは基本、 $t=0, 100, 200, 300$ で構成され、変化の大きいグラフは適宜細かい時間ステップで記載する。また、出力の性質上、一様なものはグラフとして表示されないため、 $t=0$ のグラフが得られないものは $t=10$ を始めのグラフとしている。また計算設定を表 1 に示す。

表 1 計算設定

計算範囲	$0 \leq x \leq 20, -20 \leq y \leq 20$
格子数	$N_x = 200, N_y = 400$
格子幅	$\Delta x = 0.1, \Delta y = 0.1$
計測時間(t)	$t = 300$
V_x	$V_x = \tanh(y)$
初速 V_0	0.5 , 1
密度 ρ	1 , $1 + \frac{15}{\text{csch}(y)^2}$, $1 - \frac{15}{16 \cosh(y)^2}$
境界条件	周期境界(x), 反射境界(y)
音速 c	$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$
圧力 p	$\frac{1}{\gamma}$

ρ の時間変化

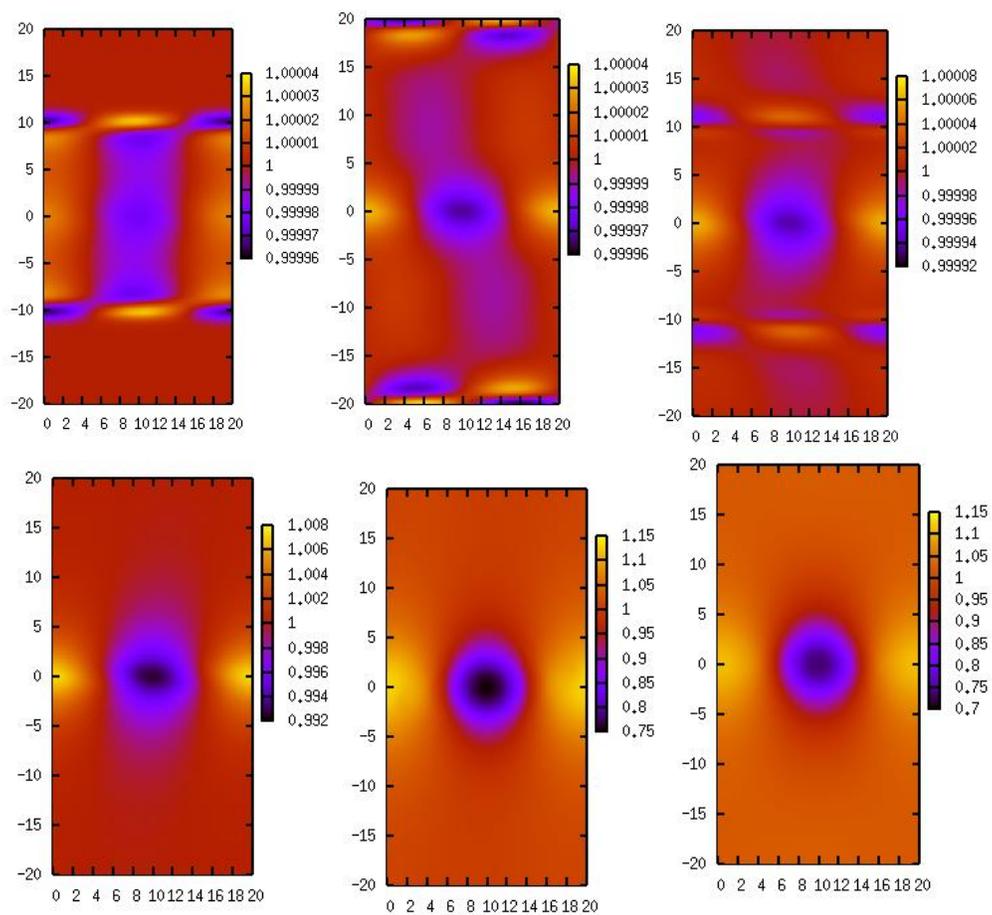


図7 左上から順に $t=10, 20, 30$ 、
左下から順に $t=100, 200, 300$ での ρ の時間変化

V_x の時間変化

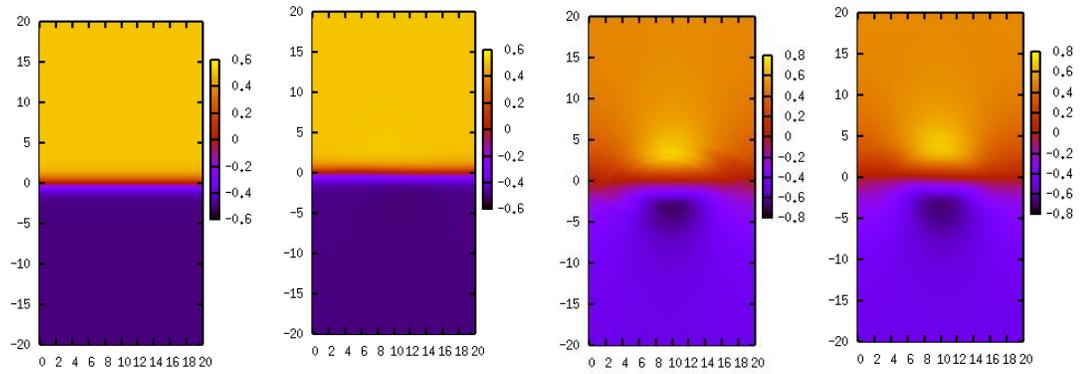


図 8 左から順に $t=0,100,200,300$ の V_x の時間変化

V_y の時間変化

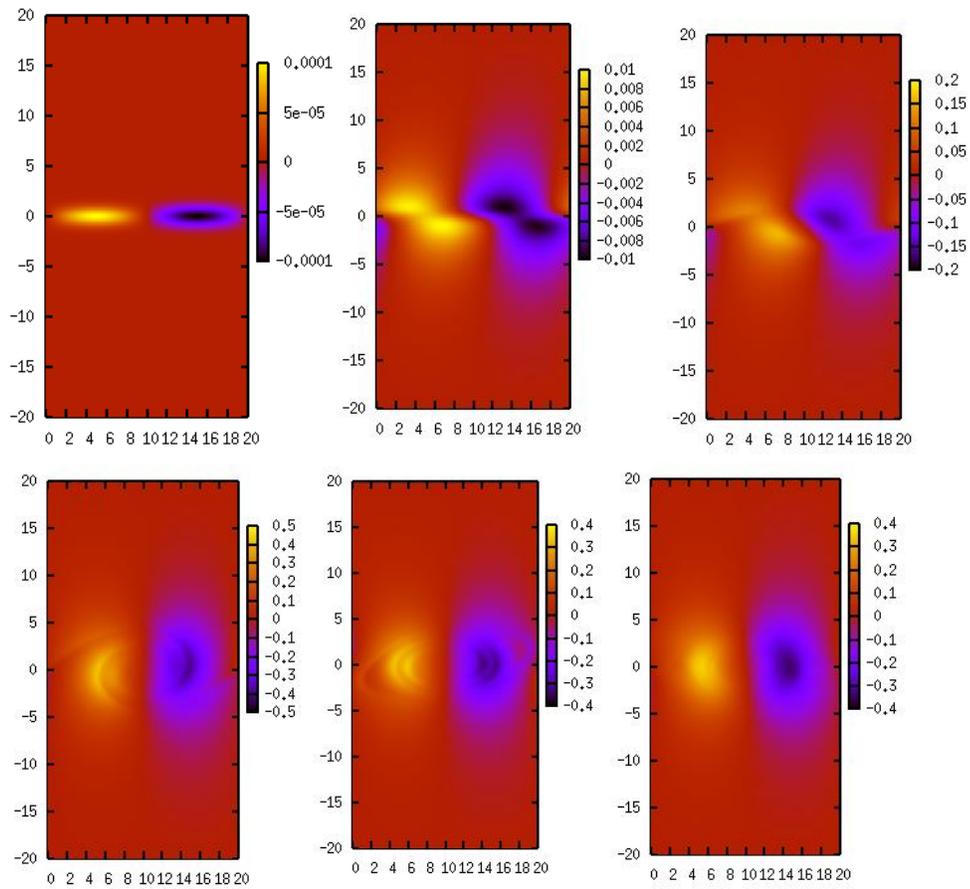


図 9 左上から順に $t=0,100,140$, 左下から順に $t=170,200,300$ での V_y の時間変化

Pr の時間変化

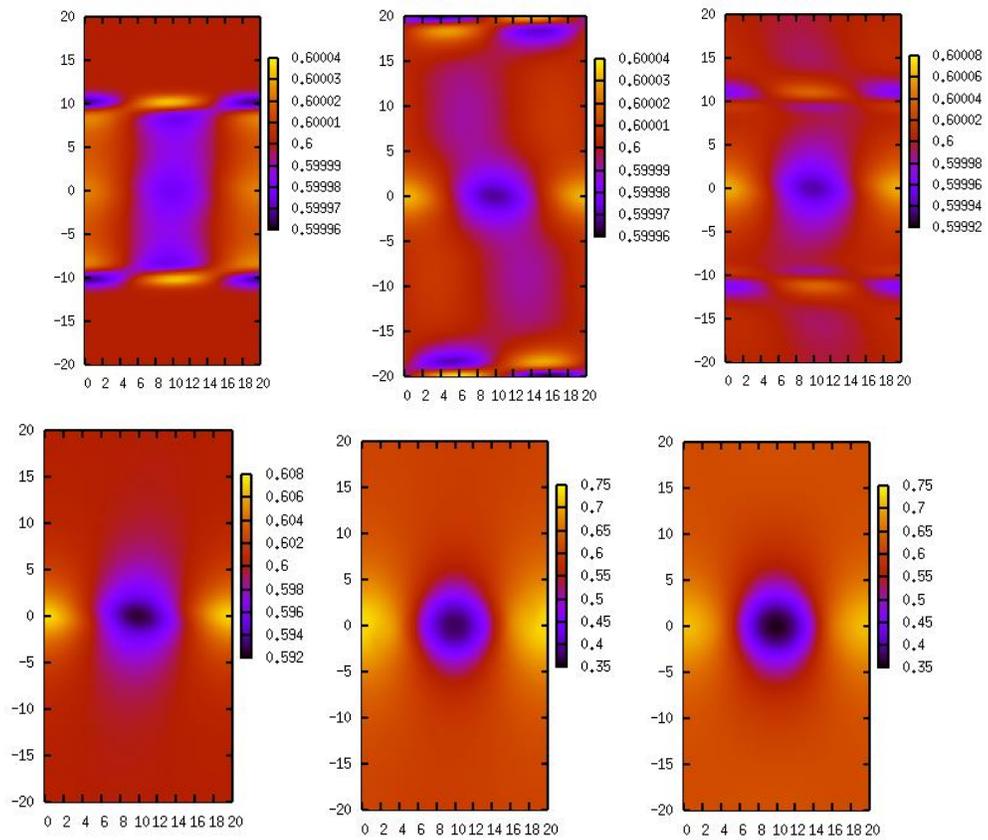


図 10 左上から順に $t=10, 20, 30$
左下から順に $t=100, 200, 300$ での Pr の時間変化

M_c の時間変化

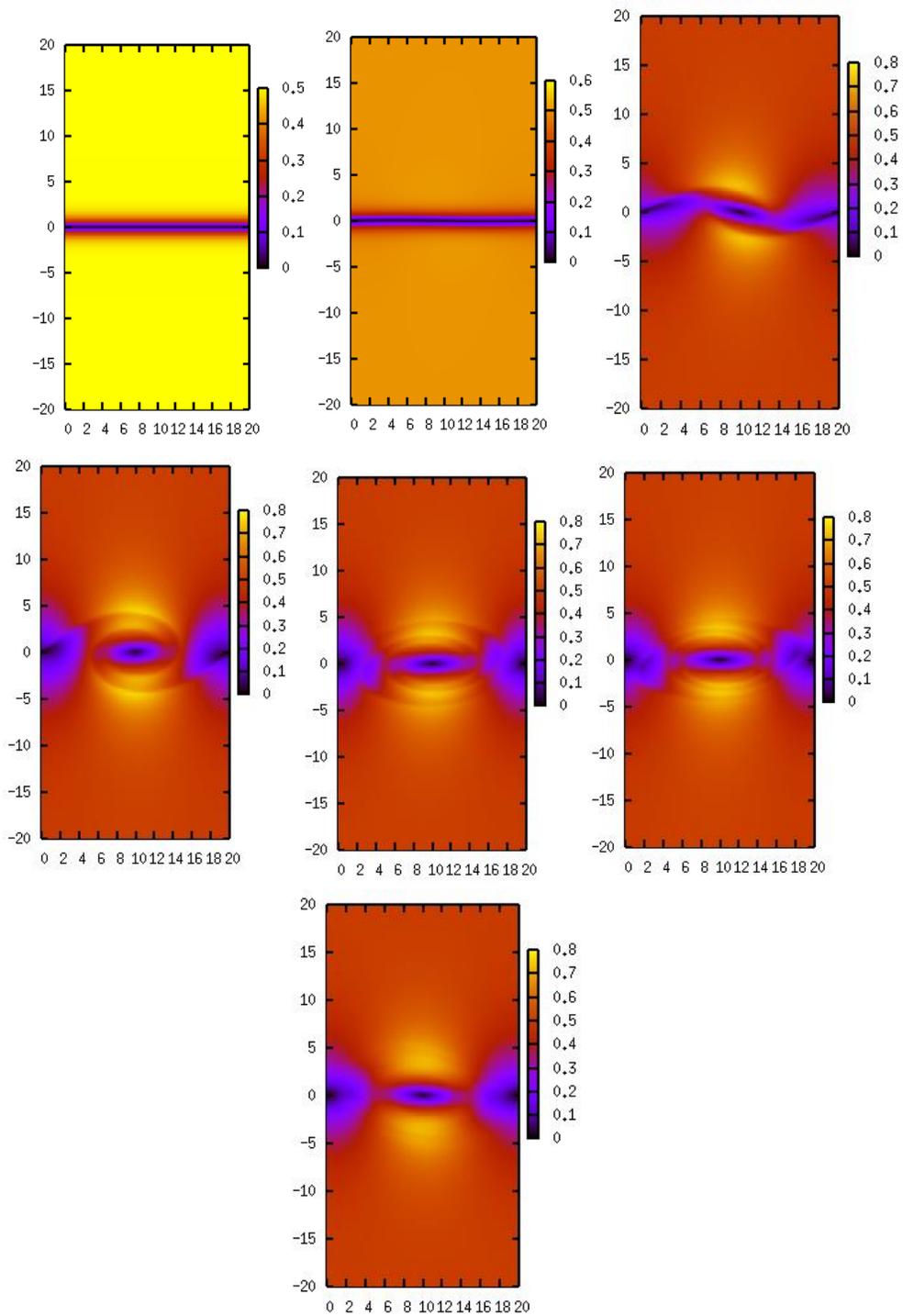


図 11 左上から順に $t=0,100,150$ 左中から順に $t=170,190,200$ 最後に $t=300$ での M_c の時間変化

フーリエモード（1～4）のフーリエ振幅の時間変化

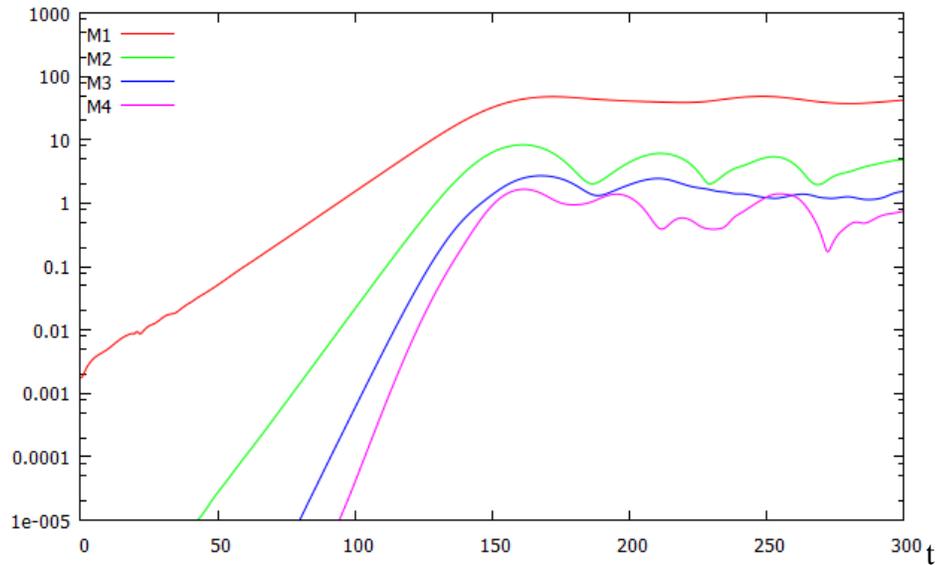


図 12 フーリエモード（1～4）のフーリエ振幅の時間変化の対数グラフ
同様に $\rho=1$ 、 $V_x=2$ を初期条件として与えたとき（以降条件 2 とする）の結果を以下図 13～図 18 に示す。

