

2017年度 卒業論文

超音速流における Kelvin-Helmholtz 不安定性に対する境界効果

2018年2月9日

広島大学理学部物理科学科 クォーク物理学研究室

中原やよい

指導教員 杉立 徹 教授

主査 三好 隆博 助教

副査 樋口 克彦 准教

## 要約

宇宙・地球流体や工学的な流れなど、あらゆる流体において、大きな速度勾配を持つ領域(速度シア層)が自発的にまたは強制的に形成される。速度シア層はゆらぎに対して不安定であることが古くから知られており、この流体不安定性をケルビン・ヘルムホルツ不安定性(K-H 不安定性)という。一般に、流体の圧縮性は K-H 不安定性の成長率を小さくする効果を持つ。特に超音速流れの速度シア層は、無限遠方で摂動がゼロになる境界条件では線形安定であることが理論解析により示された。しかし、天体周辺の流れやジェットエンジンなどでは物体付近に超音速の速度シア層が形成し得るため、流体は弱く不安定化すると考えられるが、その非線形発展は明らかではない。そこで本研究では、超音速流中で成長する K-H 不安定性と壁境界との非線形相互作用に関するシミュレーション研究を行った。特に粘性がない流体を考え、圧縮性オイラー方程式を基礎方程式とし、超音速および亜音速の速度シア層の時間発展を数値的に解いた。片側の壁境界が速度シア層の近傍に位置するとき、非対称な渦が成長することを明らかにした。また、その渦構造と超音速流の相互作用により、衝撃波乱流的な構造が発達することも見出した。

## 目次

第 1 章	序論	4
第 2 章	流体力学の基礎方程式	7
2-1	Euler の流れを表わす方法	7
2-2	連続の式	8
2-3	エネルギーの式	9
第 3 章	Kelvin - Helmholtz 不安定性	11
第 4 章	数値シミュレーションモデル	16
第 5 章	数値シミュレーション結果・考察	19
第 6 章	結論	44
	参考文献	45

## 第 1 章 序論

地上、宇宙空間におけるあらゆる空間・時間において「渦」が普遍的に生じている。流体力学において、自然界で発生する鳴門海峡の渦潮や木星の表面に現れる渦などの構造を理解・研究する上で最も重要になるのが Kelvin-Helmholtz 不安定性である。Kelvin-Helmholtz 不安定性は、流体の流れの異なる 2 つの物質が接しているときに二体の境界に生じる不安定性のことを言う。現在まで亜音速流における Kelvin-Helmholtz 不安定性および渦についての研究が進められてきた。



図 1 木星の表面

<http://www.22ab.com>



図 2 鳴門海峡

<https://kotobank.jp/word/>

木星の表面では、図 1 のように渦が発生している様子が見られる。木星表面では西向きと東向きにジェットと呼ばれる風が吹いている。東向きのジェットの速度は、赤道上で最小になり高緯度になるにつれて大きくなる。したがって、速度シア層が生じケルビン・ヘルムホルツ不安定性が存在する。このときジェットの速度は  $100[\text{m/s}]$  以上にもなる[1]。

また、図 2 の鳴門の渦潮に関しては、潮汐により大量の海水が瀬戸内海に流れ込む時と瀬戸内海から流れ出す時に発生する。速い潮流と海岸付近の穏やかな流れの間に速度シア層が生まれ渦が起きる。このときの流速は 15~20km/h である[2]。

亜音速流の Kelvin-Helmholtz 不安定性については先ほども述べたように、研究やシミュレーションが進められているのでよく知られているが、超音速流における Kelvin-Helmholtz 不安定性に関してはまだ分かっていないことが多い。超音速流とは、音速を超える速度の流れのことを言う。私たちの身の回りではあまり馴染みはないが、J E T 機のエンジン内部(図 3)や、火星の表面に到達する太陽風(図 4)もまた超音速の流れが生じている。



図 3 ジェット機のエンジン内部

<https://www.nasa.gov/centers/dryden/multimedia/imagegallery/SR-71/EC92-1284-1.html>

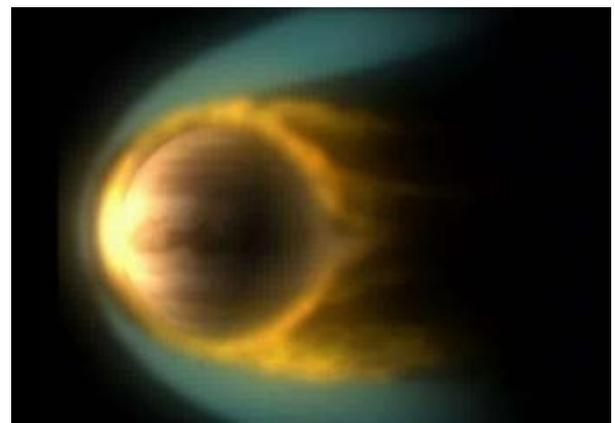


図 4 太陽風の火星表面との相互作用

[https://www.slideshare.net/isas\\_pr/20170826-79169914](https://www.slideshare.net/isas_pr/20170826-79169914)

非圧縮流体近似では、不連続の速度シア層はあらゆる擾乱に対して不安定であり、その不安定性の線形成長率は波数に比例する[3]。現実の流体では速度シア層は厚み  $a$  があり、波数が  $1/a$  程度以上の擾乱の成長率は 0 となる。また、一般に流体の圧縮性効果はケルビン・ヘルムホルツ不安定性の成長率を抑制することが知られる[4]。

特に無限遠方で擾乱が0になるような境界条件において、超音速の速度シア層は安定であることが理論解析により示された[5]。一方で境界条件を変更することによって、超音速の速度シア層も不安定になることも示されたが[6]、その成長率は非常に小さい。

しかし、実際には物体付近において超音速の速度シア層は形成され得るため（図3, 4）、境界条件を無限遠方においた理論解析では現実の超音速速度シア層のダイナミクスを予測するのは困難である。したがって、本研究では超音速流で発生する渦と境界との相互作用を明らかにすることを目的にシミュレーションを行う。

## 第 2 章 流体力学の基礎方程式

### 2-1. 運動方程式

完全流体において、隣り合う 2 つの部分及び及ぼし合う力は圧力で表わされる。圧力の大きさは単位面積に換算する。圧力  $p$  の時、微小面積  $dS$  を通して働く力は  $pdS$  である。流体の運動を表わすには流体の速度  $\mathbf{v}$ 、圧力  $p$ 、密度  $\rho$  の 3 つが分かればよい。流体の運動を調べるための方法が二つある。Lagrange の方法と Euler の方法があるが、今回は Euler の方法を使う。

Euler の方法では、各瞬間において空間の各点における流れの様子を調べる。流体の速度  $\mathbf{v}$ 、圧力  $p$ 、密度  $\rho$  などの量を  $x, y, z, t$  の関数として表す方法である。流れを表わす関数  $F(x, y, z, t)$  が与えられているとき、流体の速度を  $\mathbf{v}(u, v, w)$  とする。すると、 $F(x, y, z, t)$  の微小時間  $\Delta t$  の間の変化量  $\Delta F$  は次のように表される。

$$\begin{aligned}\Delta F &= F(x + u\Delta t, y + v\Delta t, z + w\Delta t, t + \Delta t) - F(x, y, z) \\ &= \frac{\partial F}{\partial x} u\Delta t + \frac{\partial F}{\partial y} v\Delta t + \frac{\partial F}{\partial z} w\Delta t + \frac{\partial F}{\partial t} \Delta t\end{aligned}$$

となり、演算子の形で

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)$$

と表わすことができ、

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases}$$

となる。したがって、Euler の方法での運動方程式は、

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p$$

と表わされる。

## 2-2. 連続の式

粘性を無視した完全流体を考える。固定した閉曲面  $S$  によって囲まれる体積  $V$  の領域において、微小な面積  $dS$ 、面に垂直な単位ベクトル  $\mathbf{n}$ 、流体の速度  $\mathbf{v}$ 、密度  $\rho$  が与えられている。微小な面積  $dS$  から流れ出す流体の質量は、 $\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$  と表わされる。単位時間に閉曲面  $S$  を通って流れ出る流体の質量に相当する部分だけ体積  $V$  中の質量は減少するので、質量の保存は

$$\frac{\partial}{\partial t} \oint_V \rho dV = - \oint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = - \oint_S \rho \mathbf{v}_n dS$$

と表わせる。ここで Gauss の定理を用いて

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV = 0$$

となる。任意の体積  $V$  で成り立つためには

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

この式は**連続の式**を示している。

### 2-3. エネルギー式

流体の運動に伴い、流体の微小要素は圧縮されたり、膨張したりするなど変化する。変化はエネルギーの保存則である熱力学第 1 法則から得られる。流体の微小要素が周囲と熱の交換をせず、断熱変化をするとする。エントロピーを  $S$  とすると、断熱変化ではエントロピーは変化しないので

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)s = 0$$

となる。理想気体の場合は、 $p(s, \rho) = e^{(s-s_0)/c_v} \rho^\gamma$  から

$$\frac{d}{dt} \left( \ln \frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0$$

とわかる。さらに変形させると

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) + \mathbf{v} \cdot \nabla \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0$$

表わせる。

流体の力学的エネルギーを含む式を考える。運動方程式は

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = F$$

両辺に  $\mathbf{v}$  を作用させると

$$m\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = F \cdot \mathbf{v}$$

この式は運動エネルギーの変化と単位時間当たりの仕事率を表わしている。

ここで、流体の運動方程式を流れの微分で表わすと

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{v} \cdot \nabla p + \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}$$

となる。エンタルピー  $h$  とエントロピー  $s$  で書き換えると

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} = \frac{dh}{dt} - T \frac{ds}{dt}$$

となり、断熱変化を考える場合、

$$-\frac{1}{\rho} (\mathbf{v} \cdot \nabla p) = -\frac{dh}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t}$$

と等しくなる。したがって

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} v^2 + h \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}$$

となり、両辺に  $\rho$  をかけたものと、連続の式の両辺に  $\left( \frac{v^2}{2} + h \right)$  をかけたものを足すと

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left( \frac{v^2}{2} + h \right) \right\} + \nabla \cdot \left\{ \rho \mathbf{v} \left( \frac{v^2}{2} + h \right) \right\} = \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}$$

となる。これをまとめると

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left( \frac{v^2}{2} + \varepsilon \right) \right\} + \nabla \cdot \left\{ \rho \mathbf{v} \left( \frac{v^2}{2} + h \right) \right\} = 0$$

となり、これは**エネルギーの式**を示している。

### 第3章 Kelvin-Helmholtz 不安定性

まず、閉曲線  $C$  を考える。循環を積分を用いて表すと

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$$

となり面積分で表せば

$$\Gamma = \int_S (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dS + \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS$$

となる。ここで  $\boldsymbol{\omega}$  は

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$$

である。また、流体と一緒に動く閉曲線  $C$  に沿った循環  $\Gamma$  の変化を求めると

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_S \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS + \oint_C \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{l})$$

となる。これをベクトル公式

$$\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{l}) = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{l}$$

と Stokes の定理を用いて

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_S \left\{ \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) \right\} \cdot \mathbf{n} dS$$

と表わされる。このとき

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega})$$

が成立するとき

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0$$

が成り立つ。循環 $\Gamma$ は流れに沿って保存されるということを意味している。これを **Kelvin の循環定理**という。

運動方程式において

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \nabla\left(\frac{1}{2}v^2\right) - \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$$

とし、外力  $\mathbf{g}$  は  $\mathbf{g} = -\nabla\phi$  とし、

$$\Pi(p) = \int \frac{dp}{\rho(p)}$$

を用いて表すと

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla\left(\frac{1}{2}v^2 + \Pi + \phi\right) + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$$

となる。流れの速度が一定という条件  $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$  を用いると

$$\frac{\partial\left(\frac{v^2}{2} + \Pi + \phi\right)}{\partial s} = 0$$

が成立する。さらに積分すると

$$\frac{1}{2}v^2 + \Pi + \phi = \text{定数}$$

となる。これを **Bernoulli の定理**という。

流れの速度の異なる 2 つの流体が接している場合、その不連続面には不安定性が生じる。

ここでは、この不安定性について論じる。2 種類の流体が面  $S$  で接しているとする。それぞれの密度を  $\rho_1, \rho_2$ 、速度を  $U_1, U_2$  とする。今、鉛直方向に  $-g$  の重力が働いている時を考える。さらに流体の初期状態での密度の偏りはなく、粘性は常に考えない。

ここで、面 S 上の任意の点の鉛直方向に微小変位  $\Delta y$  を与える。この微小変動により密度が  $\rho_1$

から  $\rho_1 + \delta\rho_1$  に変化し、さらに圧力が  $p + \delta p$ 、速度の水平成分が  $U + u$ 、速度の  $y$  成分が