ρ の時間変化

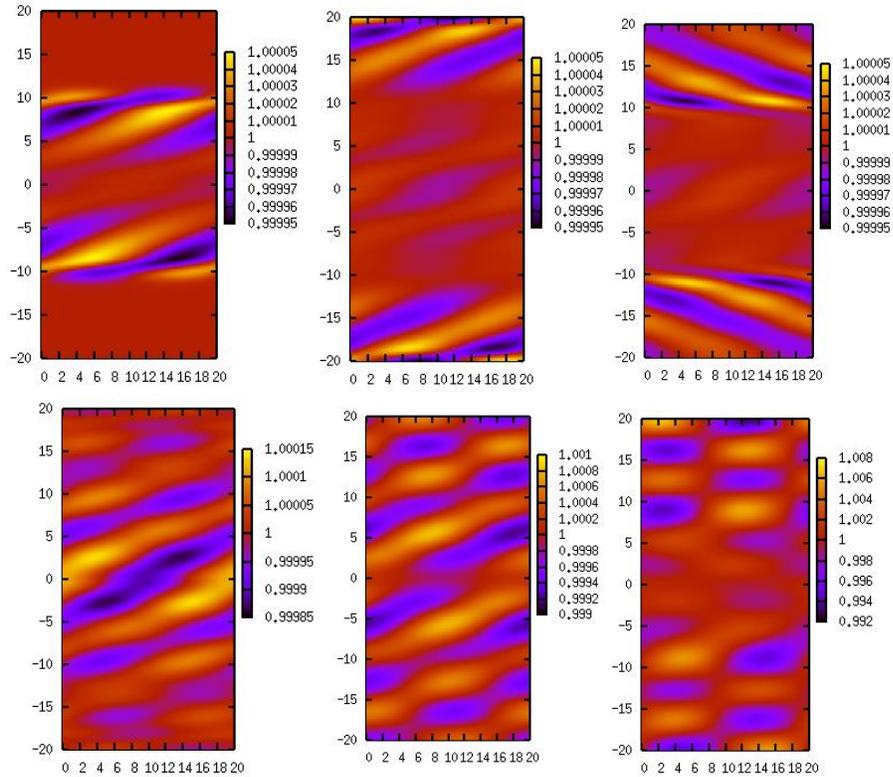


図 13 左上から $t=10, 20, 30$ 左下から $t=100, 200, 300$ での ρ の時間変化

V_x の時間変化

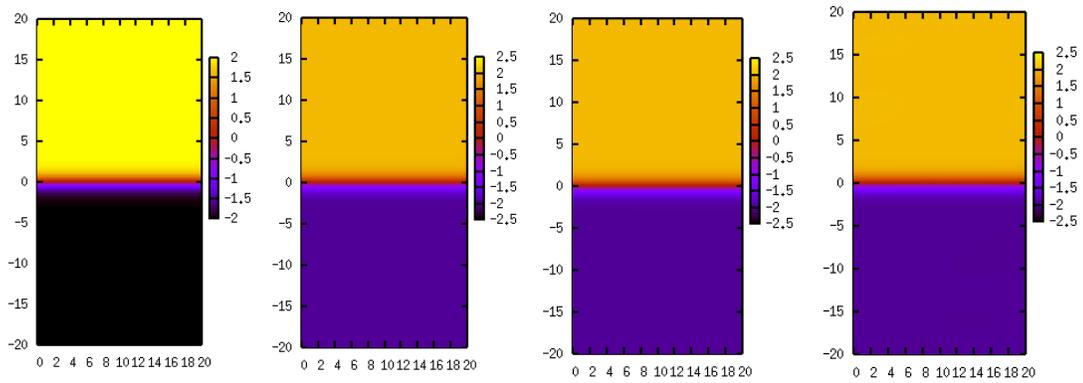


図 14 左から $t=0,100,200,300$ での V_x の時間変化

V_y の時間変化

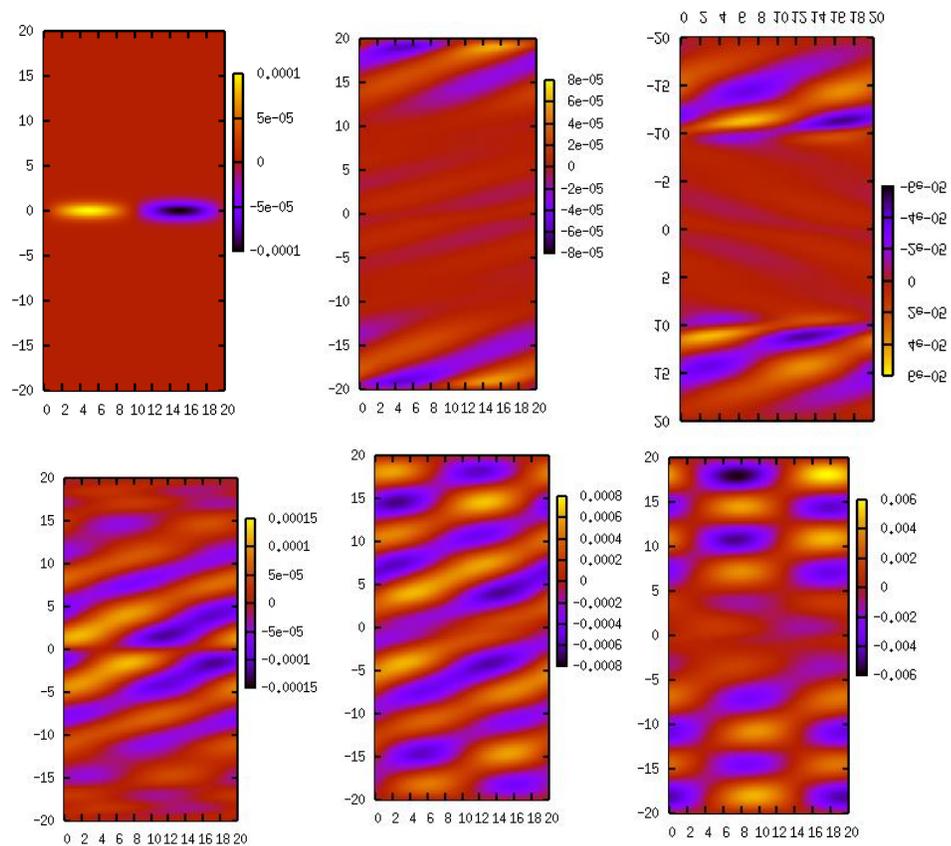


図 15 左上から順に $t=0,20,30$ 左下から順に $t=100,200,300$ での V_y の時間変化

Pr の時間変化

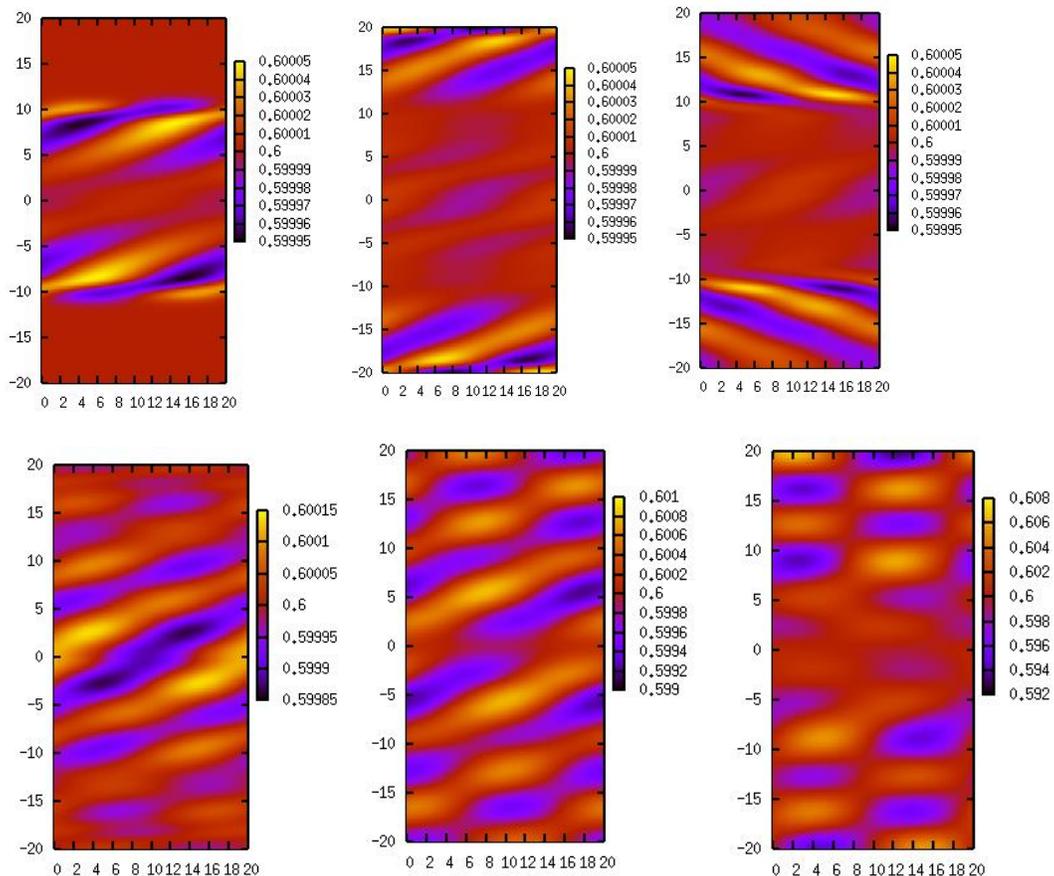


図 16 左上から順に $t=0,20,30$ 左下から順に $t=100,200,300$ での Pr の時間変化

Mc の時間変化

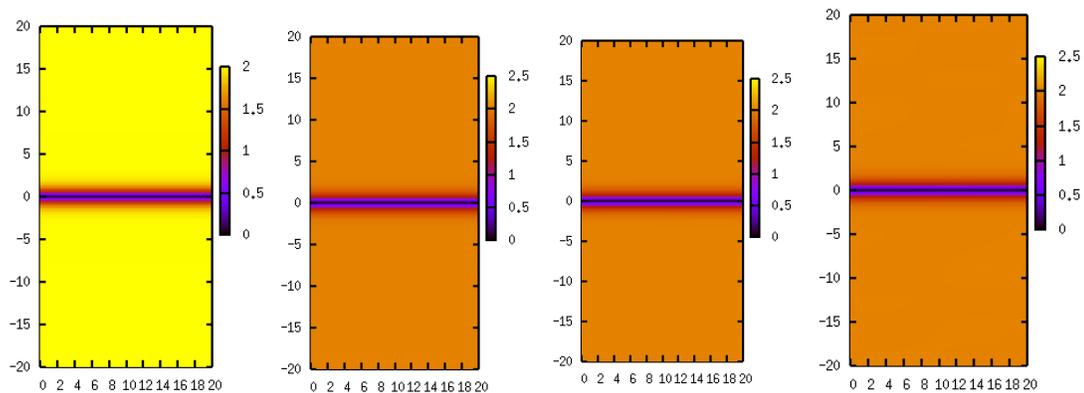


図 17 左から順に $t=0,100,200,300$ での Mc の時間変化

フーリエモード (1~4) の時間変化

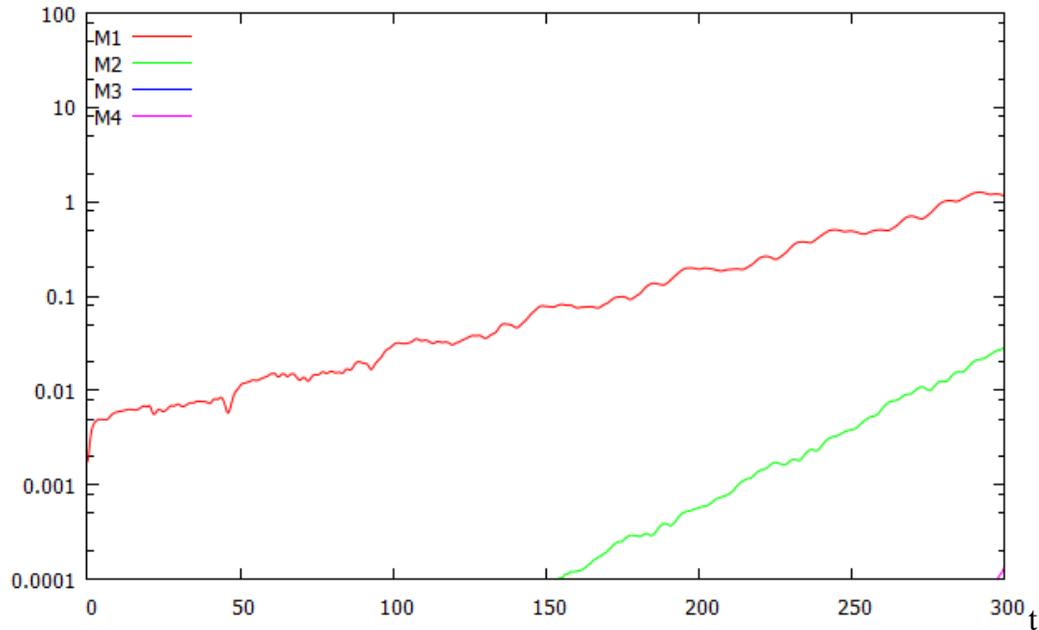


図 18 フーリエモード (1~4) のフーリエ振幅の時間変化の対数グラフ

ここで、 $\rho = 1$ 、つまり、密度が一定の場合での条件 1、2 に関する考察を行う。

擾乱の成長率は $Mc < \sqrt{2}$ の場合に比べ、 $Mc > \sqrt{2}$ で遅くなることが知られている。[1]そこで、改めて得られた結果を比較してみると、条件 1 ($Mc < \sqrt{2}$) では擾乱の成長率が条件 2 ($Mc > \sqrt{2}$) と比べ非常に大きくなっていることが分かる。そしてさらに、条件 1 では線形的に成長しているが、条件 2 では振動のようなものが確認できる。これは、最初に与えた微小変位が $Mc > \sqrt{2}$ の流れの壁にぶつかって衝撃波構造を生成し、振動として残ったものと考えることができる。逆に $Mc < \sqrt{2}$ の場合では衝撃波構造は発生せず、そのまま擾乱が成長したとすればこの各フーリエモードでのフーリエ振幅の振動の違いは説明できる。

次に、密度に分布を持たせ $\rho = 1 + \frac{15}{\cosh(y)^2}$ 、 $V_x = 0.5$ を初期条件として与えたとき (以降条件 3 とする) を考える。ここで $\rho = 1 + \frac{15}{\cosh(y)^2}$ と置いた理由は、

$$\rho = 1 + \frac{15}{\cosh(y)^2} = \begin{cases} 16 & (y \rightarrow 0) \\ 1 & (y \rightarrow \infty) \end{cases}$$

音速 c は

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$$

で表される。本研究では簡単のため、圧力として $p = \frac{1}{\gamma}$ としているのもそれぞれ

$$c = \begin{cases} \frac{1}{4} & (y \rightarrow 0) \\ 1 & (y \rightarrow \infty) \end{cases}$$

ここでマッハ数 M は

$$M = \frac{v}{c}$$

で表されるから、結果として

$$\begin{cases} M_{y \rightarrow 0} = 2 & (M_0 > \sqrt{2}) \\ M_{y \rightarrow \infty} = 0.5 & (M_0 < \sqrt{2}) \end{cases}$$

を要請している。ここで M_0 は

$$M_0 = \frac{u_1 - u_2}{2c_0}$$

と表し、速度勾配層中心の音速 (c_0) に対するマッハ数とする。

これはつまり、流体界面近傍では $M_0 > \sqrt{2}$ が、界面近傍以外では $M_0 < \sqrt{2}$ となることを表している。以下の図 19～図 23 に同様に結果を示す。

ρ の時間変化

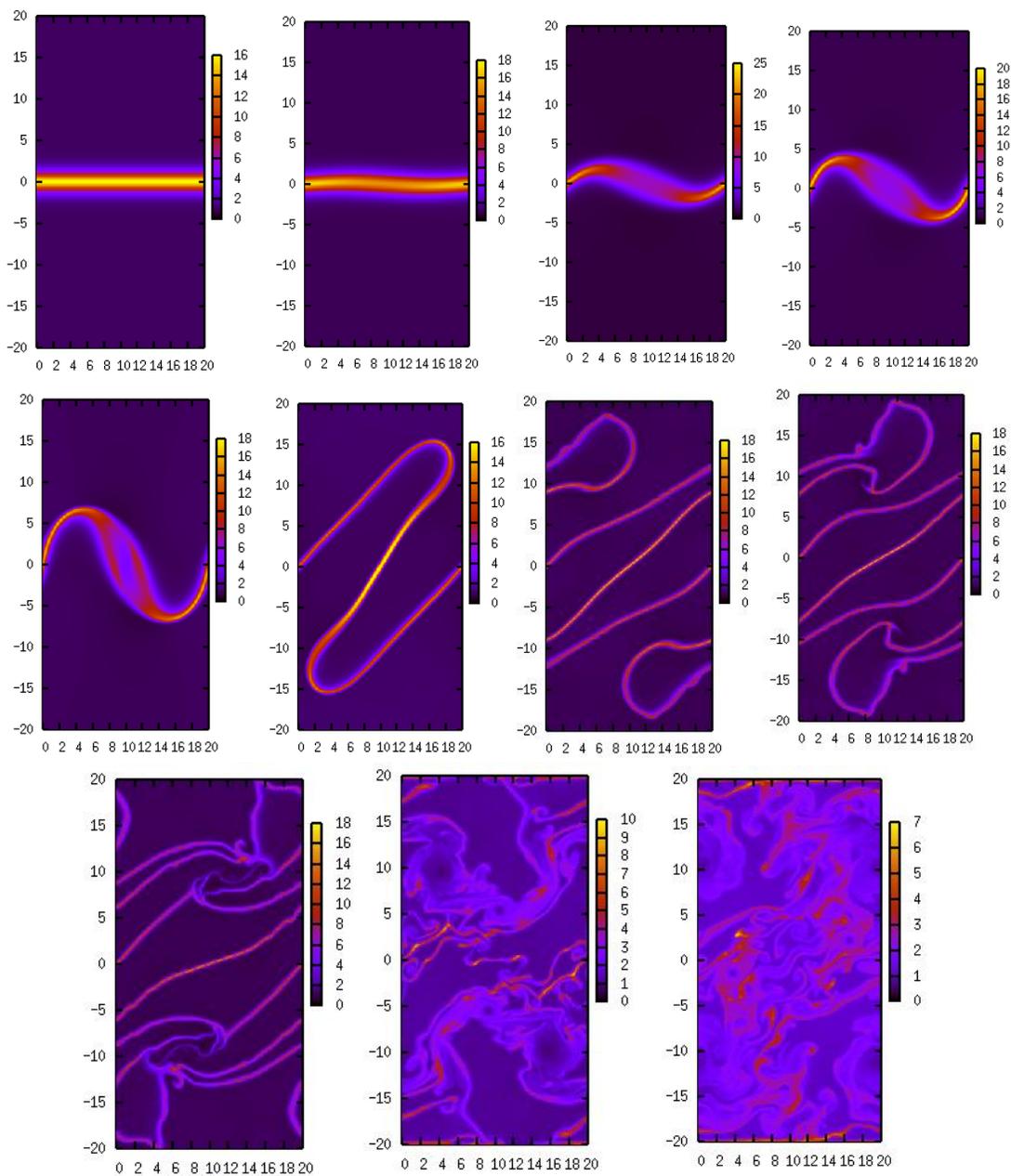
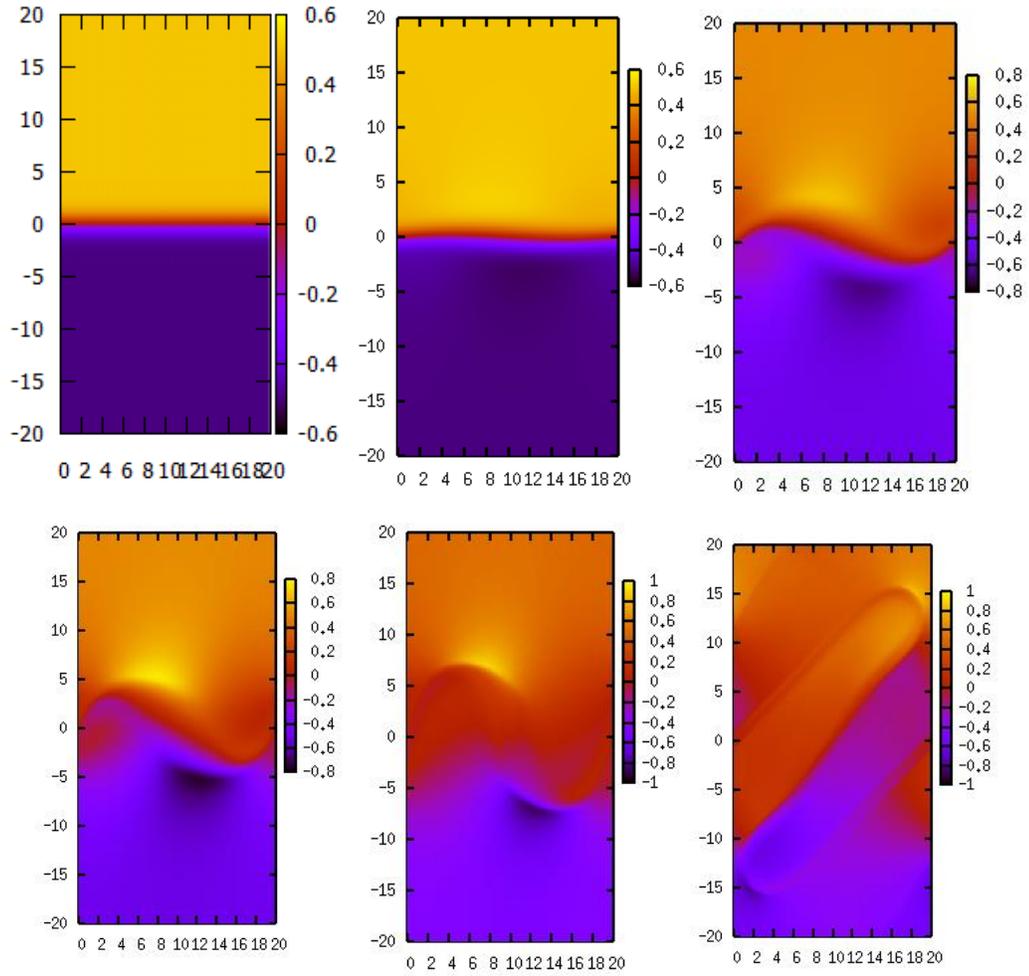