$U + v$  に変化すると仮定する。

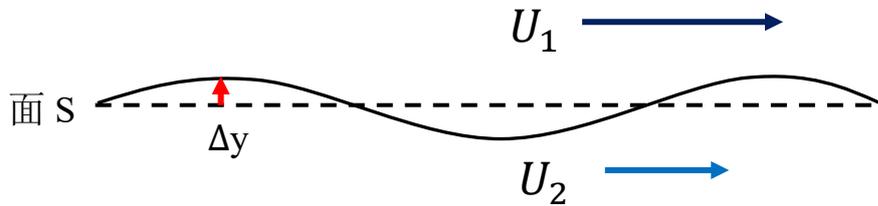


図 5 Kelvin-Helmholtz 不安定性

微小変動によって生じる微小量での運動方程式について考える。

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho U \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x} \delta p$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho U \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y} \delta p - g \delta \rho$$

連続の式で、縮まない流体では

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

が成り立つ。微小量に関して

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + U \frac{\partial \delta \rho}{\partial x} = -w \frac{d\rho}{dz}$$

となる。境界面の位置を  $y_S$  とすると、境界面も微小変動により  $\delta y$  変化するので

$$\frac{d\delta y_S}{dt} = \frac{\partial \delta y_S}{\partial t} + U_S \frac{\partial \delta y_S}{\partial x} = v(y_S)$$

と表わされる。

ここで、波動関数の

$$f = Ae^{-i(kx-\omega t)}$$

を用いると、

$$i\rho v(kU - v) + \rho v \frac{dU}{dy} = -ik\delta\rho$$

$$iku + \frac{dv}{dy} = 0$$

これらの式より

$$-i\rho \frac{dv}{dy}(kU - v) + ik\rho v \frac{dU}{dy} = k^2\delta\rho$$

が得られる。また、

$$i\rho v(kU - v) = -\frac{d\delta p}{dy} - g\delta\rho$$

$$i\delta\rho(kU - v) + v \frac{d\rho}{dy} = 0$$

この2つの式から

$$i\rho v(kU - v) = -\frac{d\delta p}{dy} - \frac{igv \left(\frac{d\rho}{dy}\right)}{(kU - v)}$$

が得られる。これらの得られた2つの式を用いると

$$\frac{d}{dy} \left\{ \rho \left(\frac{dv}{dy}\right) (kU - v) - k\rho \left(\frac{dU}{dy}\right) v \right\} - \rho k^2 (kU - v)v = gk^2 \frac{v}{(kU - v)} \left(\frac{d\rho}{dy}\right)$$

となる。また、面 S の境界条件については

$$\delta y_s = \frac{\omega_s}{i(kU - \omega)}$$

と表わされる。この式を用いて  $y_s - \varepsilon$  から  $y_s + \varepsilon$  まで積分し、 $\varepsilon \rightarrow 0$  の極限をとると

$$\begin{aligned} & \{f(y_s + 0) - f(y_s - 0)\} \left[ \rho \left( \frac{dv}{dy} \right) (kU - v) - k\rho v \left( \frac{dU}{dy} \right) \right] \\ & = gk^2 \frac{v}{(kU - v)} \{f(y_s + 0) - f(y_s - 0)\} \end{aligned}$$

となり、境界条件を表わしている。

さらに、 $U_1 \neq U_2 \neq 0$ の条件で

$$k^2 \alpha_1 \alpha_2 (U_1 - U_2)^2 > gk(\alpha_1 - \alpha_2)$$

を満たすとき、 $\omega$ は複素数になり、不連続面が不安定になる。

$$k_{min} = \frac{g(\alpha_1 - \alpha_2)}{\alpha_1 \alpha_2 (U_1 - U_2)^2} = \frac{g(\rho_1^2 - \rho_2^2)}{(U_1 - U_2)^2 \rho_1 \rho_2}$$

とおくと $\rho_1 > \rho_2$ の時、 $k > k_{min}$ の変動は成長するので不安定になる。 $g=0$ の時、不等号は常に

満足するので非圧縮流体の不連続の速度シア層はあらゆる端数の擾乱に対して不安定である。

この不安定性を **Kelvin-Helmholtz 不安定性**という。

## 第4章 数値シミュレーションモデル

数値シミュレーションは、オイラー方程式・連続の式・エネルギーの式・運動量の式を用いて計算を行った。

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ e \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + p \\ \rho v_y v_x \\ (e + p)v_x \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} \rho v_y \\ \rho v_x v_y \\ \rho v_y^2 + p \\ (e + p)v_y \end{pmatrix} = 0$$

この式に加え、

$$p = (\gamma - 1) \left( e - \frac{1}{2} \rho (v_x^2 + v_y^2) \right)$$

を用いた。この式において変数および定数は次の意味を持つ。

記号	名称
$\rho$	密度
$v_x$	速度の $x$ 成分
$v_y$	速度の $y$ 成分
$p$	圧力
$\gamma$	比熱比
$e$	全エネルギー密度

また、音速を  $c$  とすると

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$$

と表わせられる。これらの変数のうち、 $\rho, p, v_x, v_y$  は時間変化に伴って変化する。

そこで、 $T = 0$  における初期条件を与える。 $T \neq 0$  ではオイラーの方程式を満たすように変化する。

今回与えた初期条件を次に示す。

T = 0において

$$\rho = 1$$

$$p = \frac{\rho}{\gamma} = \frac{1}{\gamma}$$

$$v_x = v_0 \tanh y$$

$$v_y = \delta v_y \sin\left(\frac{2\pi x}{L_x}\right) e^{-y^2}$$

$$\delta v_y = 10^{-4}$$

$$a = 1$$

ただし、 $v_0$ はマッハ数(=流体の速さ/音速)を指している。

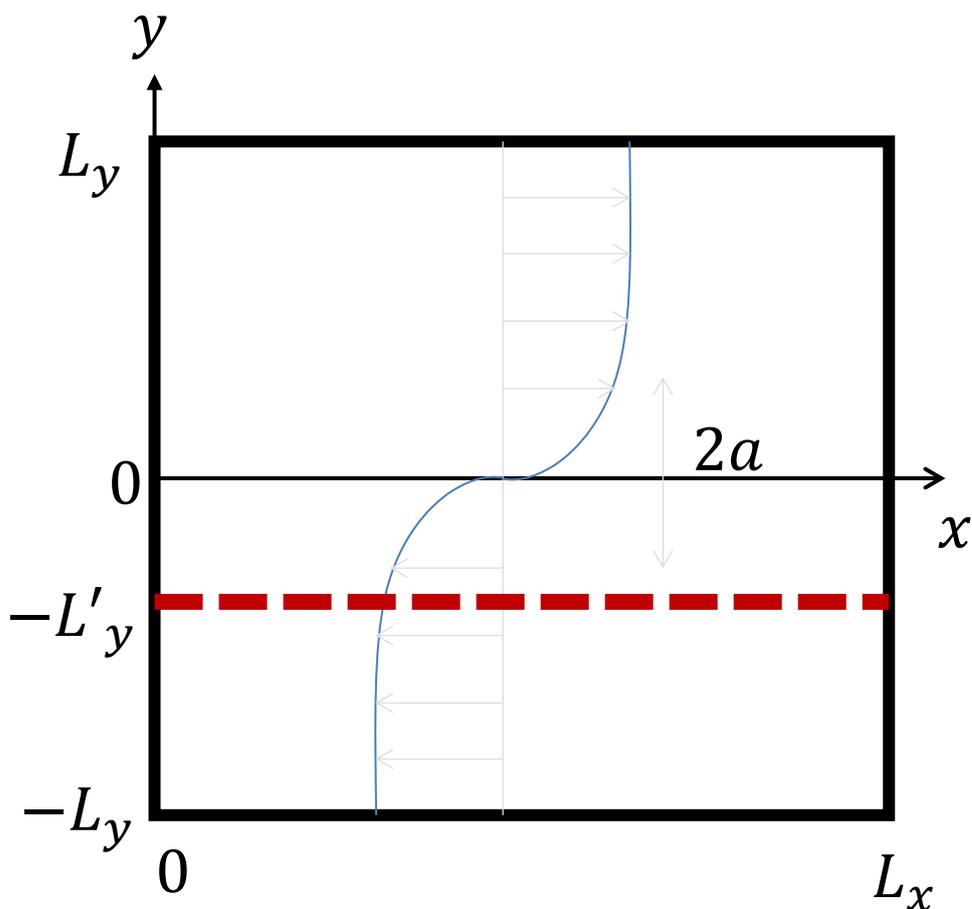


図6 速度のx成分とy成分の関係

図3のように速度のx成分がy変位によって変化するという初期条件を与える。

$$v_x \propto \tanh y$$

と与えることで、速度シア層を表わすことができる。このようにして今回の数値シミュレーションを行った。

超音速の流れでは衝撃波が自発的に形成されるため、超音速流を取り扱う数値シミュレーションにおいては、衝撃波を正確に解くことが必要不可欠となる。

しかし、中心差分法などの古典的な手法では、衝撃波など不連続解近傍に数値的振動が発生し、数値シミュレーションが破綻する。そこで不連続解を数値的に安定に解くため、これまでに様々な数値解法が研究開発されてきた[7]。

特に本研究では、衝撃波と接触不連続を安定に、かつ高く解像し、また計算効率の良い Harten-Lax-van Leer-Contact (HLLC) 近似リーマン解法[8,9]を採用した。

さらに滑らかな分布において非常に高い精度を達成するため、5次精度の Weighted Essentially Non-Oscillatory (WENO) 法[10]を利用した。

時間積分には3次の Strong Stability-Preserving (SSP) Runge-Kutta 法[11]を用いた。

本論文の数値シミュレーションにおいて、格子幅は全て

$$\Delta x = \Delta y = 0.1$$

とした。

## 第5章 数値シミュレーション結果・考察

今回、第4章で述べた数値シミュレーションモデルを用いて実験を行った。

ここで対流マッハ数を $v_0$ で表わす。マッハ数は局所的流れの速度の大きさ $|v|$ とその時の音速 $c$ を

用いて

$$v_0 = \frac{|v|}{c}$$

と定義される。

それぞれ次の条件で計算を行った。

	$y_{min}$	$y_{max}$	$v_0$	T
Case1	-20	20	0.5	$0 < T < 300$
Case2	-20	20	1.2	$0 < T < 800$
Case3	-3	20	1.2	$0 < T < 800$
Case4	-3	20	0.8	$0 < T < 800$

[Case1]

まず初めにこの数値シミュレーションモデルの動作確認を行うために、超音速より比較的に低速の亜音速の流れでかつ境界の距離が十分に遠い場合のケルビン・ヘルムホルツ不安定性の成長の様子を示した。

このとき第4章で述べた初期条件に加え、次の条件を与えた。

$$\left\{ \begin{array}{l} v_0 = 0.5 \\ L'_y = -20 \\ v_y(y = 20) = v_y(y = -20) = 0 \\ 0 \leq T \leq 300 \end{array} \right.$$

この条件を与えたうえで、 $v_x$ の様子を時間変化で表わした。

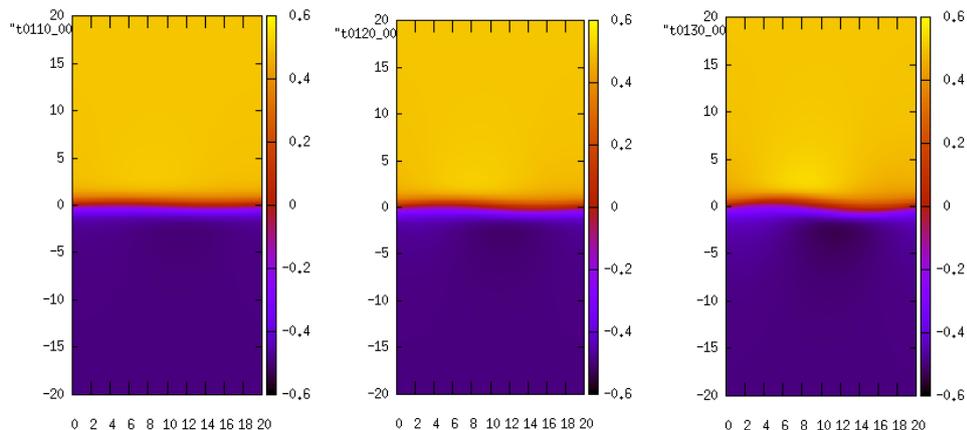


図 7  $T=110$  での  $v_x$

図 8  $T=120$  での  $v_x$

図 9  $T=130$  での  $v_x$

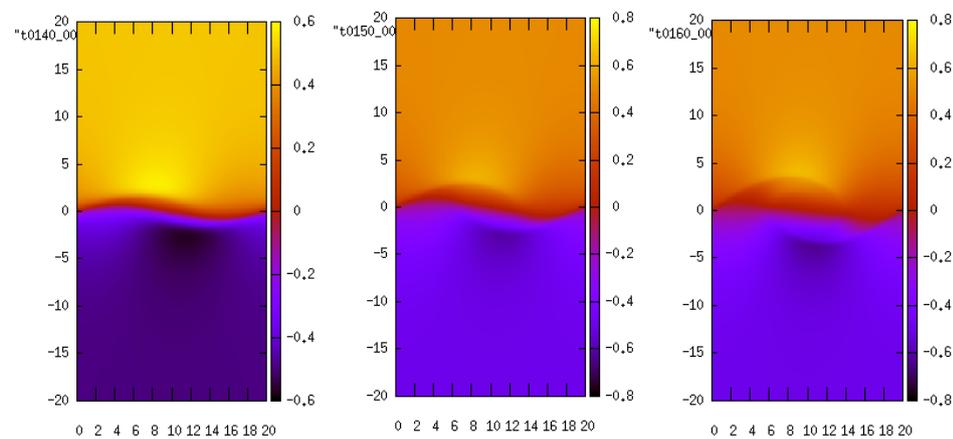


図 10  $T=140$  での  $v_x$

図 11  $T=150$  での  $v_x$

図 12  $T=160$  での  $v_x$

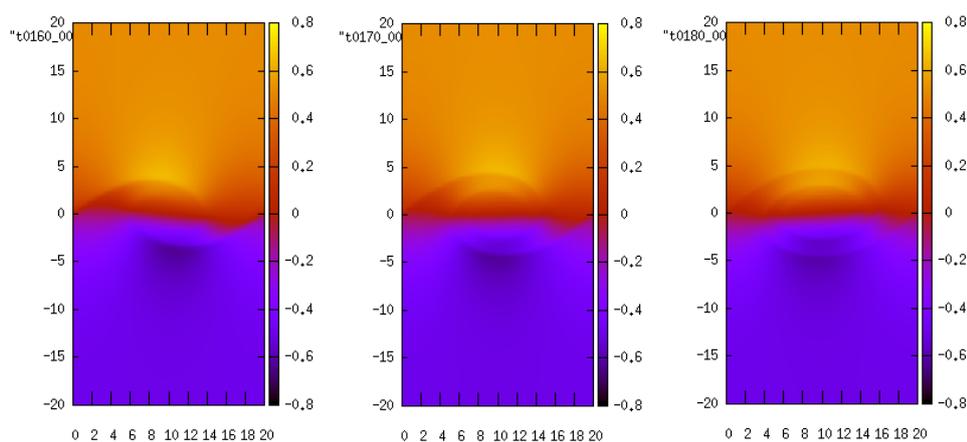


図 13  $T=170$  での  $v_x$

図 14  $T=180$  での  $v_x$

図 15  $T=190$  での  $v_x$

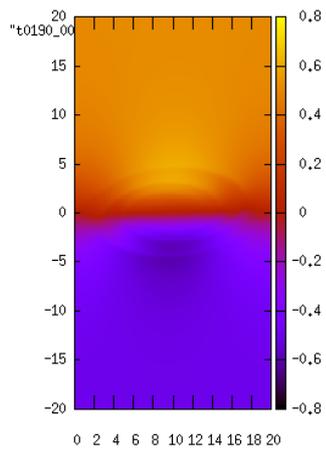
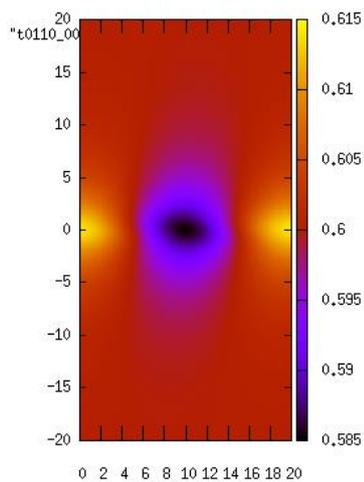
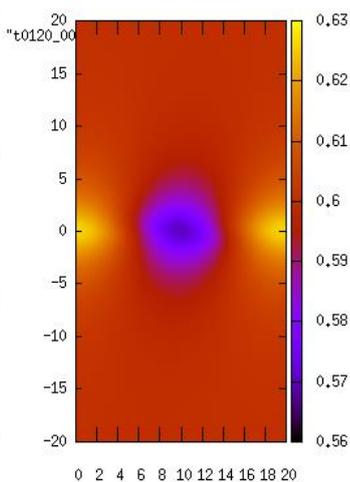
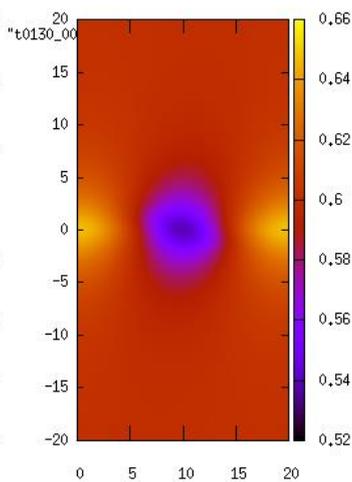
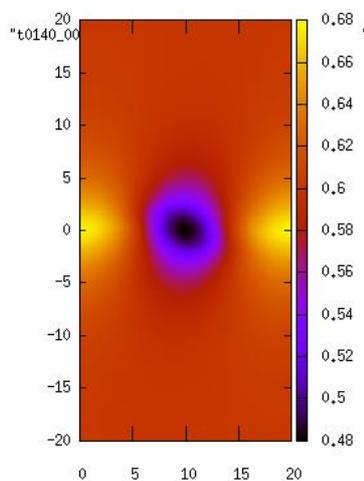
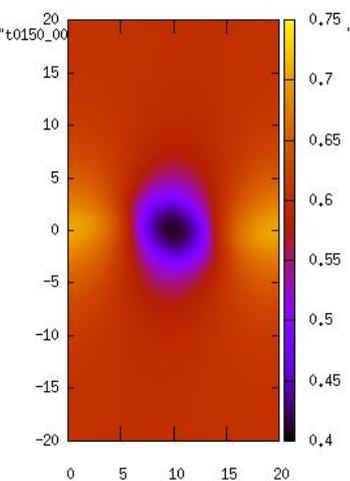
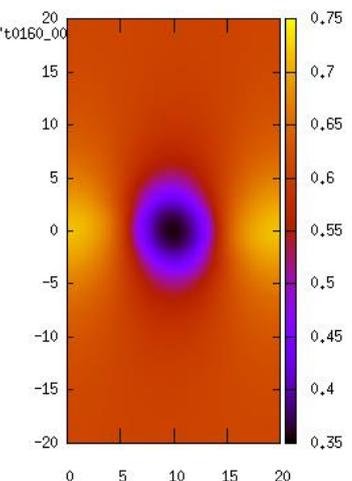
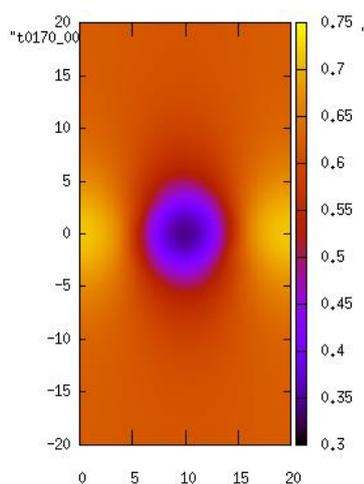
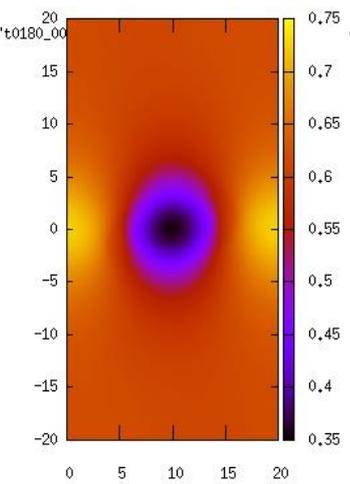
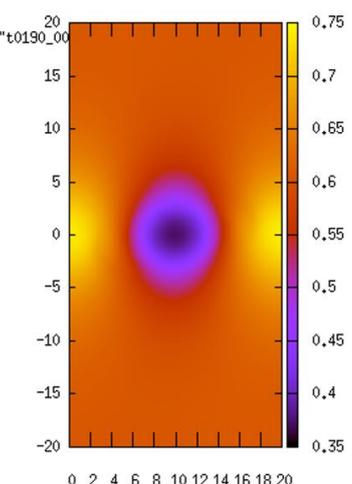


図 16 T=200 での  $v_x$

この図は、横軸を  $x$ 、縦軸を  $y$ 、色の度合いは  $v_x$  の大きさを表わしている。

$v_x$  のグラフを見る限り、渦が発生している様子が読み取れる。また、密度  $\rho$  もここに示す。

図 17 T=110 での密度 $\rho$ 図 18 T=120 での密度 $\rho$ 図 19 T=130 での密度 $\rho$ 図 20 T=140 での密度 $\rho$ 図 21 T=150 での密度 $\rho$ 図 22 T=160 での密度 $\rho$ 図 23 T=170 での密度 $\rho$ 図 24 T=180 での密度 $\rho$ 図 25 T=190 での密度 $\rho$

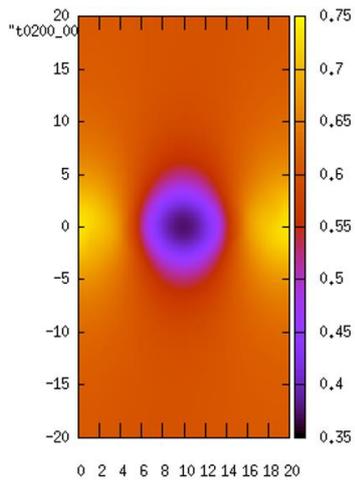


図 26 T=200 での密度 $\rho$

発生していることが確認できたのでプログラムの正当性が証明できた。

[Case2]

ここで次の条件を与え、超音速流での境界が十分に遠いときの Kelvin-Helmholtz 不安定性の様子を評価した。

$$\left\{ \begin{array}{l} v_0 = 1.2 \\ L'_y = -20 \\ v_y(y = 20) = v_y(y = -20) = 0 \\ 0 \leq T \leq 800 \end{array} \right.$$