図 19 左上から順に $t=0,100,130,140$,左中から順に $t=150,180,200,210$,

左下から順に $t=220, 260, 300$ での ρ の時間変化

V_x の時間変化



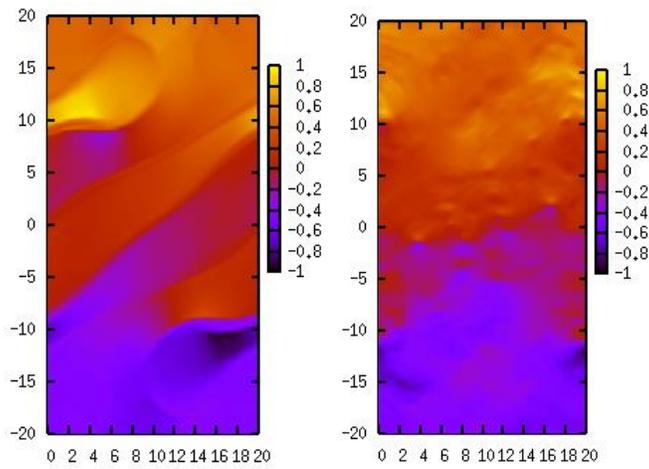
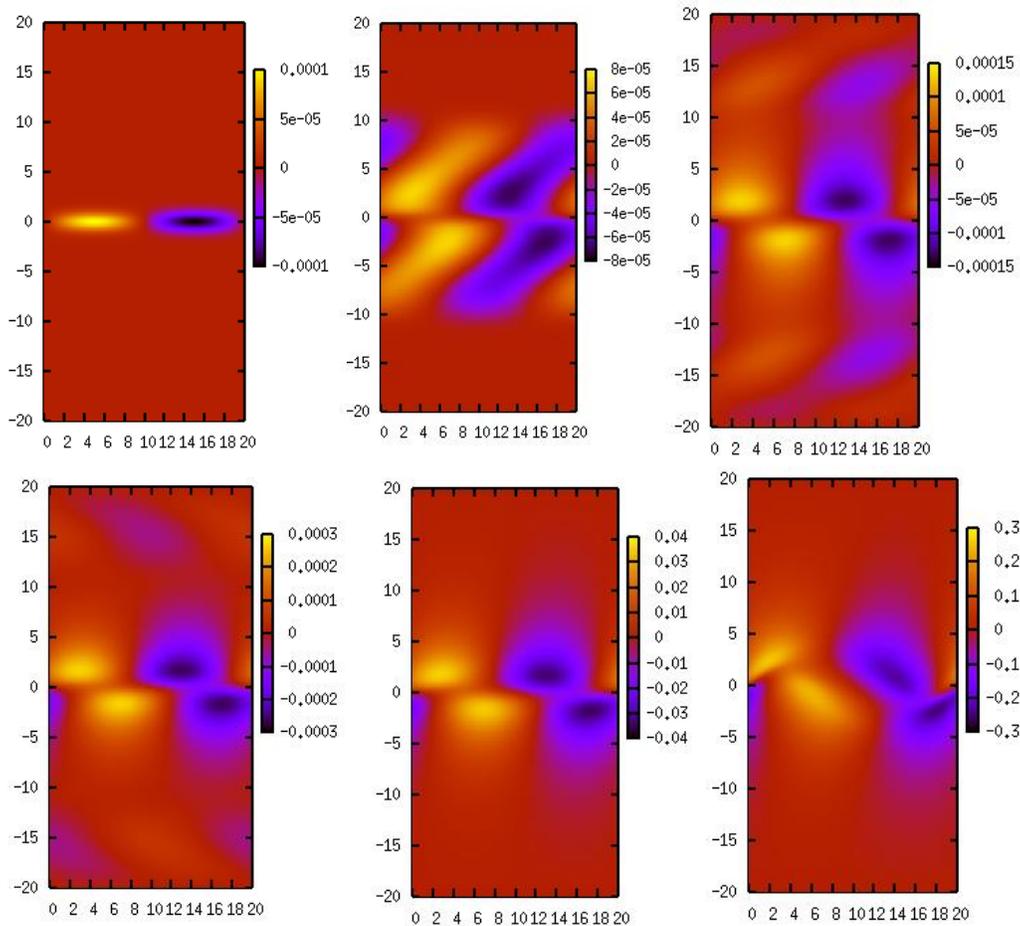
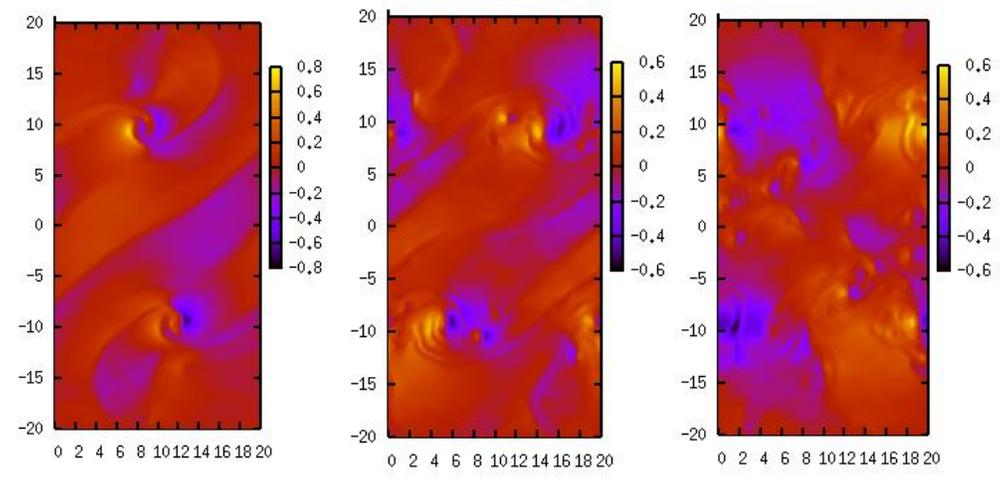
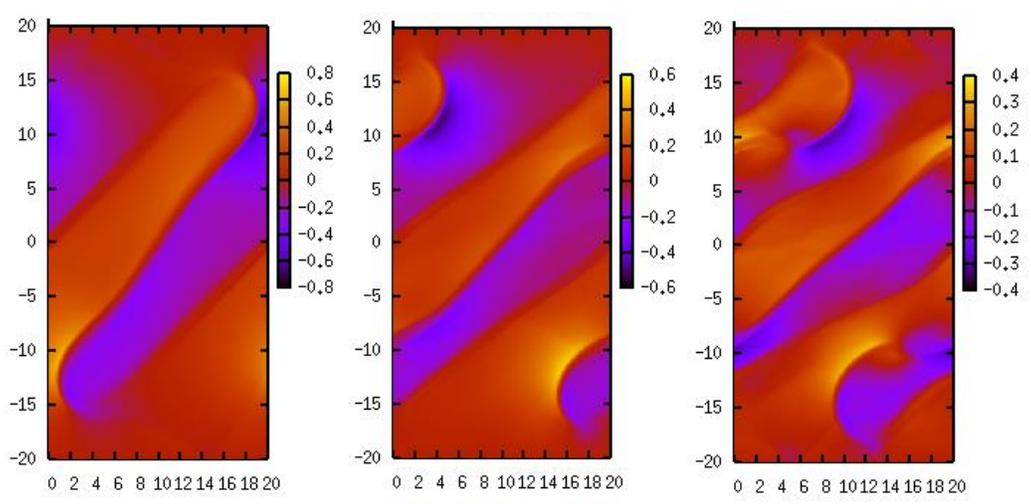
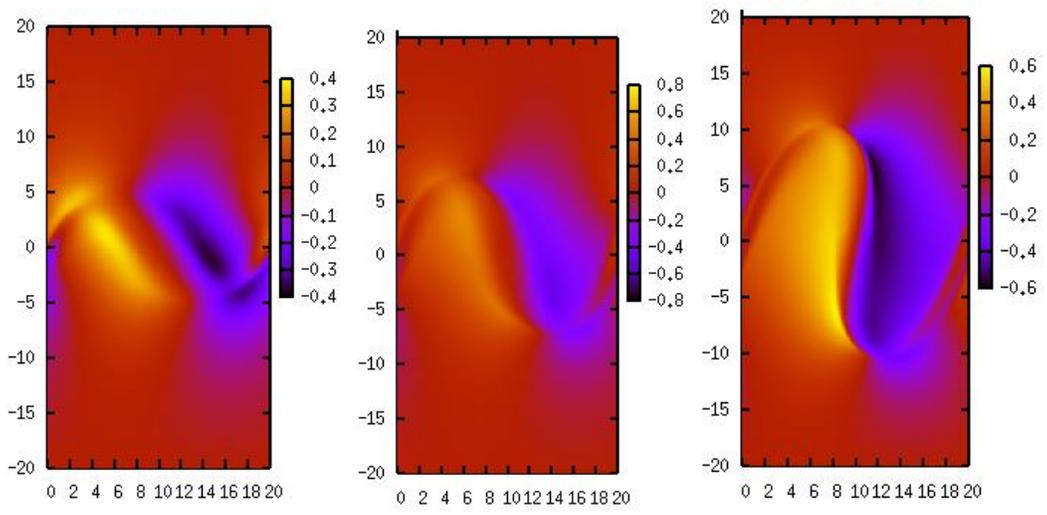