この条件で $v_x$ の時間変化を示した。

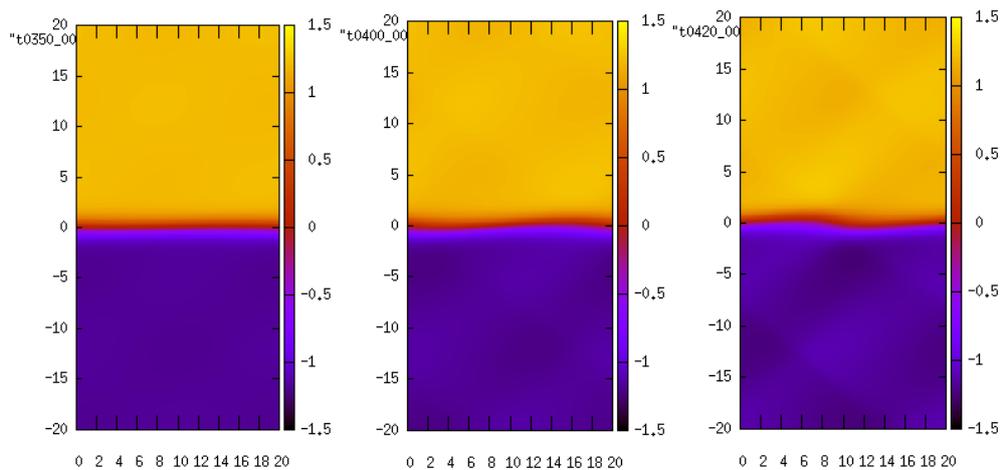


図 27 T=350 での $v_x$

図 28 T=400 での $v_x$

図 29 T=420 での $v_x$

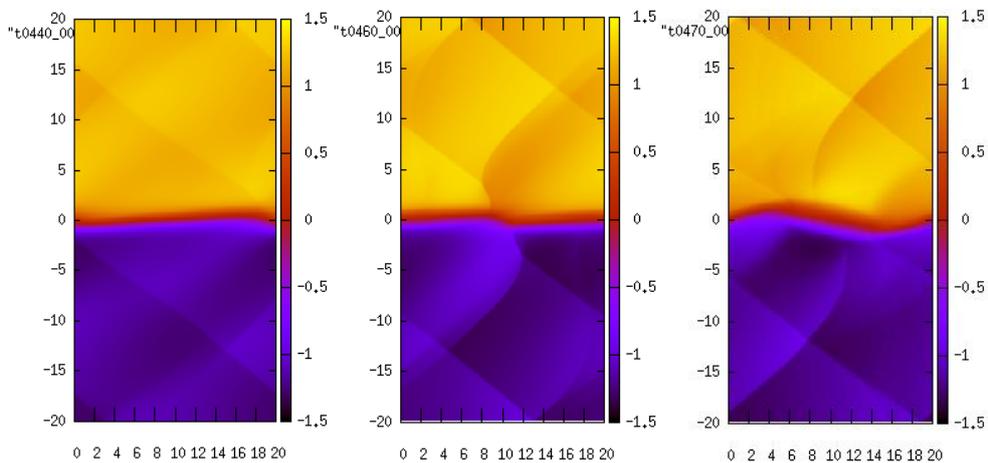


図 30 T=440 での $v_x$

図 31 T=460 での $v_x$

図 32 T=470 での $v_x$

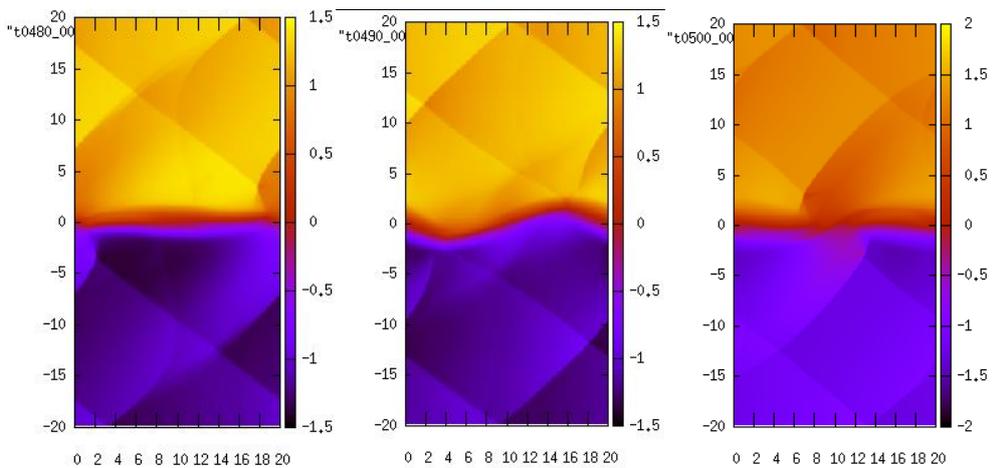


図 33 T=480 での $v_x$

図 34 T=490 での $v_x$

図 35 T=500 での $v_x$

この結果を受けて、 $v_x$  を見ただけでは理解しがたいので加えて  $v_y$  も次に示す。

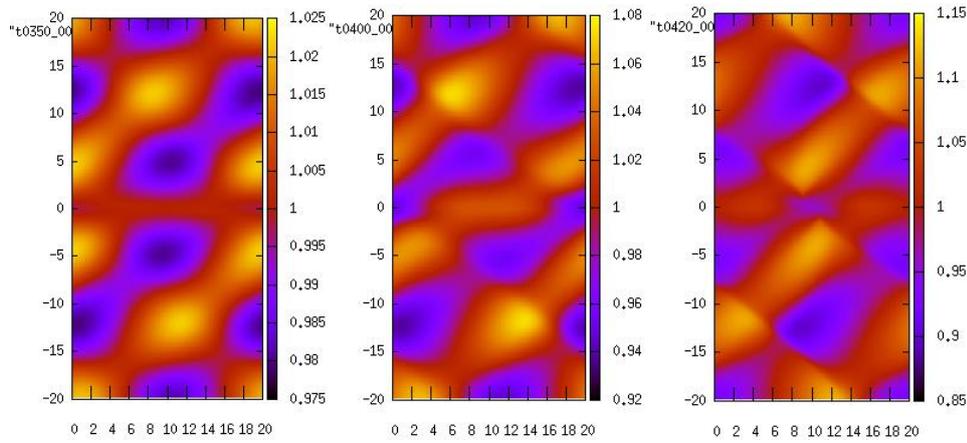


図 36 T=350 での  $v_y$

図 37 T=400 での  $v_y$

図 38 T=420 での  $v_y$

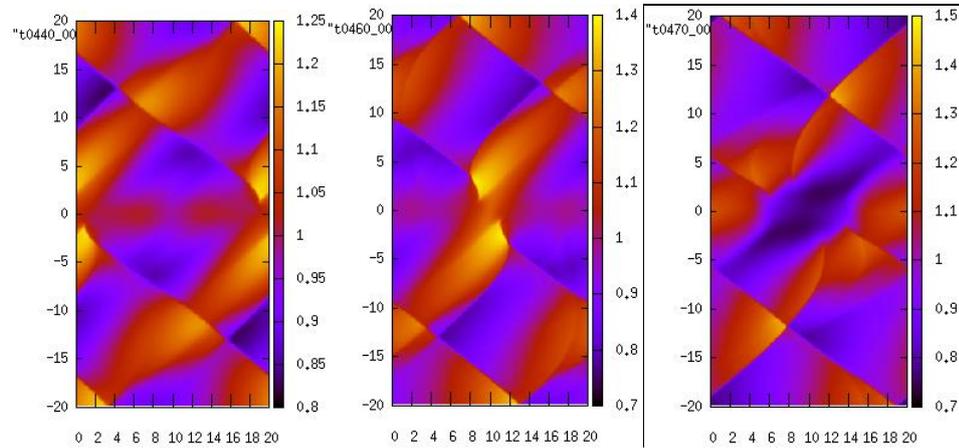


図 39 T=440 での  $v_y$

図 40 T=460 での  $v_y$

図 41 T=470 での  $v_y$

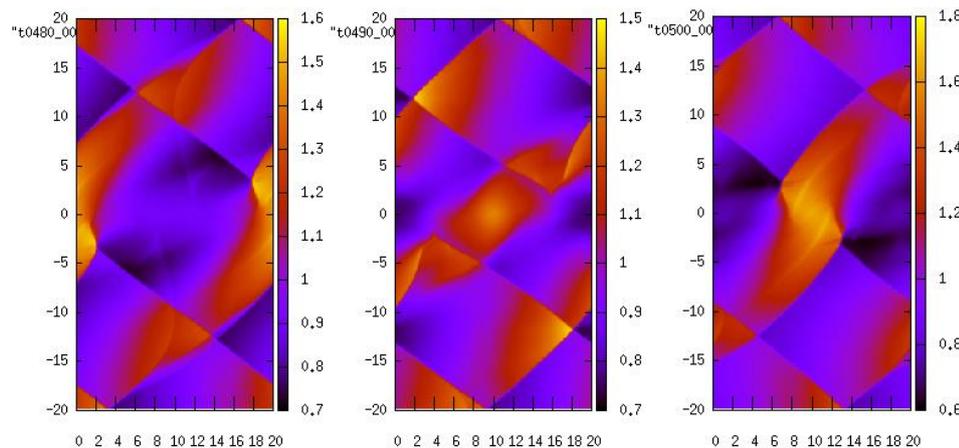


図 42 T=480 での  $v_y$

図 43 T=490 での  $v_y$

図 44 T=500 での  $v_y$

これらの図よりy軸方向の速度において衝撃波がいくつも見られる。この衝撃波が模様のように見えるのは、対称的に見えることから生じた衝撃波が壁に何度も反射することが原因だと考えられる。

また実際には数値計算は不可能だが、仮に壁境界が無限遠方にあり無限遠でゆらぎがゼロの状態を考えると理論上、流体同士の境界面では Kelvin-Helmholtz 不安定性は成長しない。したがって、衝撃波や  $y = 0$  で波や渦は見られるはずがない。したがって、これらの図を見る限り  $y = 0$  付近で波が起こっている。これは、生じた衝撃波が流体同士の境界面に強く相互作用して起きた現象だといえる。

ここで実際に衝撃波が生じていることを明示するためにマッハ数 $v_0$ を示す。

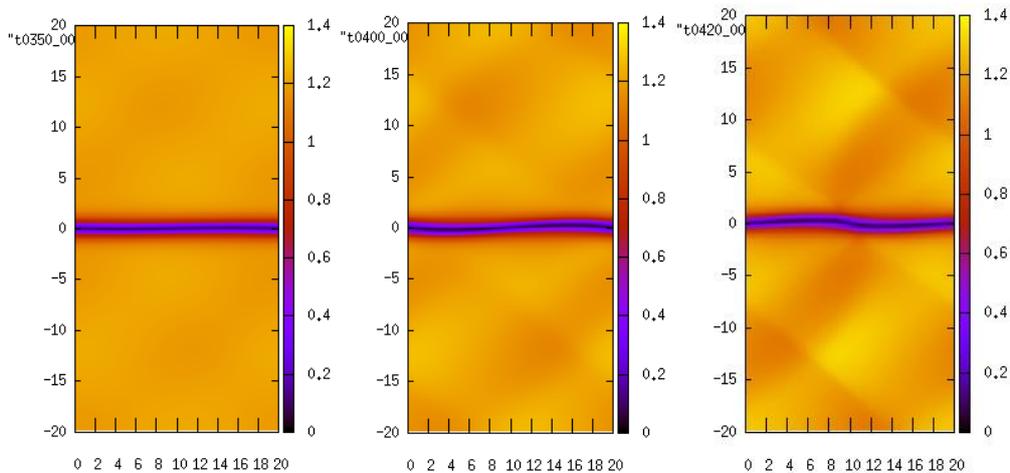


図 45 T=350 での $v_0$

図 46 T=400 での $v_0$

図 47 T=420 での $v_0$

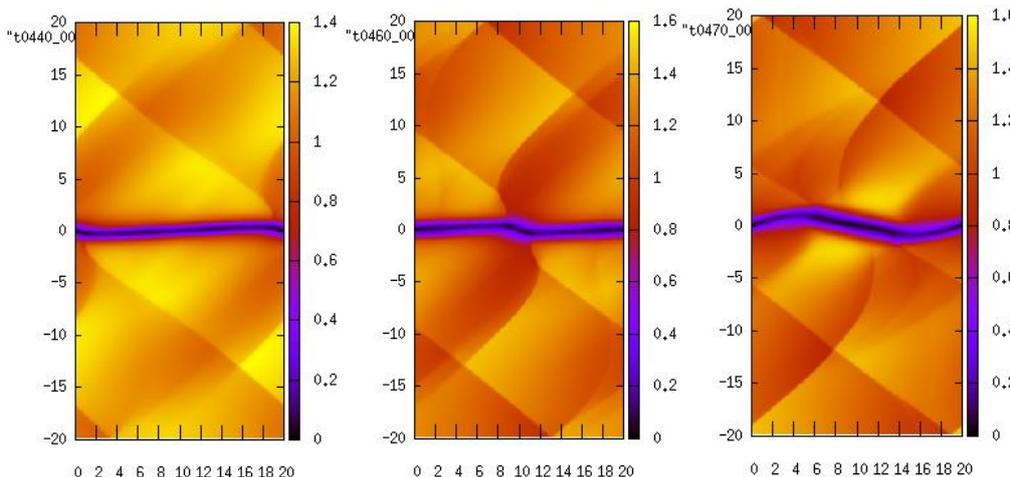


図 48 T=440 での $v_0$

図 49 T=460 での $v_0$

図 50 T=470 での $v_0$

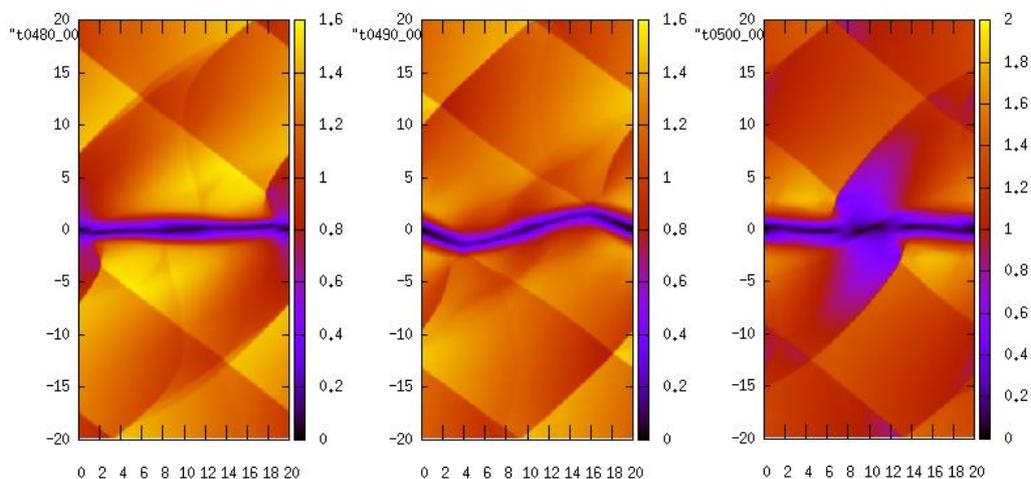


図 51 T=480 での $v_0$

図 52 T=490 での $v_0$

図 53 T=500 での $v_0$

このマッハ数のグラフにおいて、マッハ数の定義により $v_0 = 1$ の時の速度は音速  $c$  と等しい。そのことを踏まえて図 45～図 53 を評価すると、やはり衝撃波が生じていることは明らかである。