図 20 左上から順に $t=0,100,130$,左中から順に $t=140,150,180$,左下から順に $t=200,300$ での V_x の時間変化

V_y の時間変化





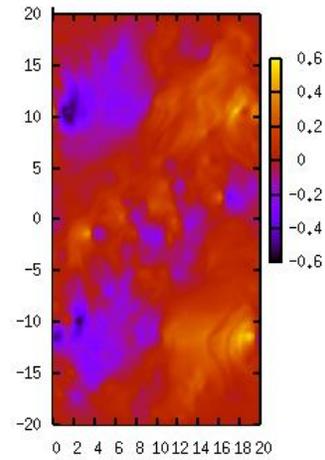
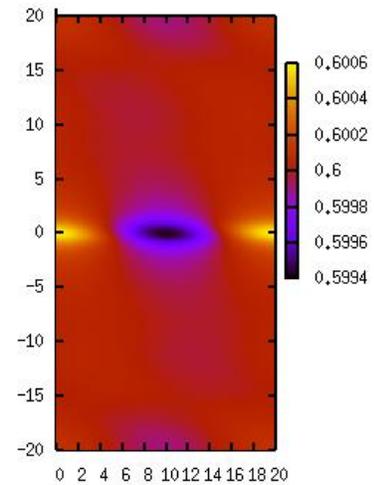
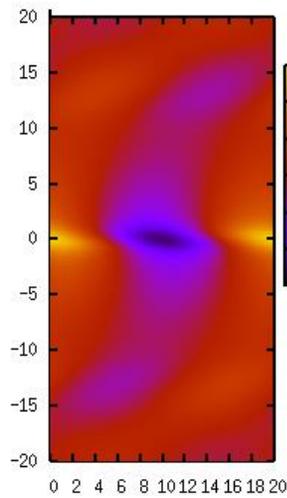
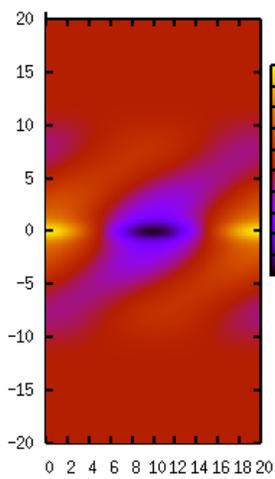
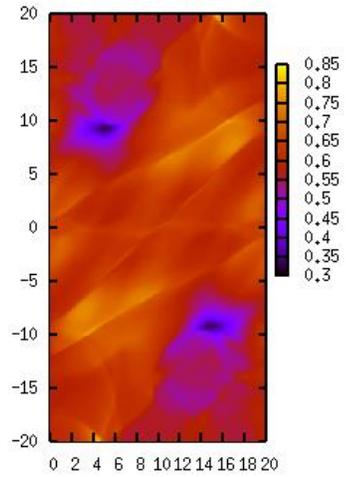
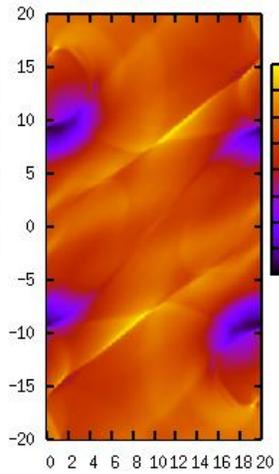
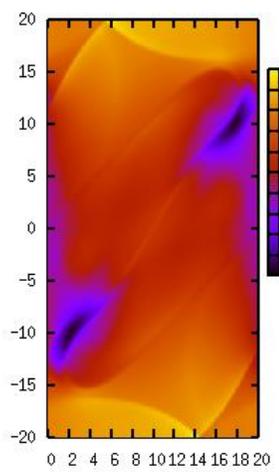
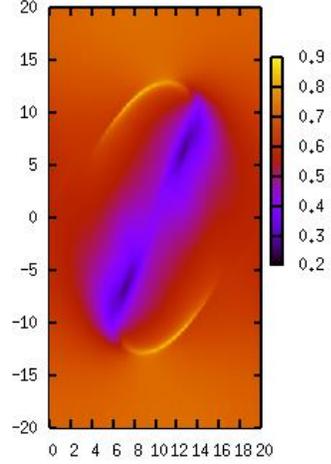
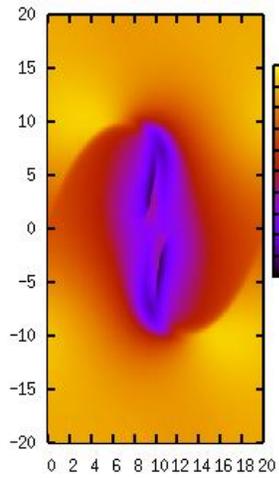
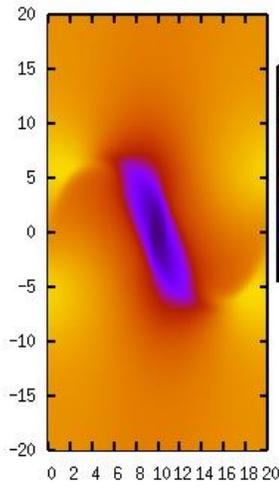
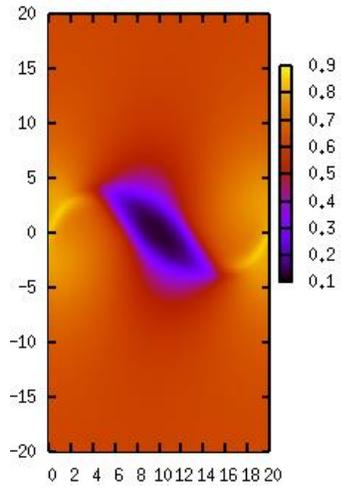
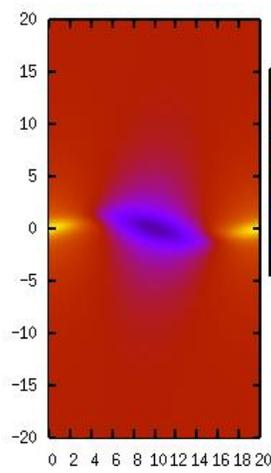
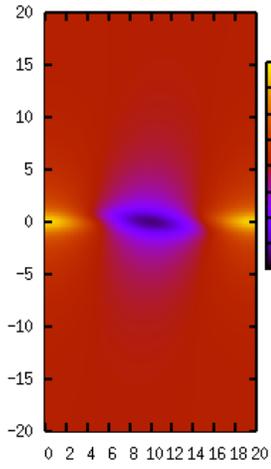


図 21 左上 1 段目から順に $t=0,10,20$ 次いで左上 2 段目から順に $t=30,100,130$, 以下同じように $t=140,150,160$, $t=180,190,200$, $t=210,220,230$, $t=250,300$ での V_y の時間変化

Pr の時間変化





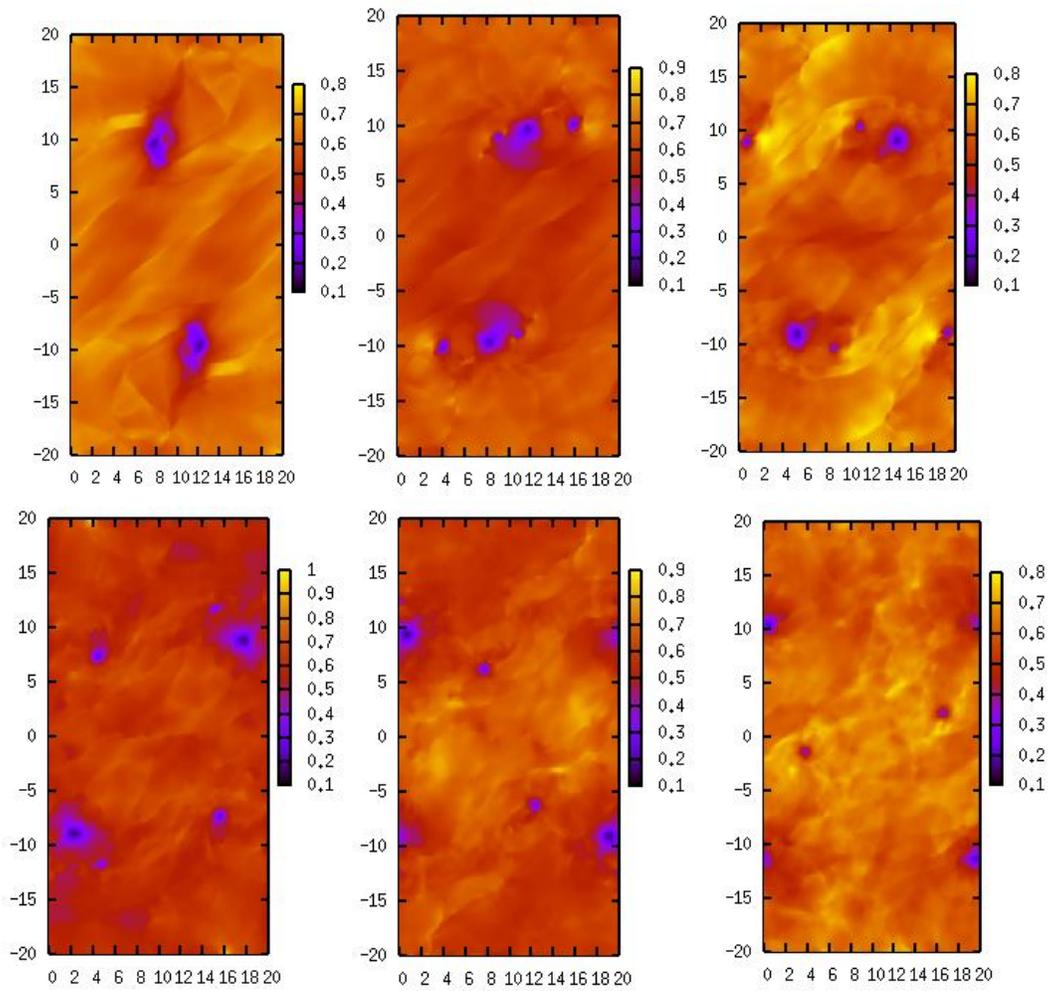
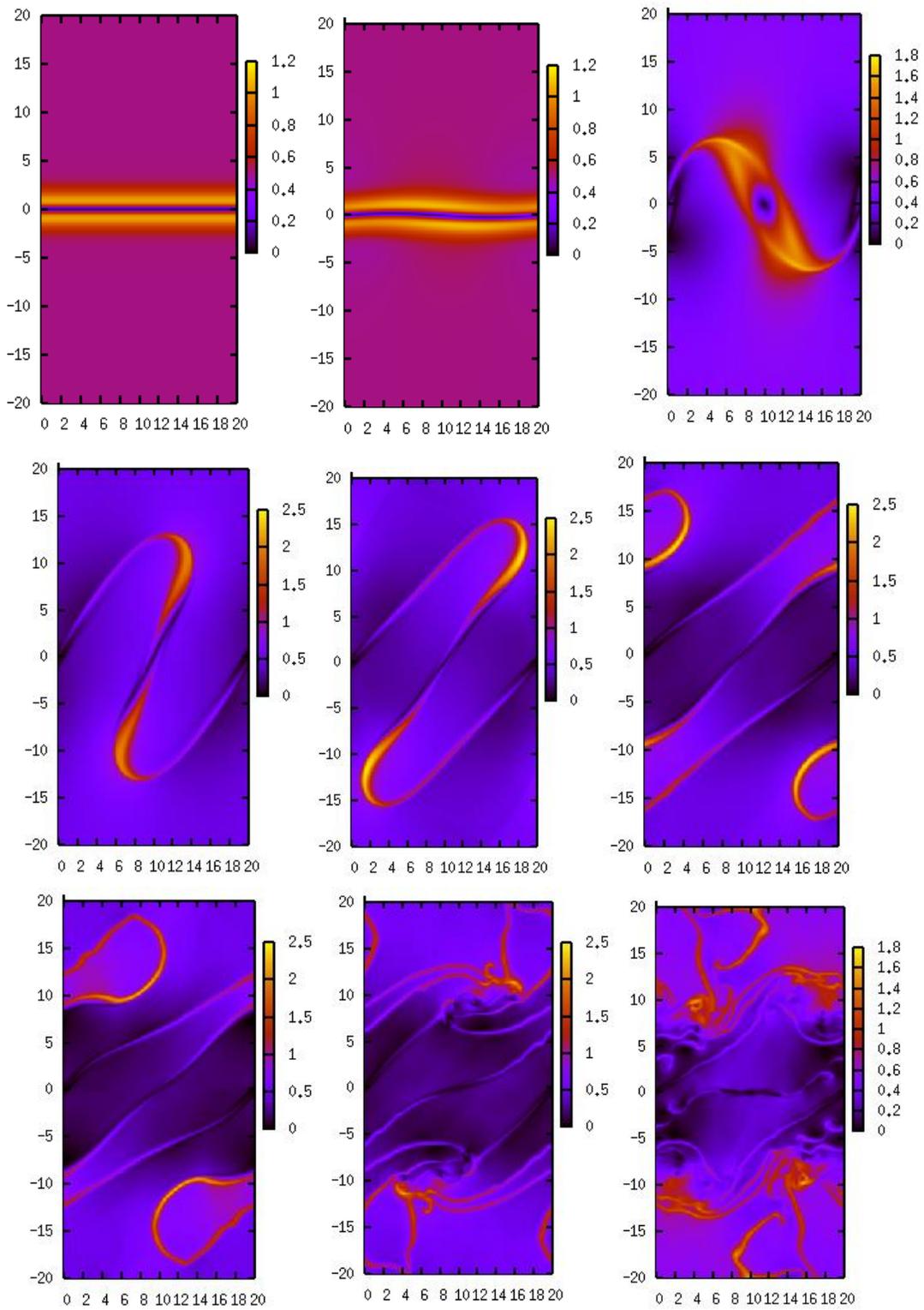