さらに興味深いのは、図 48～図 50 における時刻  $T = 440, 460, 470$  におけるマッハ数の様子である。衝撃波と流体同士の境界面とが交わる点において境界面が隆起している点である。この図により前に述べた衝撃波との相互作用によって波が発生するということを裏付けている。

渦度 $\omega$

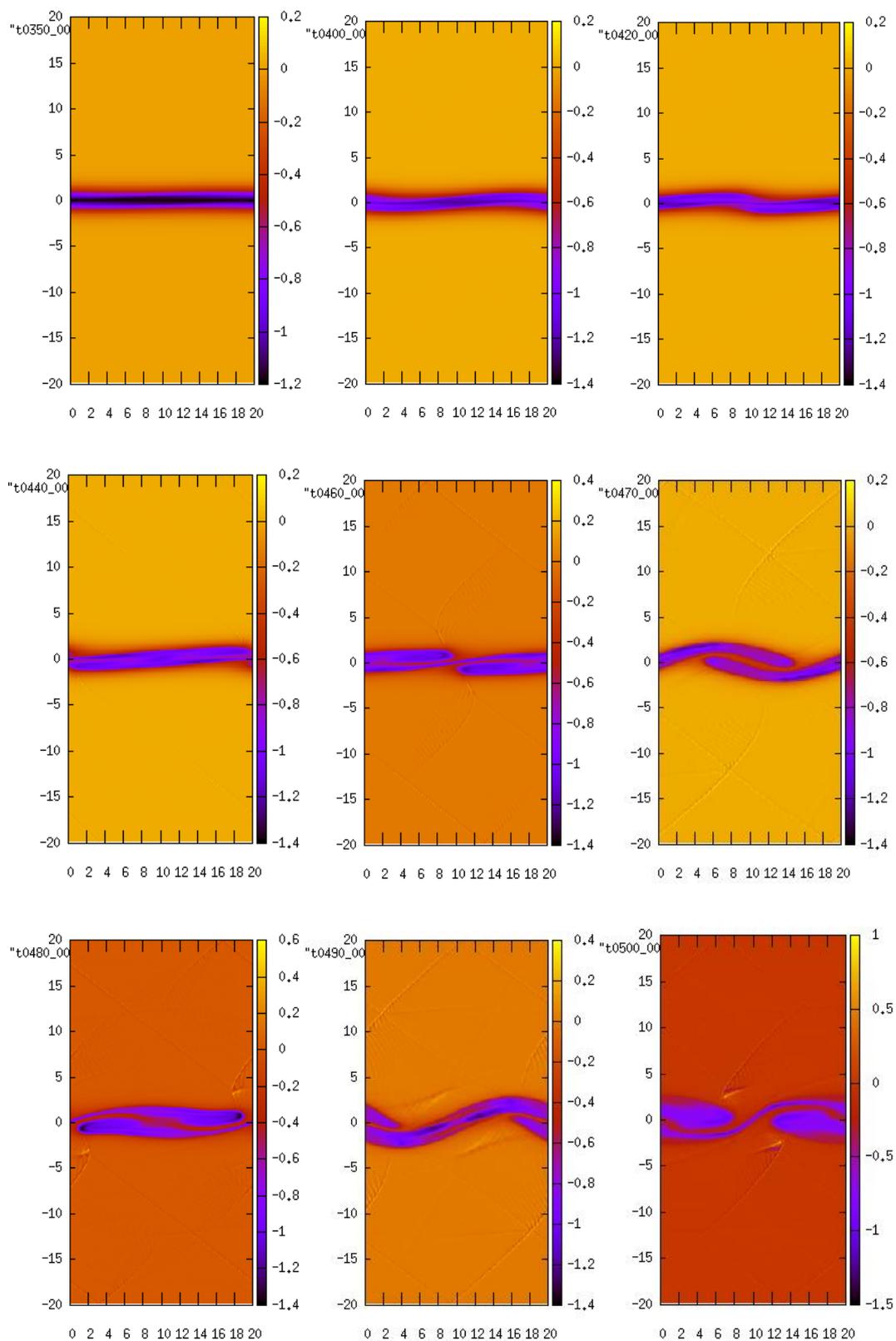


図 54 左上から順に T=350,400,420,440,460,470,480,490,500 での $\omega$

この渦度を見る限り  $T=500$  で渦らしきものが見えている。

では、壁境界が近いときではこの様子がどのように変化するかを見る。

### [Case3]

本研究において最も重要なことは超音速における壁境界との相互作用であるので、上記の実験の壁境界をさらに流体同士の境界面に近づけて計算をした。

$$\left\{ \begin{array}{l} v_0 = 1.2 \\ L'_y = -3 \\ v_y(y = 20) = 0 \\ v_y(y = -3) = 0 \\ 0 \leq T \leq 800 \end{array} \right.$$