図 22 左上 1 段目から順に $t=10, 20, 30$, 左上 2 段目から順に $t=100, 120, 140$, 以下同じように $t=150, 160, 170$, $t=180, 190, 200$, $t=210, 220, 230$, $t=240, 250, 300$ での Pr の時間変化

Mの時間変化



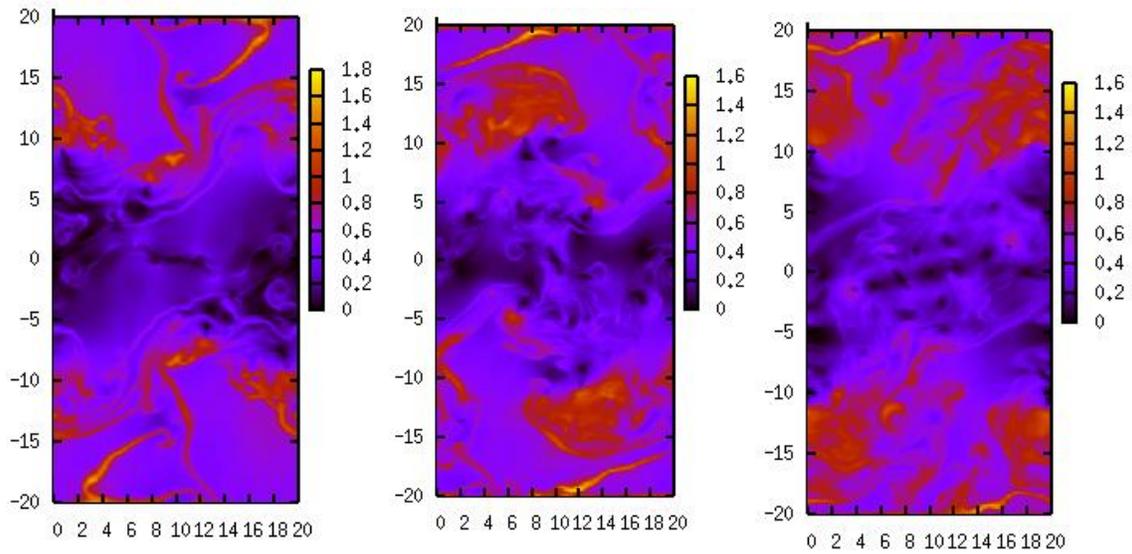


図 23 左上 1 段目から順に $t=0,100,150$, 左上 2 段目から順に $t=170,180,190$, 以下同じように $t=200,220,240$, $t=250,270,300$ での M の時間変化

フーリエモード (1~4) のフーリエ振幅の時間変化

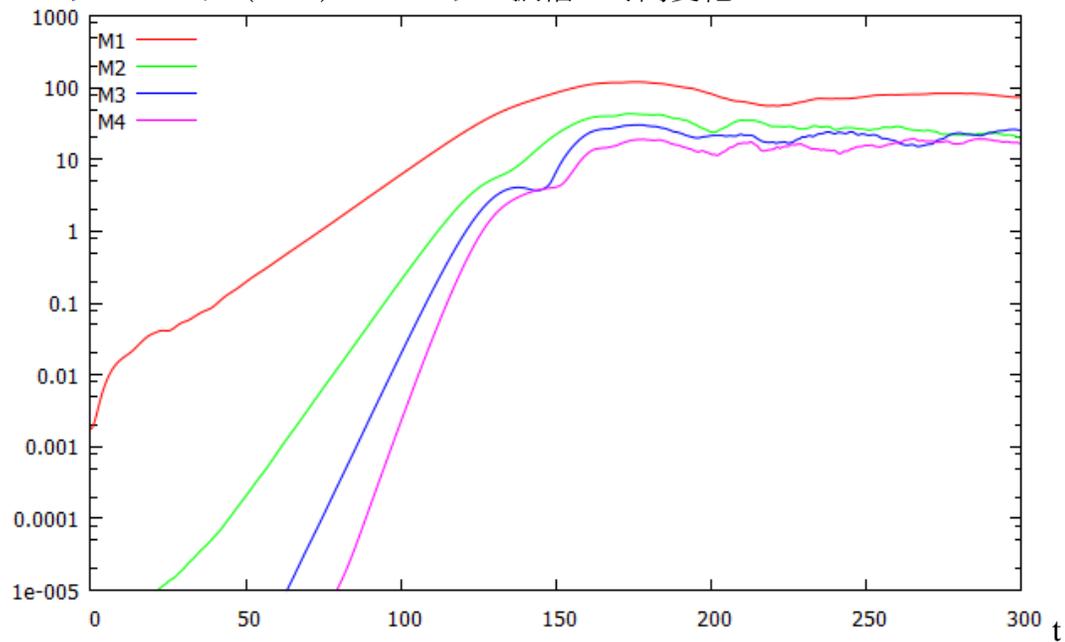


図 33 フーリエモード(1~4)のフーリエ振幅の時間変化の対数グラフ

次に、 $\rho = 1 - \frac{15}{16 \cdot \cosh(y)^2}$ 、 $V_x=2$ を初期条件として与えたとき（以降条件 4 とする）を考える。これも、前式同様に、

$$\begin{cases} M_{y \rightarrow 0} = 0.5 & (M_0 < \sqrt{2}) \\ M_{y \rightarrow \infty} = 2 & (M_c > \sqrt{2}) \end{cases}$$

を要請している。以下の図 24～図 29 に同様に結果を示す。

ρ の時間変化

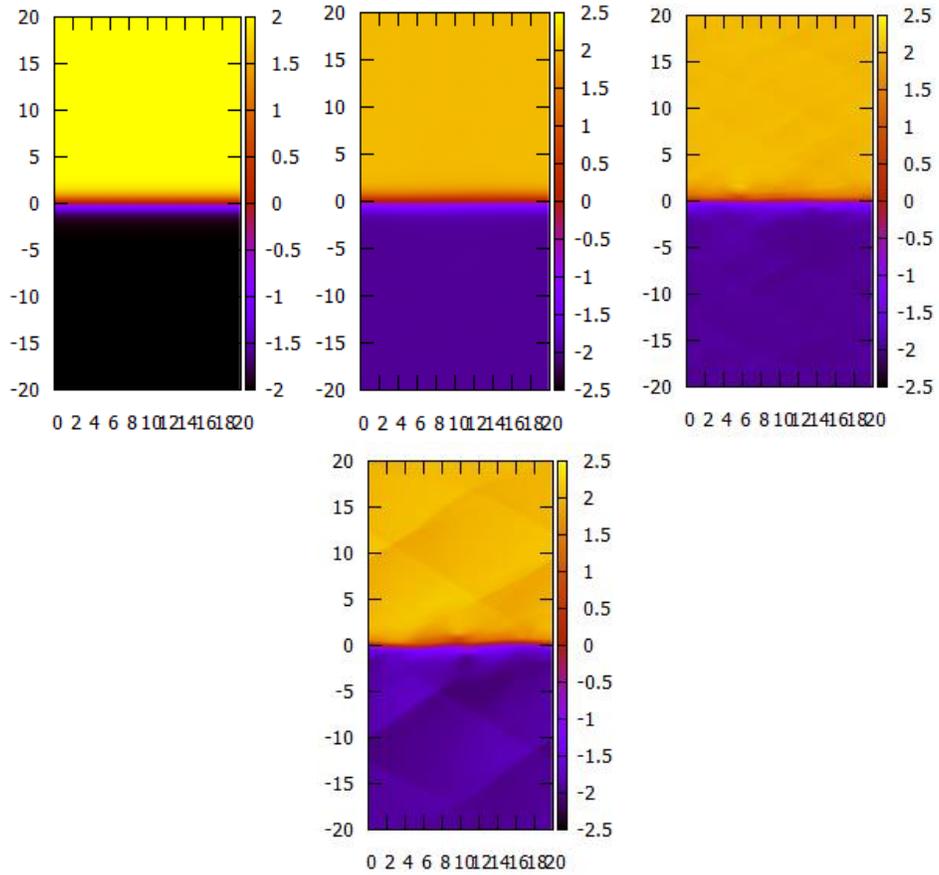


図 24 左上から順に $t=0, 100, 200$, 下に $t=300$ のときの ρ の時間変化

V_x の時間変化

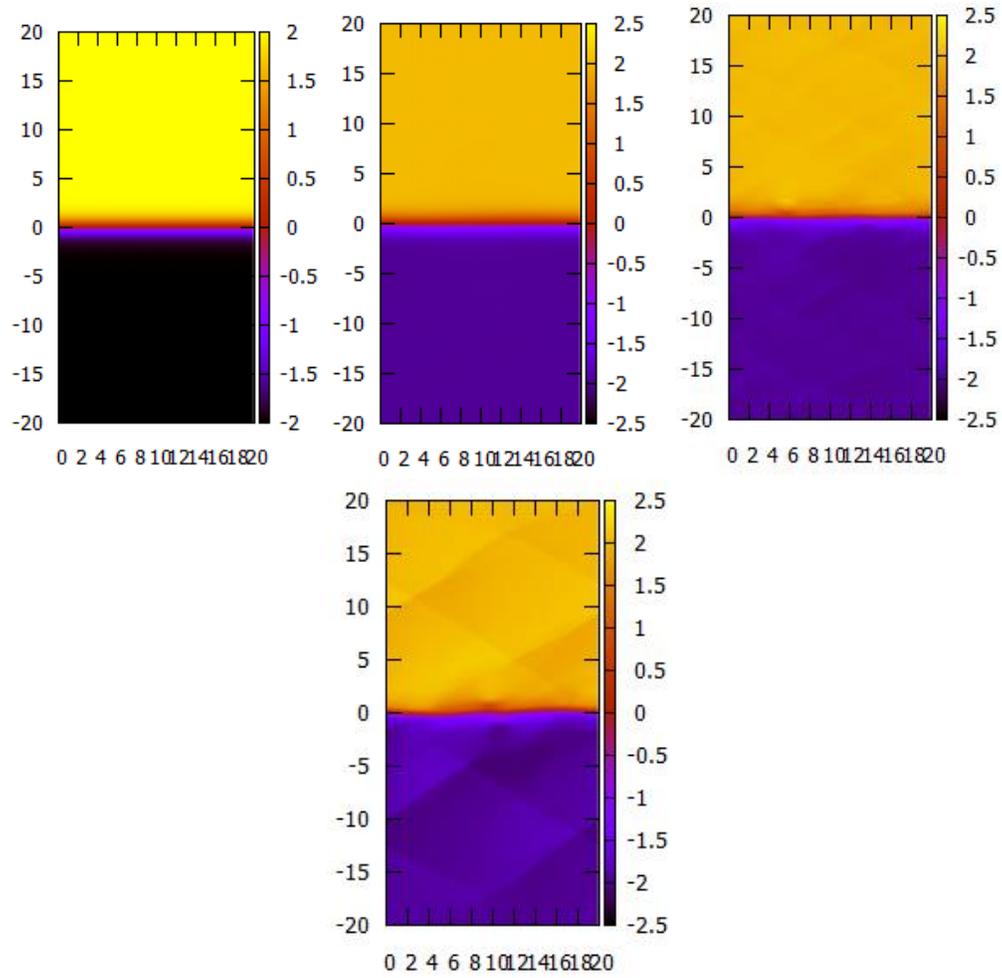
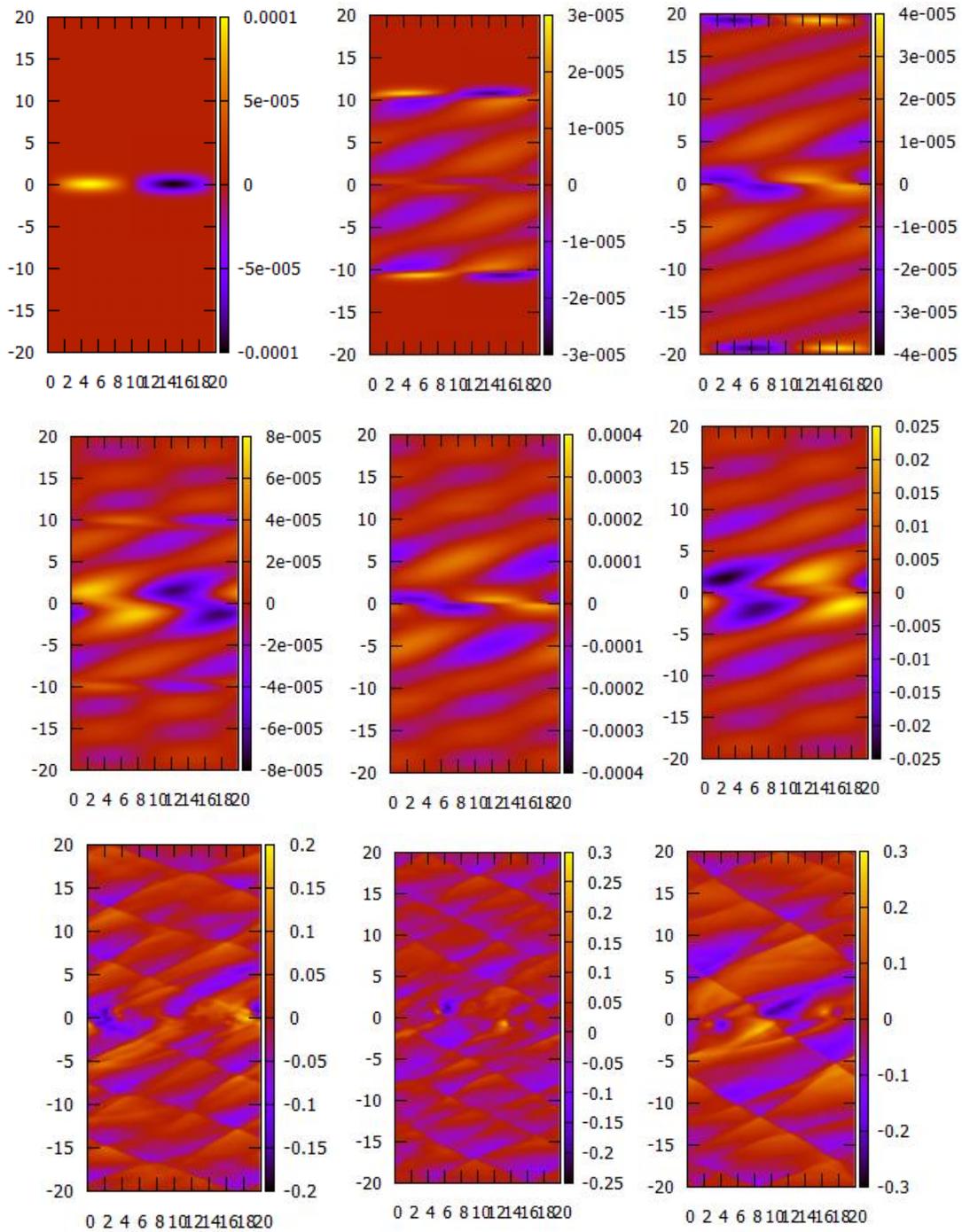


図 25 左上から順に $t=0,100,200,$ 下に $t=300$ のときの V_x の時間変化

V_y の時間変化



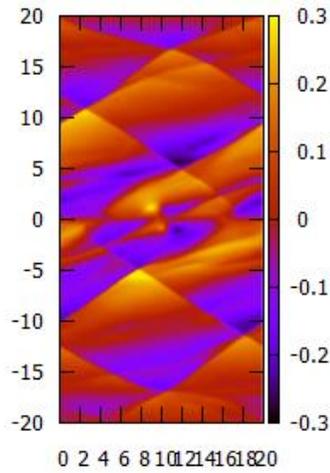
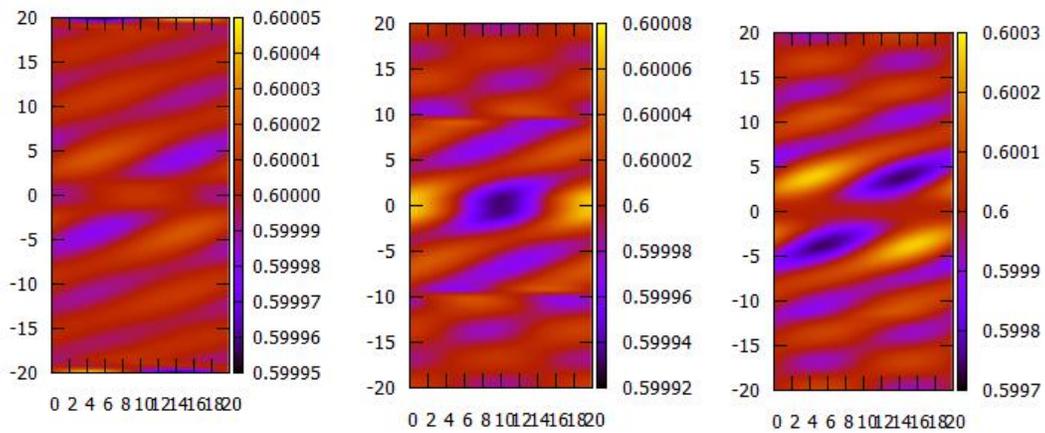
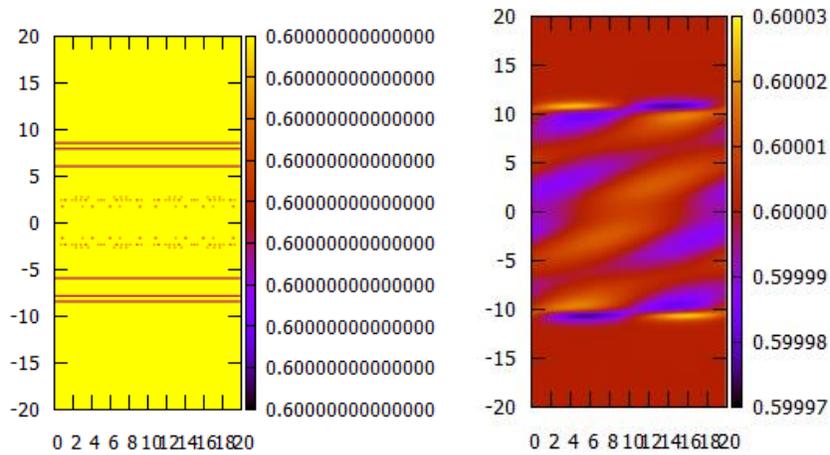


図 26 左上 1 段目から順に $t=0,10,20$, 左上 2 段目から順に $t=30,50,100$, 以下同じように $t=150,200,250, t=300$ のときの V_y の時間変化 Pr の時間変化



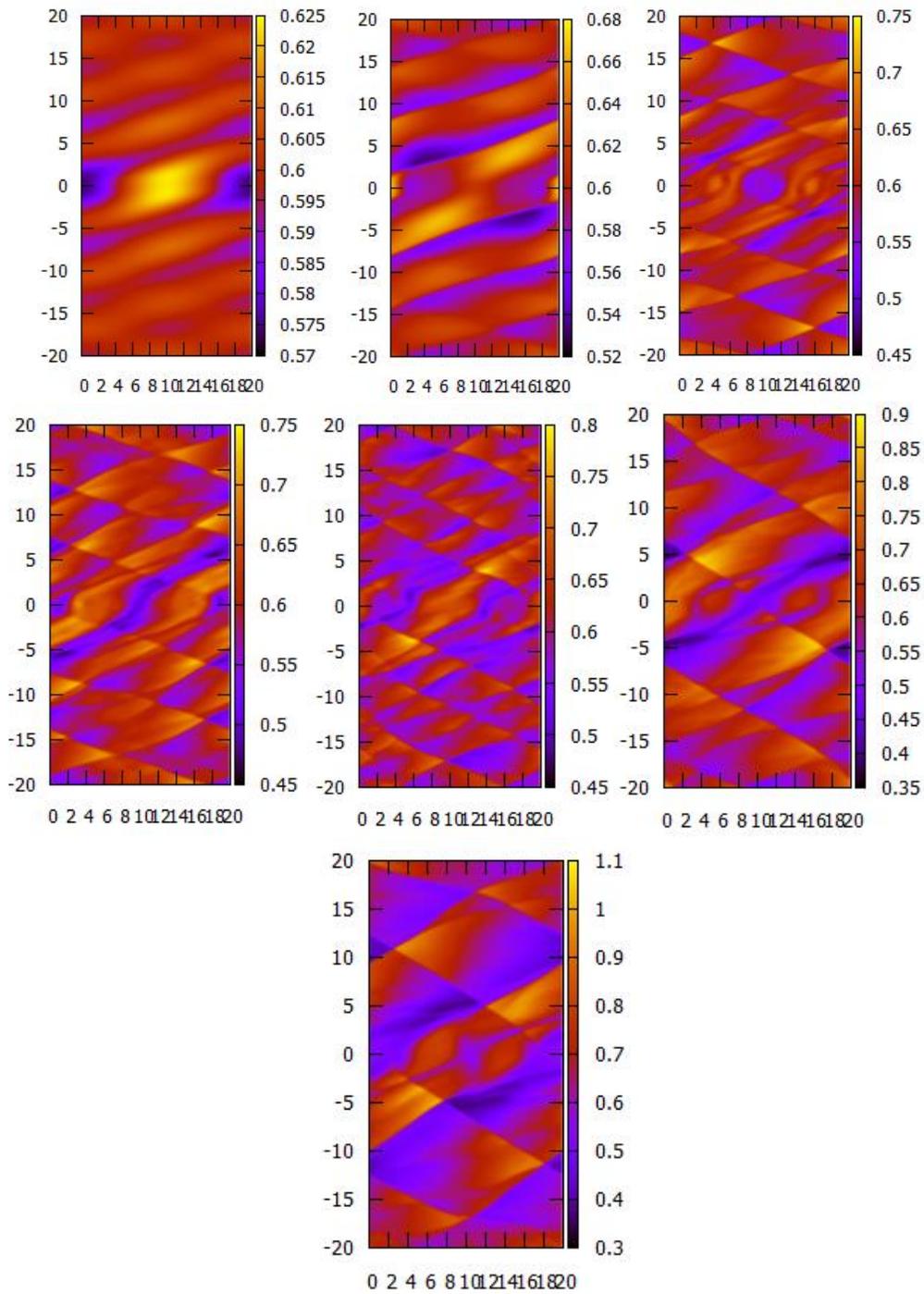


図 27 左上 1 段目から順に $t=0,10$, 左上 2 段目から順に $t=20,30,50$, 以下同じように $t=100,120,140, t=150,200,250, t=300$ のときの Pr の時間変化

M の時間変化

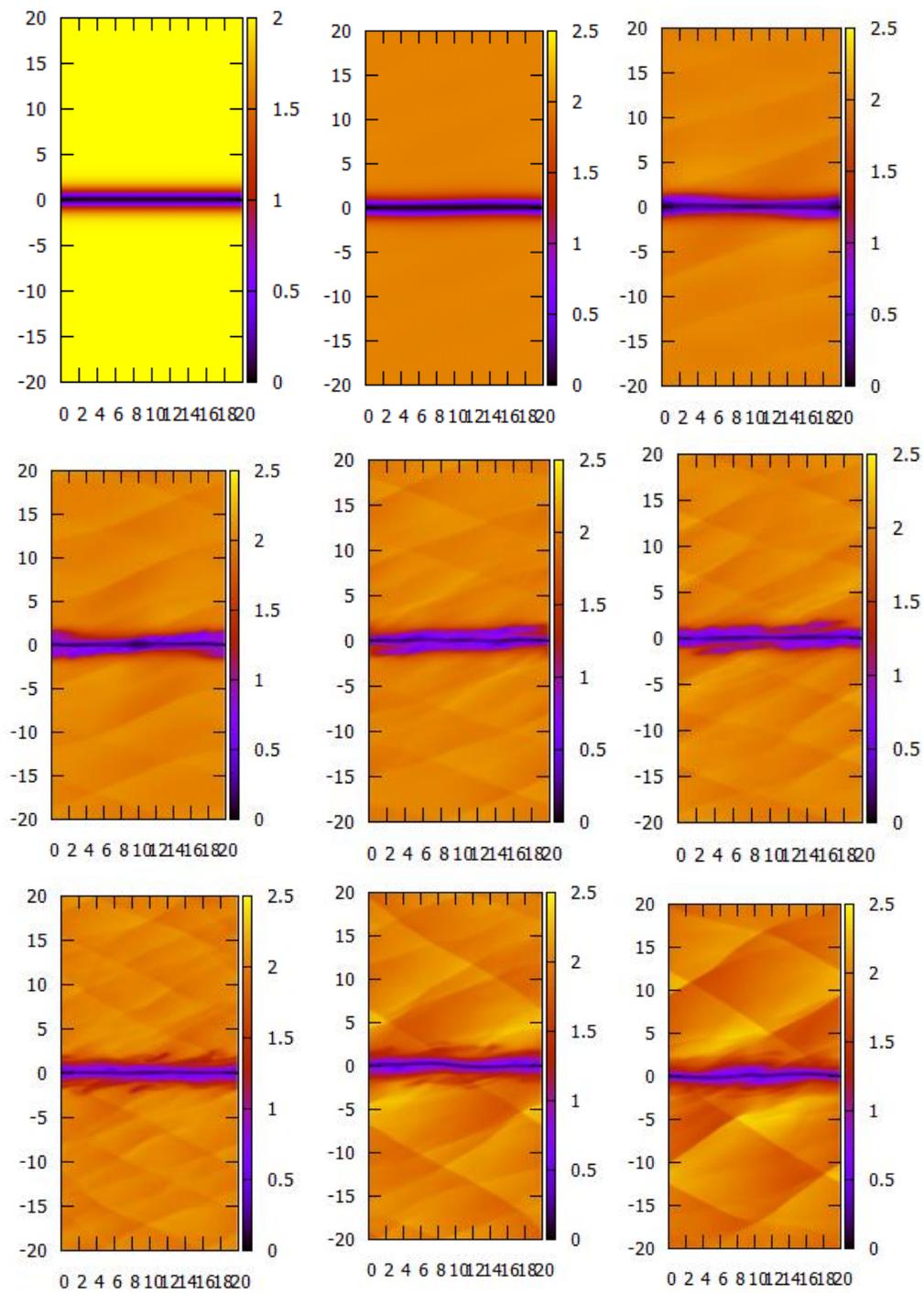


図 28 左上から順に $t=0,100,120$,左中から順に $t=130,140,150$,左下から順に $t=200,250,300$ のときの M の時間変化