この条件は壁境界が  $y = -3$  に存在しており、マッハ数  $v_0 = 1.2$  ということから流速は音速より早いことを示している。

まず、 $v_x$ の時間変化を示す。

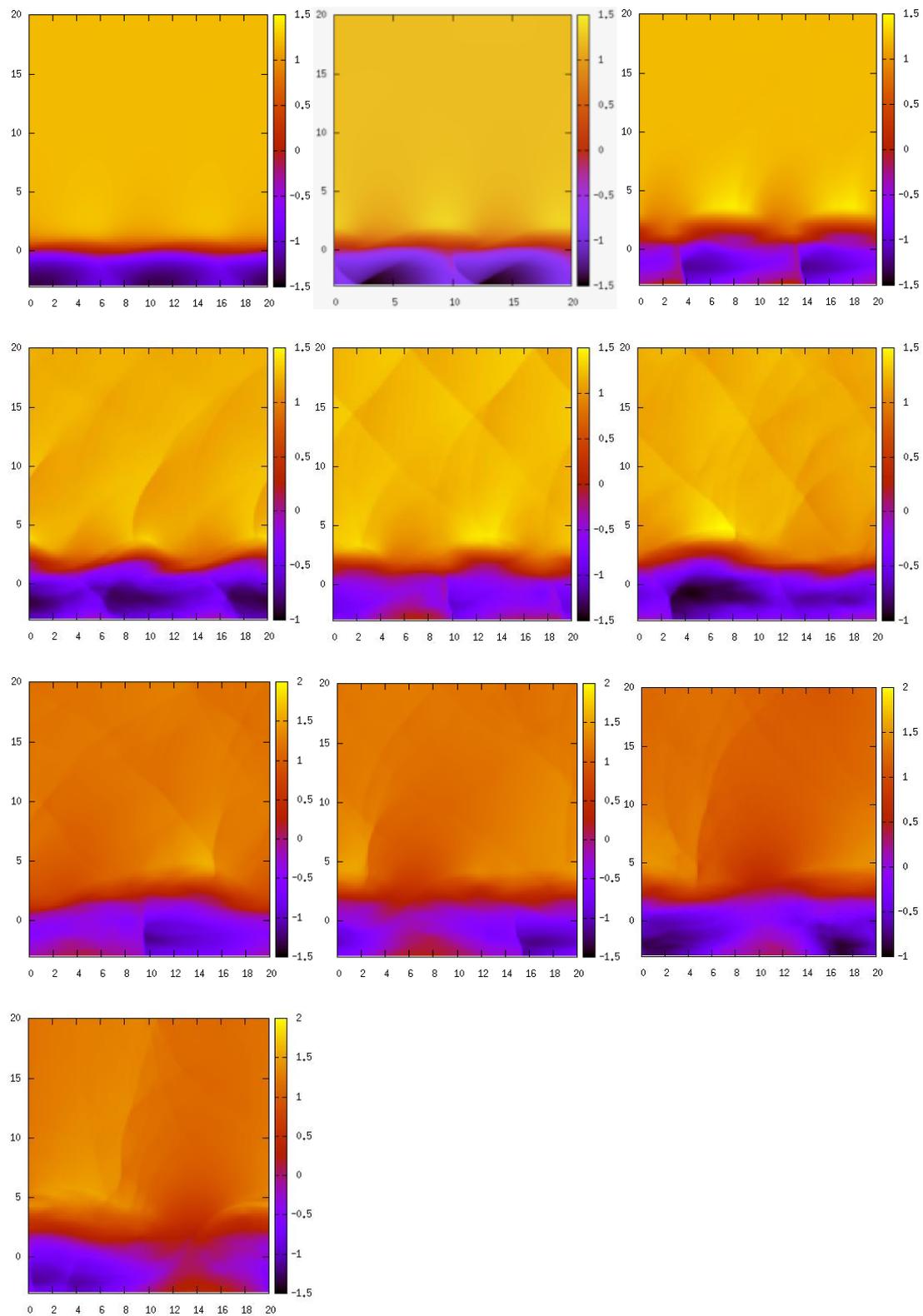


図 55 左上から順に  $T=320, 350, 400, 420, 440, 460, 470, 480, 490, 500$  での  $v_x$

また、同時刻の $v_y$ は次のとおりである。

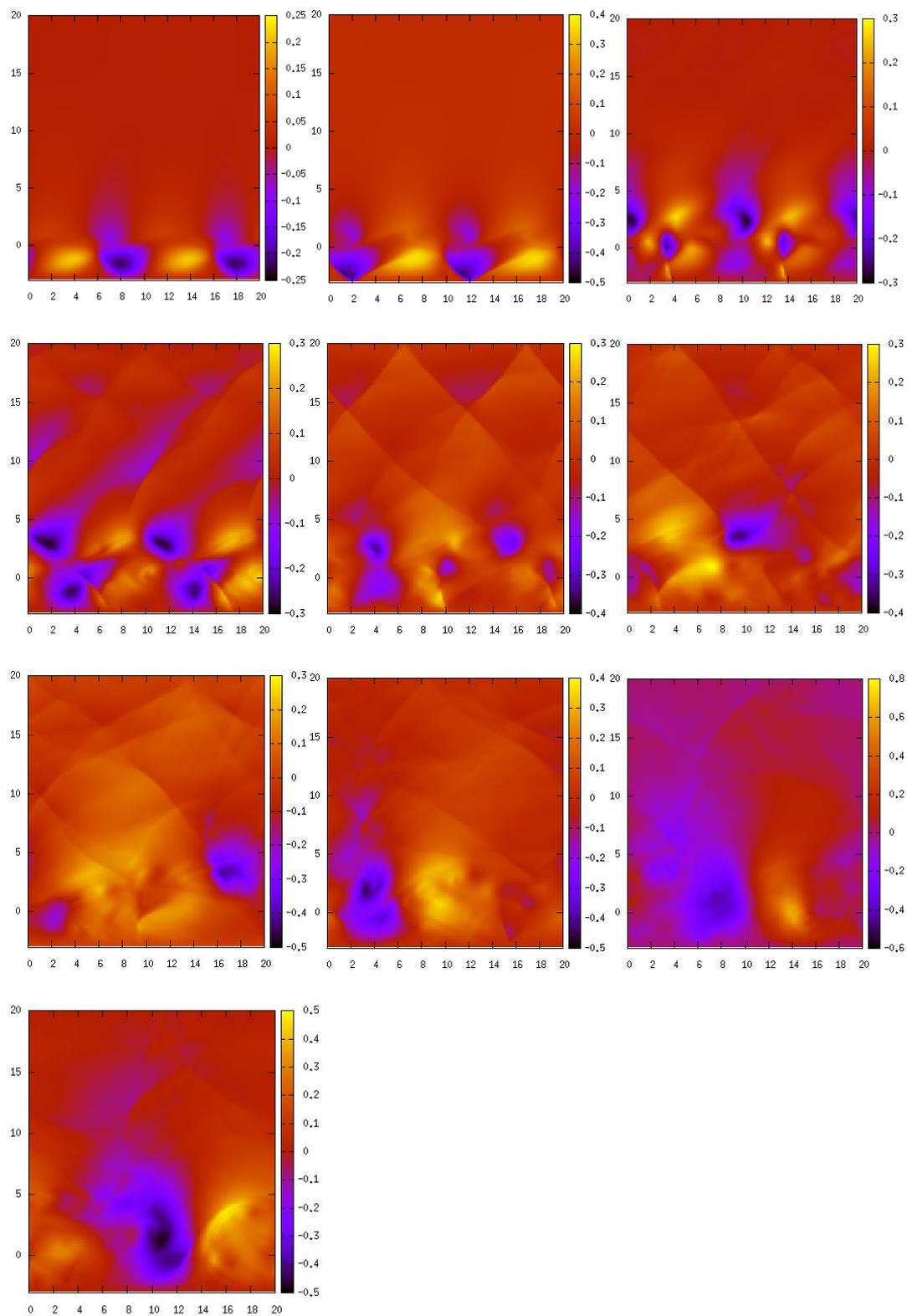


図 56 左上から順に  $T=320, 350, 400, 420, 440, 460, 470, 480, 490, 500$  での  $v_y$

さらに、マッハ数 $v_0$ の時間変化は次のようになった。

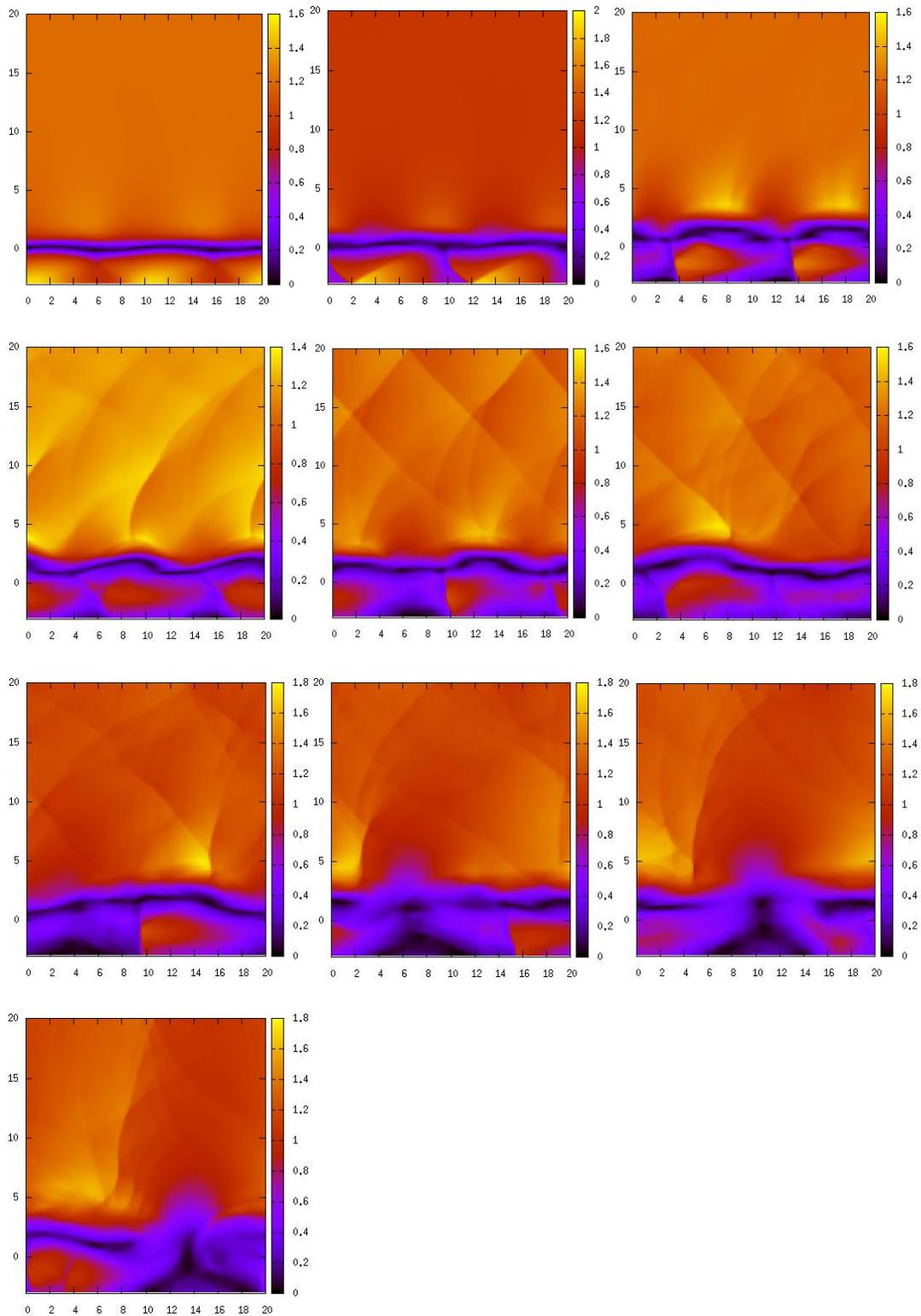


図 57 左上から順に  $T=320, 350, 400, 420, 440, 460, 470, 480, 490, 500$  でのマッハ数 $v_0$

この結果を用いて、図 27～図 53 の境界が十分に遠いときと図 54～図 56 の壁境界が近い距離に存在するときでは明らかに変化がみられる。

次に渦度の様子を調べる。

渦度 $\omega$

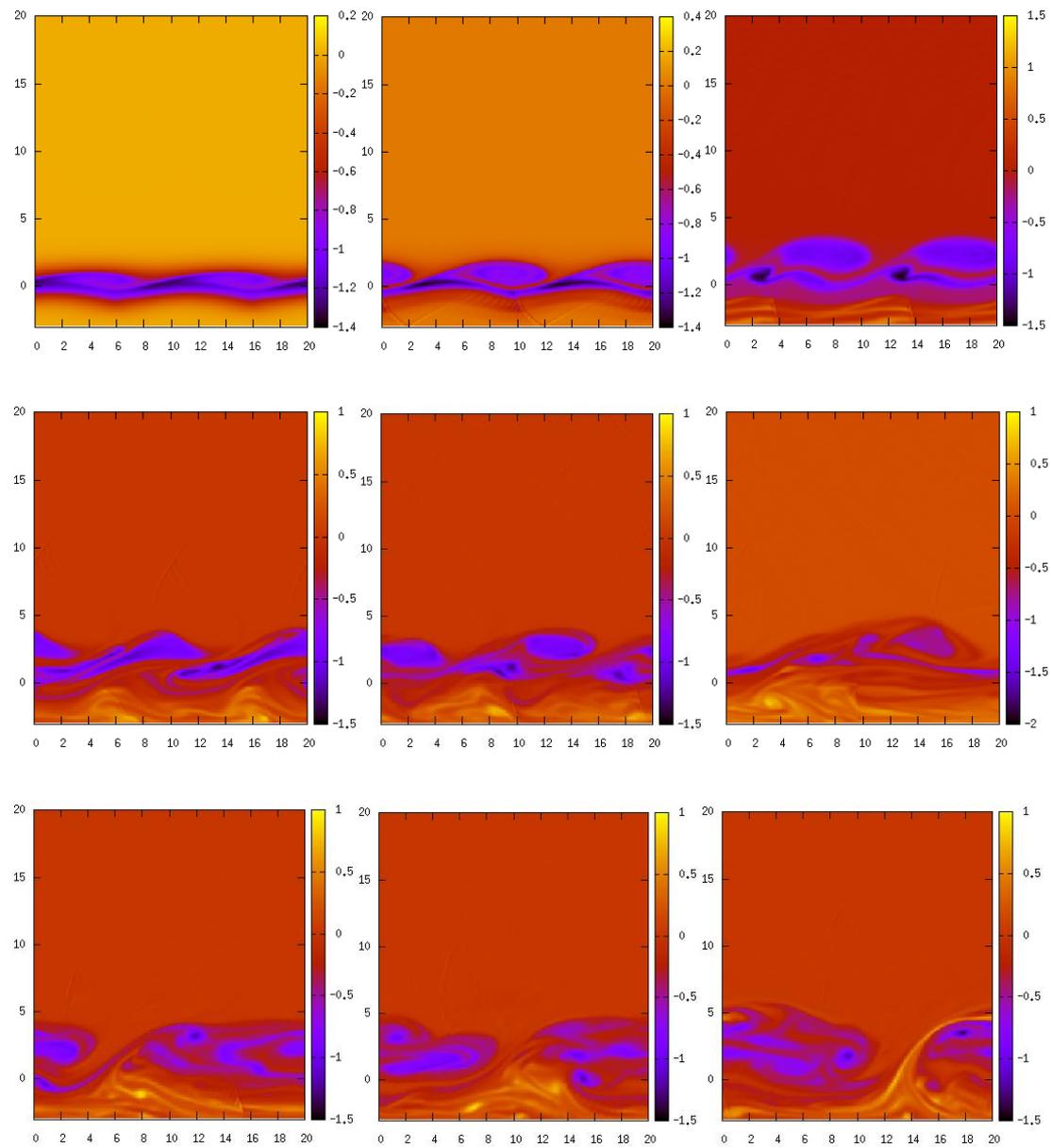


図 58 左上から順に  $T=320,350,400,420,440,460,470,480,490,500$  での渦度 $\omega$

図 58 を見ると  $T=320\sim 350$  で渦が巻きあがっている様子が見られる。

超音速流での壁境界が近いときと遠いときでは明らかに違いがみられる。境界が遠いときでは

$T=500$  付近で渦のようなものが見えるのに対し、境界が近いときでは  $T=320\sim 350$  に見える。

これは、壁境界が近いことによって渦の成長スピードが速くなっていることがわかる。

これらの流れの様子はあらゆる波長の波の重ね合わせで考えられるので、フーリエモードを計算しそ

れぞれの波長の波の成長の様子を時間変化で表わした。

ここでは、初期の速度シア層( $y=0$ )における $v_y$ のフーリエモード、

$$\widetilde{v_{ym}}(y) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} v_y(x_j, 0) e^{i \frac{2\pi jm}{N}}$$