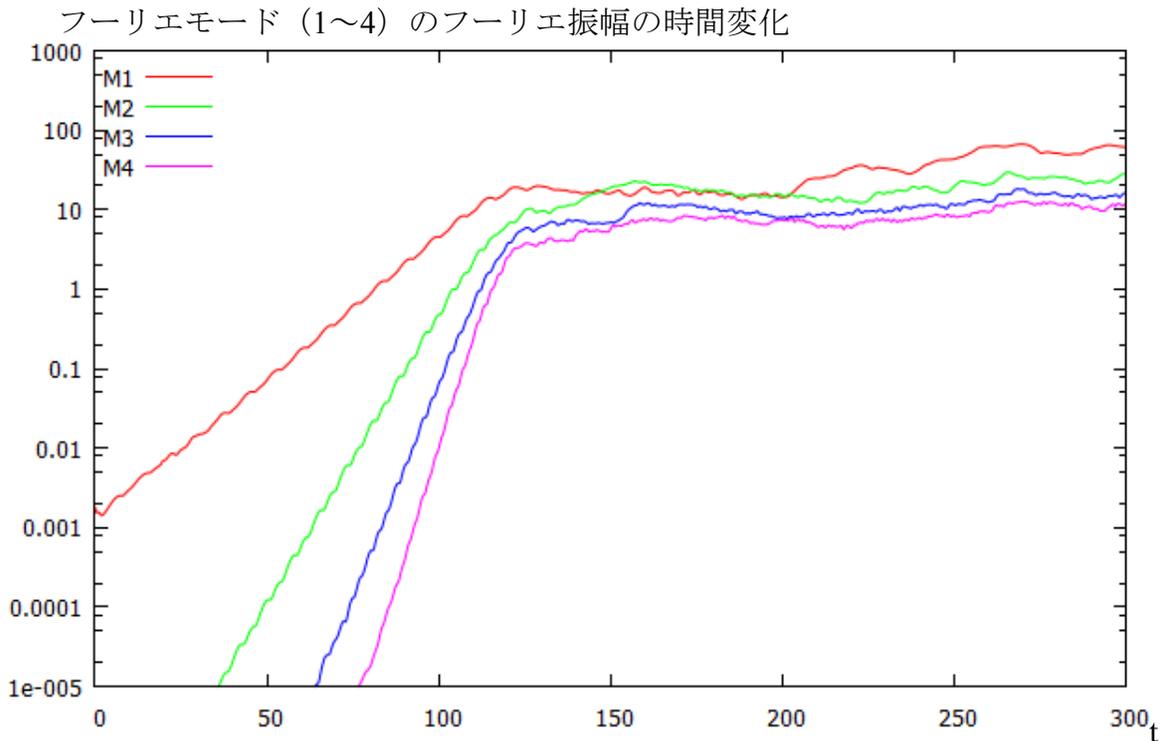


図 29 フーリエモード (1~4) のフーリエ振幅の時間変化の対数グラフ

ここで条件 3、4 に関する考察を行う。条件 3 では流体界面近傍以外で、条件 4 では流体界面近傍でそれぞれ $M < \sqrt{2}$ が、逆に前者は流体界面近傍で、後者は流体界面近傍以外で $M > \sqrt{2}$ となっている。ケルビン・ヘルムホルツ不安定は流体界面で起こるから、流体界面で $M > \sqrt{2}$ となっている条件 3 は擾乱の成長は遅いだろうと考えていたが、予想に反してその成長率は大きく、擾乱が成長している。しかし、これは擾乱が成長し続けて二次的不安定が発生したのではなく、最初の渦が、流体界面にでて、それがそのまま遠心力にしたがって境界に達し、それぞれの境界条件により返ってくることで生まれたものであると考える。これは図 23 の $t=170\sim 300$ を見ると明らかで、 x 方向の周期境界条件として x 軸の左端と右端が接続されているためである。また、条件 4 では条件 2 と同じようにフーリエ振幅が振動しながら成長している。これも条件 2 と同じように衝撃波構造が原因ではないかと考えるが、条件 2 では観測されなかった衝撃波構造が条件 4 では確認できる。つまり、このフーリエ振幅の振動は衝撃波構造によるものではなく、他に原因があることが推測される。この要因として条件 2、4 での共通かつ条件 1、3 では当てはまらない事柄、つまり速度勾配層をもつ流体界面でマッハ数 $M_0 > \sqrt{2}$ ではフーリエ振幅が虚数項を持つようになることが要因と言えるが、なぜ $M_0 > \sqrt{2}$ でフーリエ振幅が虚数項を持つようになるかは不明である。

以下表 2 にそれぞれの条件での設定をまとめる。

表 3 各条件のデータ一覧

	密度 ρ	初速 u	マッハ数 M
条件 1	1	± 0.5	0.5
条件 2	1	± 2	2
条件 3	$1 + \frac{15}{\cosh(y(j)^2)}$	± 0.5	$\begin{cases} 0.5 (M_c) \\ 2 (M_0) \end{cases}$
条件 4	$1 - \frac{15}{16 \cdot \cosh(y(j)^2)}$	± 2	$\begin{cases} 2 (M_c) \\ 0.5 (M_0) \end{cases}$

また、それぞれの条件でのフーリエモード 1 の場合のフーリエ振幅を比較してみる (図 30) と、条件 4 で成長率が一番大きく、次いで、条件 1, 3 がほぼ同じ、条件 2 の成長率が小さいのがよくわかる。そして速度勾配層の外に $M_c > \sqrt{2}$ を持つ条件 2, 4 が振動を持っている。

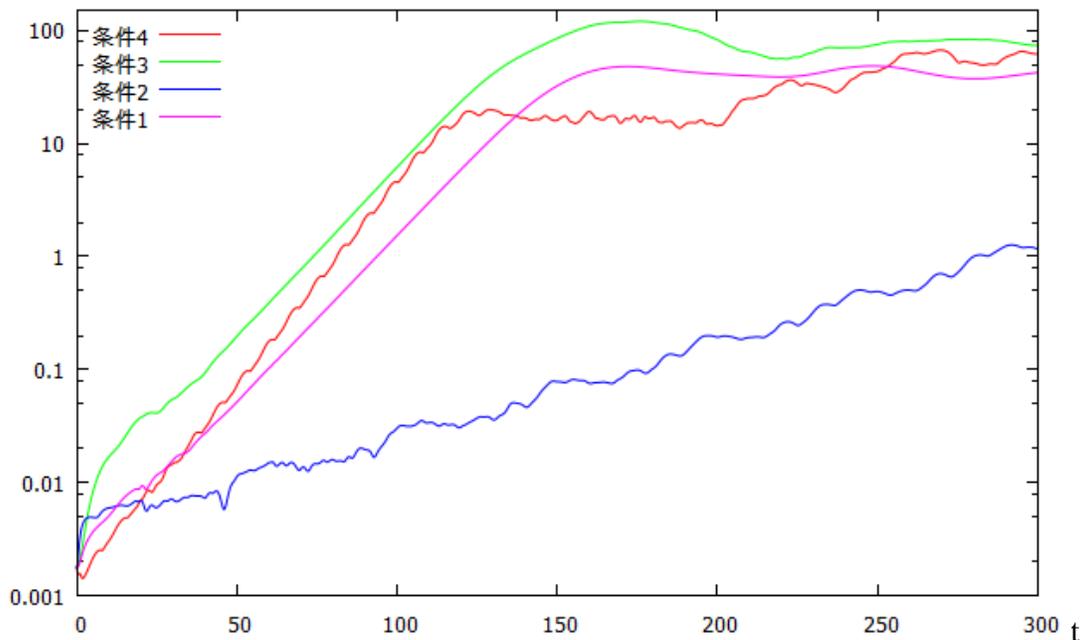


図 30 フーリエモード 1 でのそれぞれのフーリエ振幅の時間変化

第4章 結論

音速 c が密度 ρ と関係式で結ばれることを利用し、非一様密度場を与えることで非一様音速場を与え、ケルビン・ヘルムホルツ不安定性の非線形ダイナミクスを調べることでケルビン・ヘルムホルツ不安定性の成長率が速度勾配層中心の音速に対するマッハ数 M_0 によることがわかった。また、発生した乱流が $M_c > \sqrt{2}$ の領域に出ることで衝撃波構造を形成することがわかった。しかしながら、速度勾配層をもつ流体界面でマッハ数 $M_0 > \sqrt{2}$ のときフーリエ振幅が虚数項を持つようになる事についての理由や、 y 方向の境界条件の影響を考察することができなかった。今後課題とする。また、今回用いた条件3の設定（密度が小さい背景場中において、高密度の流体がすれ違う）は原子核衝突や宇宙ジェットのような高マッハ数の流れにおける不安定性の考察として用いることが検討できる。

謝辞

本論文を作成するにあたり、基礎的なことから本論文作成まで多くのご指導を頂いた三好 隆博 助教に多大なる感謝をいたします。杉立教授、志垣准教授、本間助教、先輩方には有益な意見を多く頂き、研究室の皆様には相談に乗っていただき、励ましてくださって感謝しております。

参考文献

- [1] W.BLUMEN,P.GDRAZIN AND D.F BILLINGS,1975: Shear layer instability of an inviscidcompressible fluid. Part 2, J . Fluid Mech. (1975), vol. 71, part 2, p p . 305-316
- [2] Yosuke Matsumoto and Masahiro Hoshino,2004: Onset of turbulence induced by a Kelvin-Helmholtz vortex, GEOPHYSICAL RESEARCH LETTERS, VOL. 31, L02807, doi:10.1029/2003GL018195
- [3] <http://www.awanavi.jp/docs/2013031300573/>
- [4] http://www.nasa.gov/mission_pages/hubble/science/supersonic-jets.html
- [5] http://solarsystem.nasa.gov/multimedia/display.cfm?Category=Planets&IM_ID=13347
- [6] L D Landau · E.M. Lifshitz,1987: Fluid Mechanics, Second Edition: Volume 6 (Course of Theoretical Physics), Pergamon Press
- [7] Hong Luo*and Joseph D. Baum,2005: Extension of Harten–Lax–van Leer Scheme for Flows at All Speeds, AIAA JOURNALVol. 43, No. 6,
- [8] Harten, J.andCrozier, J.E.M. and McCreath, B. and Hay, A. andMcMillan, D.C. and McArdle, C.S. and Kinsella, J.,2008: Effect ofintraoperative fluid optimisation on renal function in patients undergoingemergency abdominal surgery; a randomised controlled pilot study(ISRCTN 11799696) Fluid optimisation for emergency surgery.
- [9] GUANG-SHANJIANG†ANDCHI-WANGSHU,1996: Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes*, OURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS126,202–228

論文中に引用の無い参考文献

MATHEMATICS OF COMPUTATION Volume 67, Number 221, January
1998, Pages 73-85 S 0025-5718(98)00913-2: TOTAL VARIATION
DIMINISHING RUNGE-KUTTA SCHEMES

藤井孝蔵、1995: 流体力学の数値計算,東京大学出版会