の絶対値の時間変化を評価した。

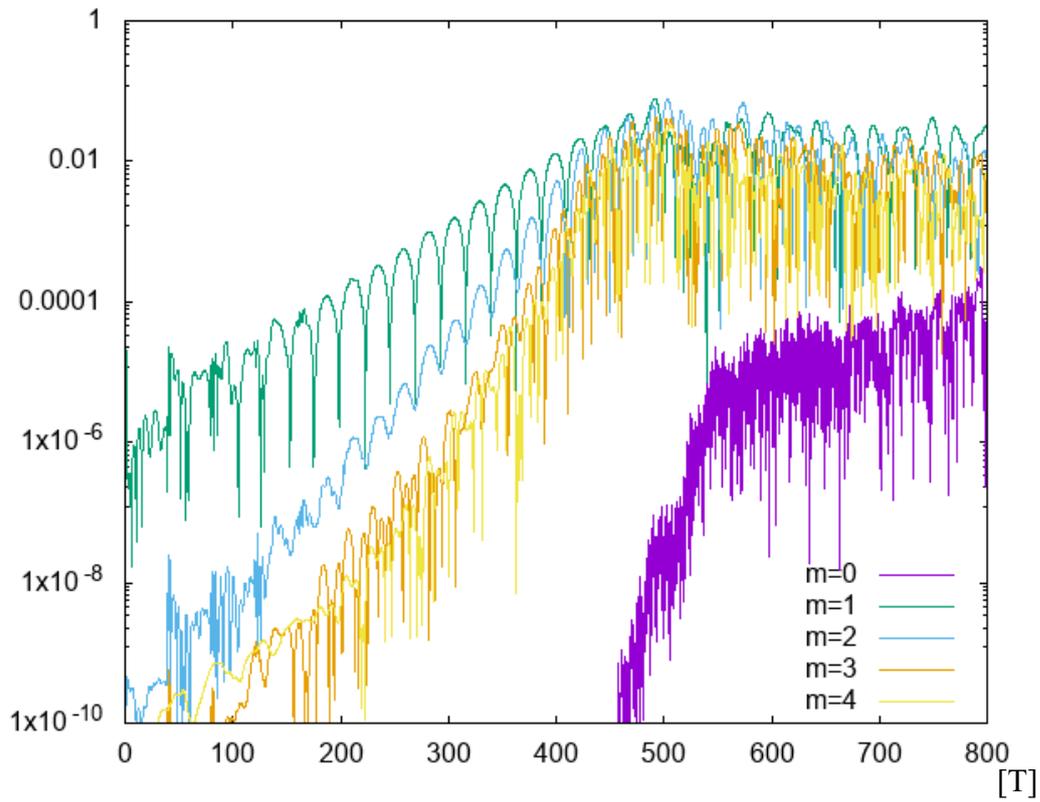


図 59 超音速流中の境界が遠いときのフーリエモードの時間変化

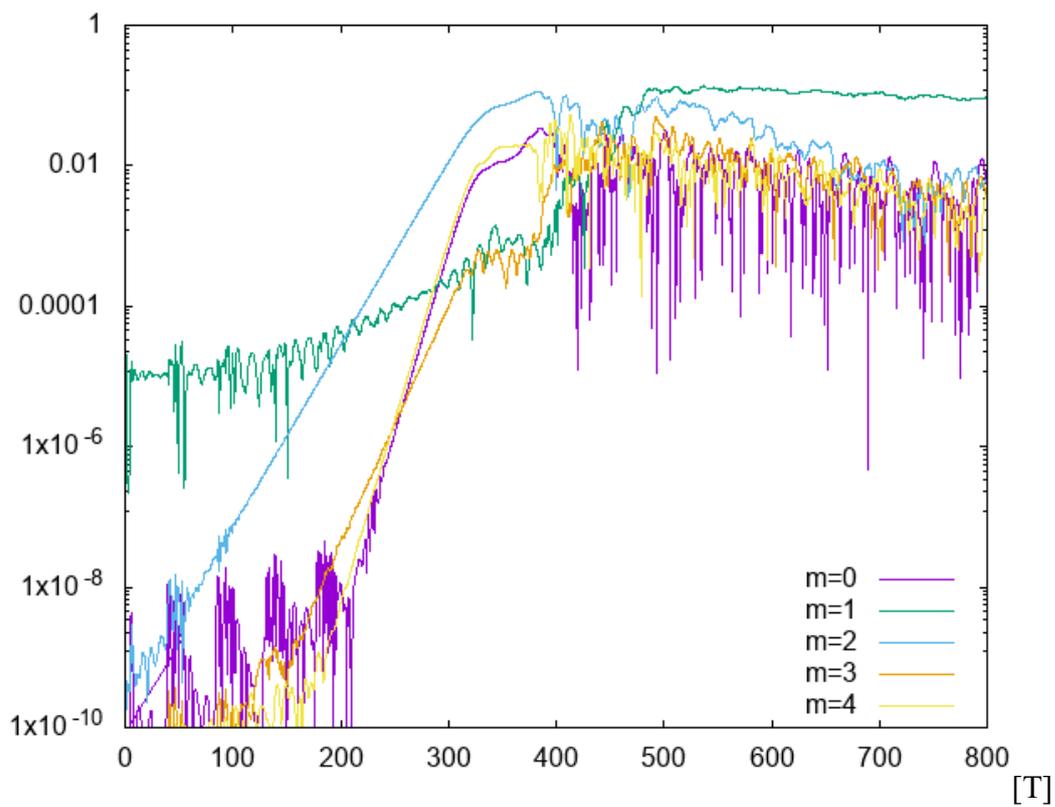


図 60 超音速流中の境界が近いときのフーリエモードの時間変化

図 59 と図 60 から成長のスピードは境界に近いほうが明らかに早いことが見て取れる。

ここで亜音速流での壁境界との相互作用の様子も計算した。

[Cases4]

亜音速流で境界が近いときの条件は次のように定めた。

$$\left\{ \begin{array}{l} v_0 = 0.8 \\ L'_y = -3 \\ v_y(y = 20) = v_y(y = -3) = 0 \\ 0 \leq T \leq 800 \end{array} \right.$$

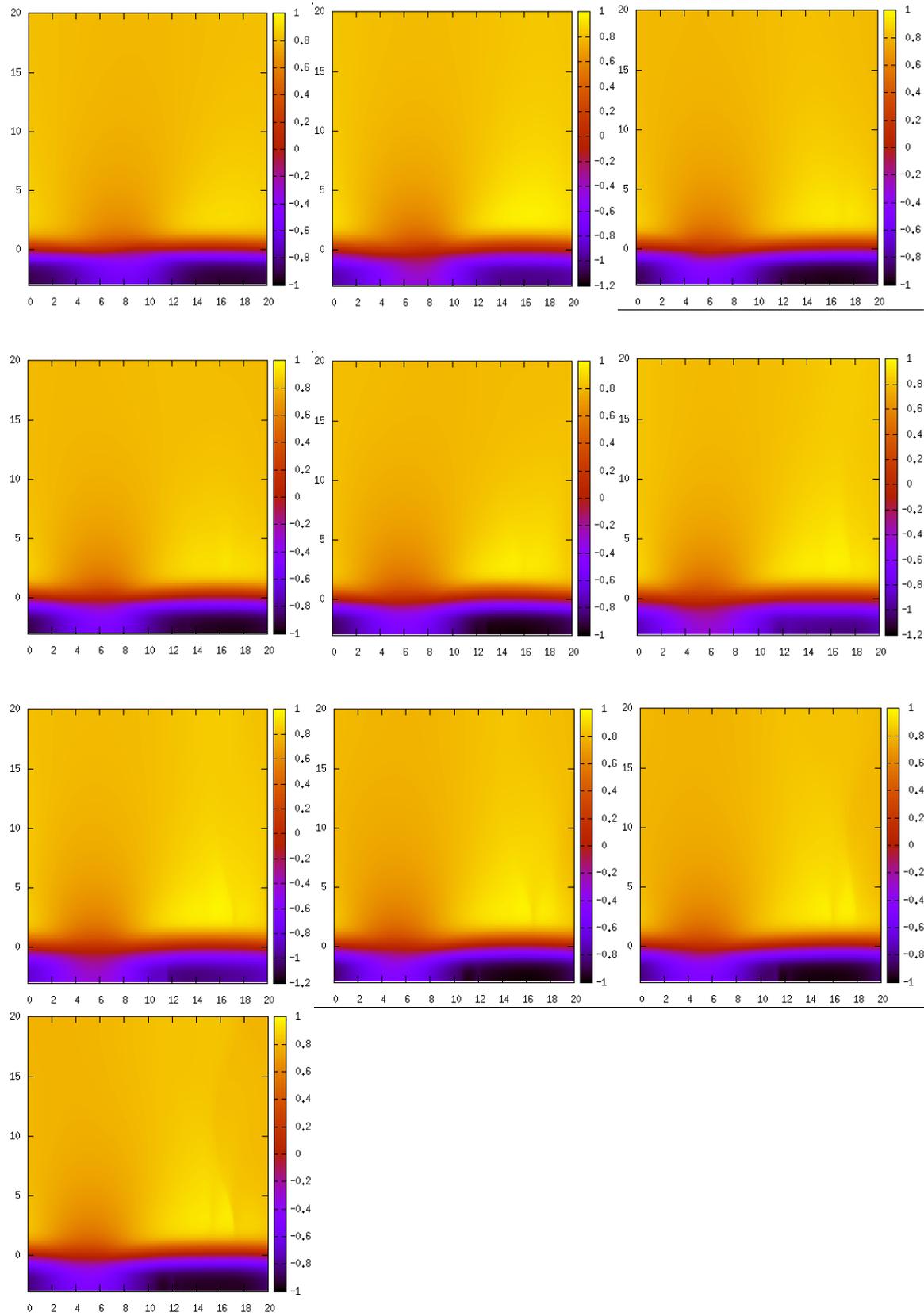


図 61 左上から順に T=320,350,400,420,440,460,470,480,490,500 での  $v_x$

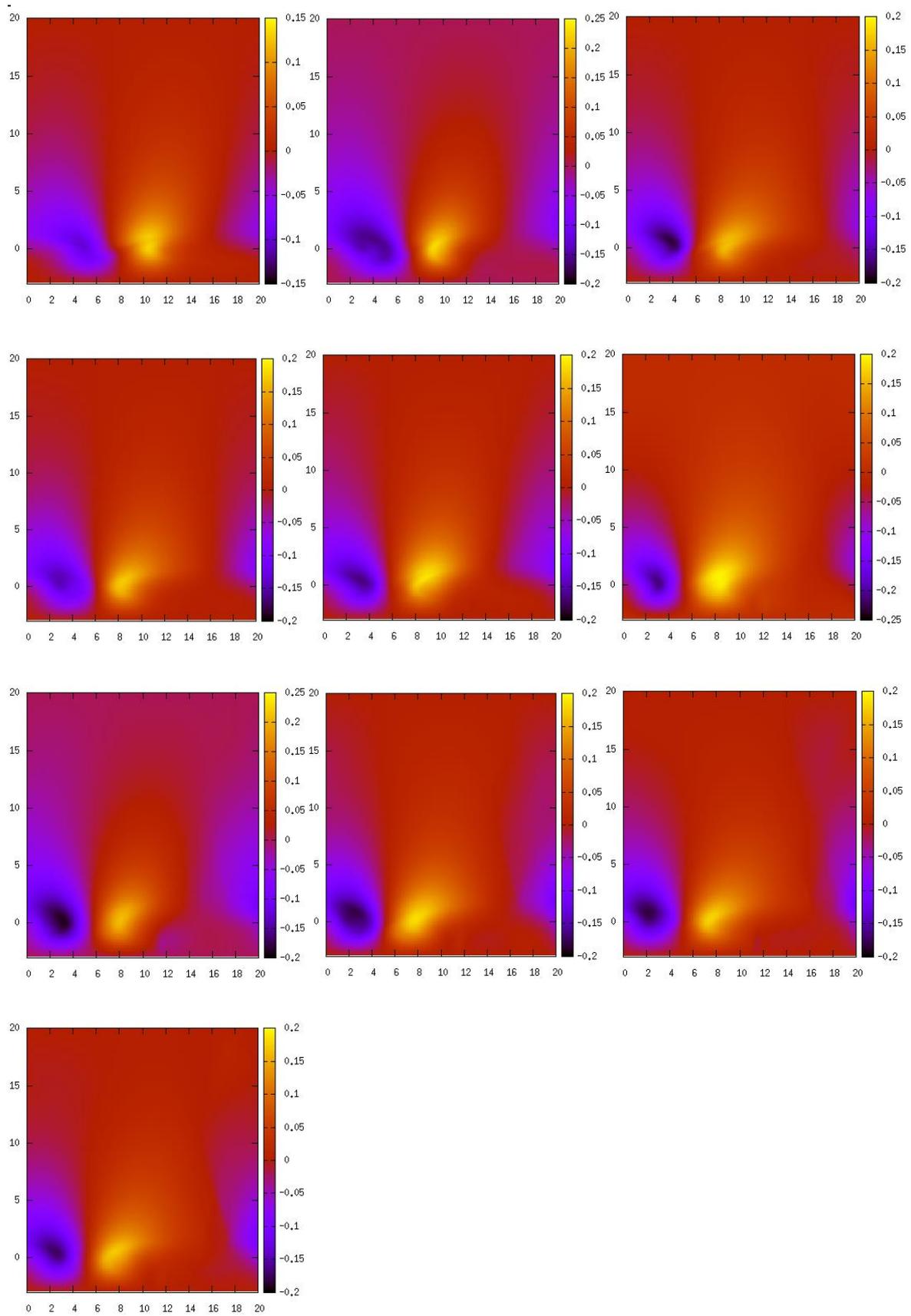


図 62 左上から順に  $T=320, 350, 400, 420, 440, 460, 470, 480, 490, 500$  での  $v_y$

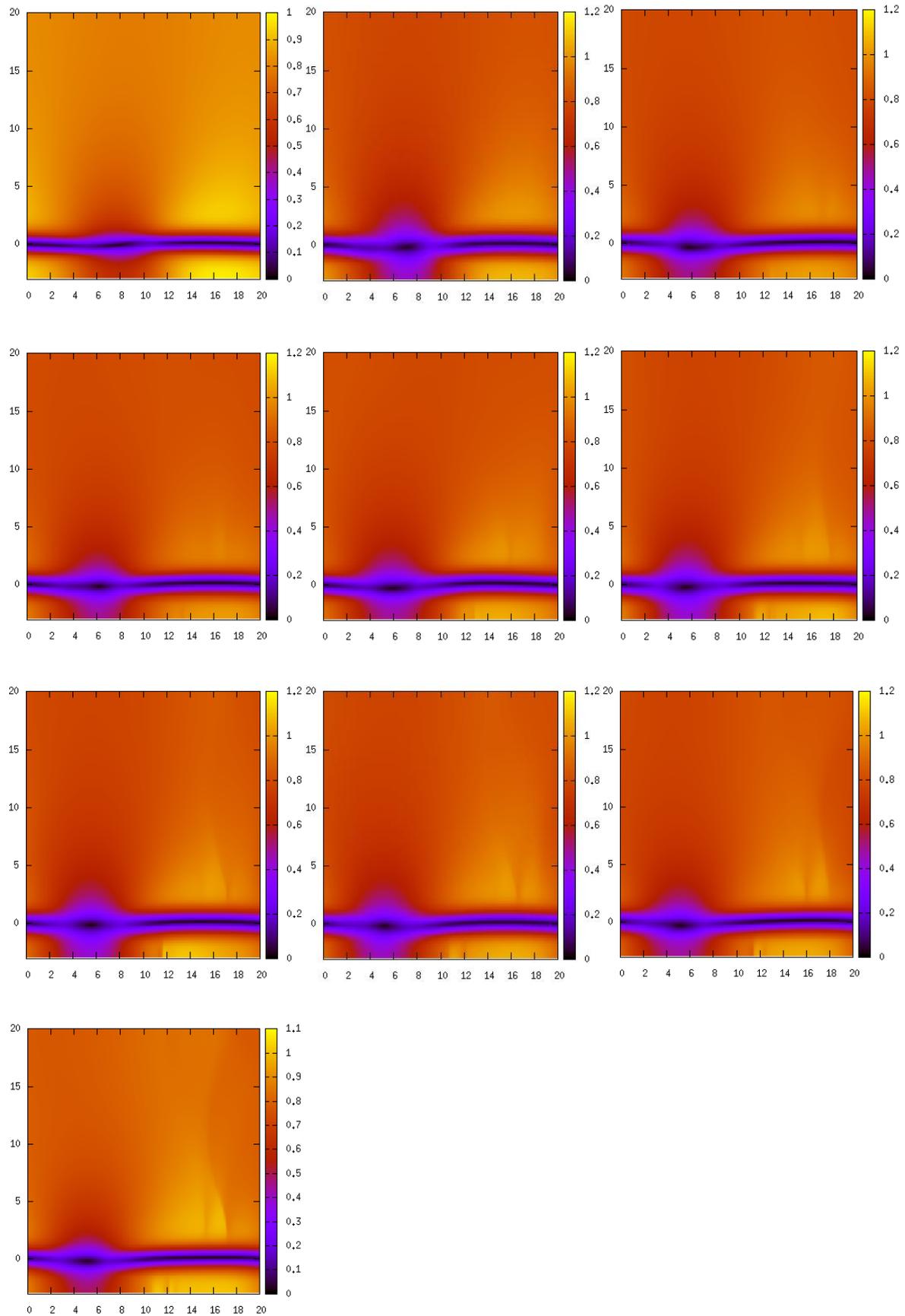


図 63 左上から順に  $T=320,350,400,420,440,460,470,480,490,500$  でのマッハ数  $v_0$

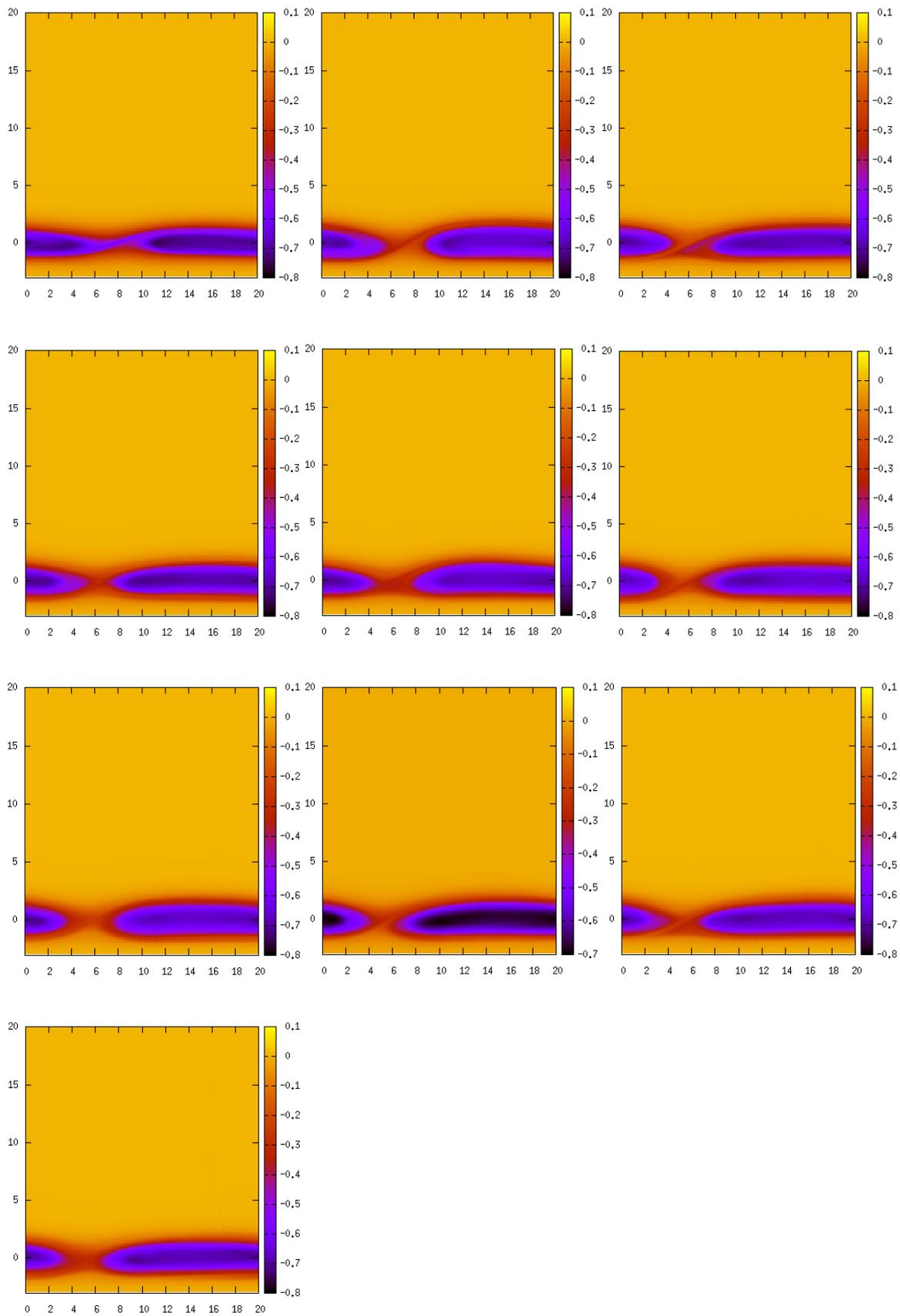


図 64 左上から順に  $T=320, 350, 400, 420, 440, 460, 470, 480, 490, 500$  での渦度  $\omega$

亜音速流では渦らしきものは見えるが、成長しない。ここでは  $T=500$  までの図を載せているが、 $T=800$  まで見たところ変化は見られなかった。

[Case3]と[Case4]を比較すると亜音速流では超音速流に比べて境界の影響を受けない。

さらに、成長のスピードも遅い。

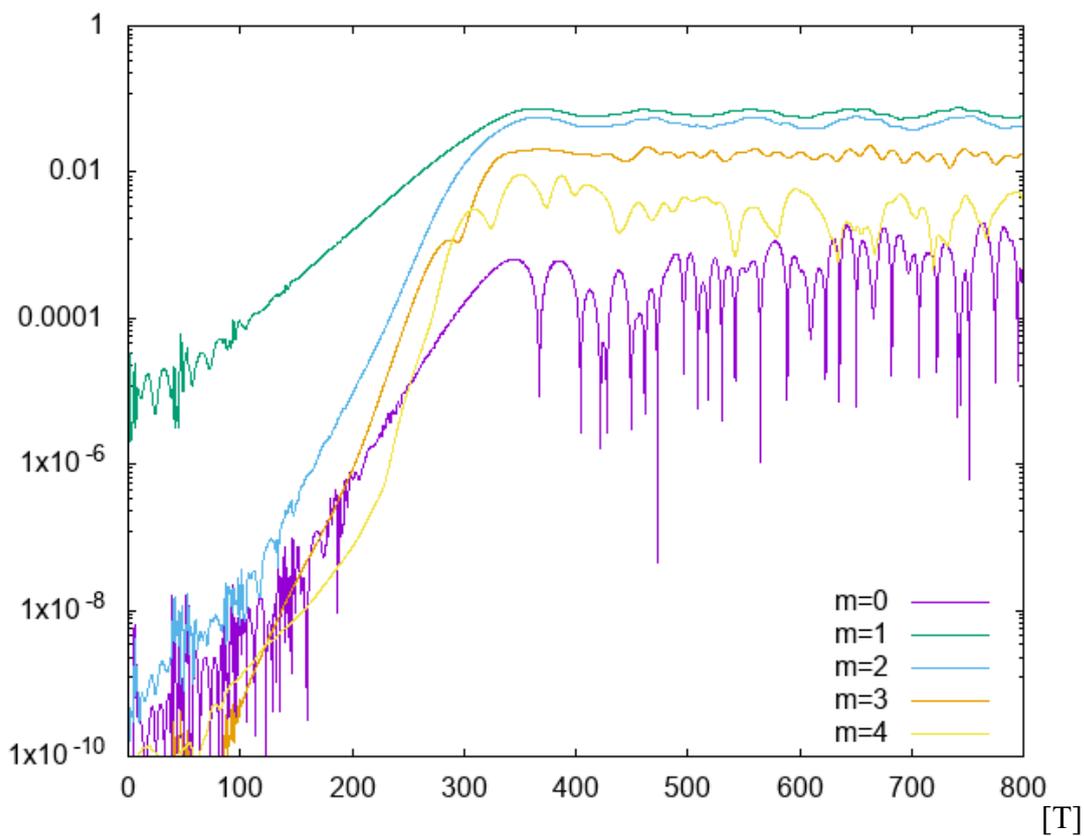


図 65 亜音速流中の境界が近いときのフーリエモードの時間変化

## 第6章 結論

オイラーの方程式を数値的に計算し、ケルビン・ヘルムホルツ不安定性について論じた。

超音速流におけるケルビン・ヘルムホルツ不安定性は、壁境界が十分に遠い位置に存在している時と近い位置に存在している時では、近い位置に存在している時の方が速く成長することが分かった。また亜音速流でのケルビン・ヘルムホルツ不安定性の様子と比較すると、超音速流中での壁境界は大きく影響していることも分かった。また、その渦構造と超音速流の相互作用により、衝撃波乱流的な構造が発達することも見出した。

## 参考文献

新物理学シリーズ 30 宇宙流体力学:株式会社 培風館 坂下志郎・池内了 著

図 1: <http://www.22ab.com>

図 2: <https://kotobank.jp/word/>

図 3: <https://www.nasa.gov/centers/dryden/multimedia/imagegallery/SR-71/EC92-1284-1.html>

図 4: [https://www.slideshare.net/isas\\_pr/20170826-79169914](https://www.slideshare.net/isas_pr/20170826-79169914)

[1]<https://ja.wikipedia.org/wiki/木星>

[2]<https://ja.wikipedia.org/wiki/鳴門海峡>

[3]"Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability",

S. Chandrasekhar,

Oxford University Press, 1961

[4]"Suppression mechanism of Kelvin-Helmholtz instability in compressible fluid flows",

M. Karimi, S. S. Girimaji,

Physical Review E, vol. 93, 041102, 2016

[5]"Shear layer instability of an inviscid compressible fluid",

W. Blumen,

Journal of Fluid Mechanics, vol. 40, Issue 4, pp. 769-781, 1970

[6]"Shear layer instability of an inviscid compressible fluid. Part 2",

W. Blumen, P. G. Drazin, and D. F. Billings,

Journal of Fluid Mechanics, vol. 71, Issue 2, pp. 305-316, 1975

[7]"高速プラズマ流を伴う計算機シミュレーションの基礎",

三好隆博, 草野完也,

プラズマ・核融合学会誌, vol. 83, Issue 3, pp. 228-240, 2007

[8]"Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver",

E. F. Toro, M. Spruce, and W. Speares,

Shock Waves, vol. 4, Issue 1, pp. 25-34, 1994.

[9]"On the Choice of Wavespeeds for the HLLC Riemann Solver",

P. Batten, N. Clarke, C. Lambert, and D. M. Causon,

SIAM Journal on Scientific Computing, vol. 18, Issue 6, pp. 1553-1570, 1997.

[10]"Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes",

Guang-Shan Jiang, Chi-Wang Shu,

Journal of Computational Physics, vol. 126, Issue 1, pp. 202-208, 1996.

[11]"Strong Stability-Preserving High-Order Time Discretization Methods",

Sigal Gottlieb, Chi-Wang Shu, and Eitan Tadmor,

SIAM Review, vol. 43(1), pp. 89-112, 1998.

## 謝辞

今回、研究を行うにあたり基礎的な計算方法や原理の指導に始まり、本論文を書く際の助言まで行なって下さった三好隆博助教には心より感謝申し上げます。また、同研究室の杉立徹教授、志垣賢太准教授、本間謙輔助教にはクォークに関して全くの無知であった自分に丁寧に指導くださいましたこと大変感謝しております。最後に、同研究室所属の先輩方には多くの意見をいただき、一緒に過ごした時間がとても心の支えになりました。関わってくださった皆様には感謝申し上げます。