

平成30年度卒業論文

高密度プラズマ塊と流れの相互作用の
磁気流体力学シミュレーション

広島大学理学部物理科学科
クォーク物理学研究室
学籍番号 B150441

村上 貴洋

2019 年 2 月 15 日
指導教員 杉立 徹 教授
主査 三好 隆博 助教
副査 伊藤 清一 助教

概 要

局所的な高密度プラズマ領域であるプラズマ塊の輸送は、実験室プラズマや宇宙天体プラズマにおける基本的な物理過程として普遍的に観測される。例えば核融合装置内において、炉心プラズマの最外殻磁気面のすぐ外側の開いた磁力線領域（スクレイプオフ層）に炉心プラズマの塊が間欠的に輸送される。また太陽コロナでは、太陽フレアなど活動現象に伴い突発的にプラズマの塊が惑星間空間に放出（コロナ質量放出）される。しかし、特にプラズマ塊と背景プラズマの密度比が大きい場合、数値シミュレーションは極めて難しく、その時空間発展は完全には解明されていない。

そこで本研究では最新の数値計算法を用い、高密度プラズマ塊と周辺流れの非線形相互作用について安定かつ高精度な磁気流体力学シミュレーションを実現した。シミュレーションの結果、密度比が小さい場合、プラズマ塊側面後方の速度シアー中でケルビン・ヘルムホルツ不安定性が成長した。一方、密度比が大きい場合、ケルビン・ヘルムホルツ不安定性とともに、プラズマ塊前面にレイリー・テイラー不安定性が生じ、強い乱流が発達することがわかった。さらに初期に一樣磁場を加えたシミュレーションを実行し、流れの構造は磁場の強さと方向に強く依存することが明らかになった。

目次

1	序論	6
1.1	高密度プラズマ塊の輸送	6
1.2	本研究の目的	6
1.3	MHD 方程式	7
1.4	レイリー・テイラー不安定性	11
1.5	ケルビン・ヘルムホルツ不安定性	15
1.6	磁場の凍りつき	16
2	シミュレーションモデル	18
2.1	基礎方程式	18
2.2	数値計算法	19
2.3	シミュレーションモデル	23
3	結果	26
3.1	密度比依存性	27
3.2	背景速度依存性	34
3.3	磁場依存性	37
4	考察	45
4.1	密度比の差に対するプラズマ塊のダイナミクス	45
4.2	背景速度の差に対するプラズマ塊のダイナミクス	45
4.3	磁場の強さと方向に対するプラズマ塊のダイナミクス	47
5	結論	57

目 次

1	コロナ質量放出 [1]	6
2	核融合装置内のプラズマ塊輸送 [2]	6
3	コロナ質量放出 の模式図	7
4	核融合装置内のプラズマ塊輸送の模式図	7
5	レイリー・テイラー不安定性の直感的理解	12
6	密度・速度の異なる上下2層に摂動が生じる	12
7	ケルビン・ヘルムホルツ不安定性の直感的理解 1	15
8	ケルビン・ヘルムホルツ不安定性の直感的理解 2	16
9	移流方程式の初期値	20
10	有限体積のセルと格子境界を過ぎる流速	21
11	シミュレーションの計算領域と境界条件	24
12	シミュレーションモデル	24
13	$rr = 2$	28
14	$rr = 10$	29
15	$rr = 100$	30
16	$rr = 1000$	31
17	低密度比のプラズマ塊 拡大図	32
18	高密度比のプラズマ塊 拡大図	33
19	$V_0 = 0.8$	35
20	$V_0 = 1.1$	36
21	$\beta = 1$	38
22	$\beta = 10$	39
23	$\beta = 100$	40
24	$\beta = 1$	42
25	$\beta = 10$	43
26	$\beta = 100$	44
27	プラズマ塊前方に加速度が起きる仕組み	45
28	$V_0 = 0.5$ マッハ数	46
29	$V_0 = 0.8$ マッハ数	46
30	$V_0 = 1.1$ マッハ数	47
31	$rr = 100$ のプラズマ塊とその渦度	47
32	$B//x$ 方向のプラズマ塊とその渦度	50
33	$B//y$ 方向のプラズマ塊とその渦度	51
34	$\beta=10$ $B//x$ 軸 の磁力線、電流	52
35	$\beta=10$ $\eta = 10^{-3}$ $B//x$ 軸	53
36	$\beta=10$ $\eta = 10^{-4}$ $B//x$ 軸	54
37	$\beta=100$ $\eta = 10^{-4}$ $B//y$ 軸	55
38	$\beta=10$ $\eta = 10^{-4}$ $B//x$ 軸 $t=20$ の流れ、渦度、磁力線、電流	56

表 目 次

1	使用される変数	10
2	計算した各パラメータ (密度比依存性)	26
3	計算した各パラメータ (背景速度依存性)	26
4	計算した各パラメータ (磁場依存性)	27

1 序論

1.1 高密度プラズマ塊の輸送

自然界には固体や液体、気体の他に「第四の状態」と言われるプラズマという電子とイオンが電離した状態が存在する。プラズマの振る舞いには様々な現象が見られる。その一つとして局所的な高密度プラズマ領域であるプラズマの輸送は太陽周辺等の自然界のプラズマで観測されるだけでなく核融合装置内における実験室プラズマで観測されるなど基本的物理過程として普遍的に観測される。図1では太陽の

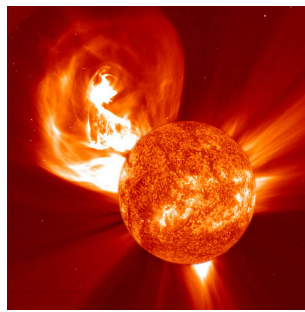


図 1: コロナ質量放出 [1]

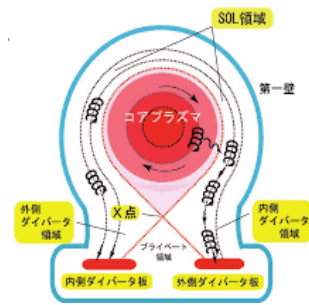


図 2: 核融合装置内のプラズマ塊輸送 [2]

左側から大量のコロナが放出されているのが確認できる。太陽周辺では太陽フレアなどの活動現象に伴い突発的にプラズマの塊が惑星間空間に放出される。この現象はコロナ質量放出 (Coronal mass ejection CME) と呼ばれる。さらに図2のように核融合装置内でも同様に炉心プラズマの最外殻磁気面のすぐ外側の開いた磁力線の層であるスクレイプオフ層と呼ばれる領域に炉心プラズマが間欠的に輸送される現象が起こる。

両現象の共通点として、輸送されるプラズマの塊が輸送される空間のプラズマ密度に比べ高密度であることが挙げられる。太陽周辺の惑星間空間には太陽から吹き出す太陽風と呼ばれるプラズマの流れが存在し、その密度は $10^6 \sim 10^7 \text{ m}^{-3}$ であるのに対し、太陽周辺のコロナ領域の密度はおよそ 10^{14} m^{-3} と推定されている [3]。また、スクレイプオフ層の背景プラズマ密度は指数関数的に減少するため、遠方スクレイプオフ層のプラズマ密度に対する炉心プラズマ密度の比は極めて大きい [4]。

1.2 本研究の目的

プラズマ塊の輸送過程は宇宙・天体プラズマや実験室プラズマにおける基礎的な過程であり (図3、4)、これまでに多くの数値シミュレーション研究がなされてきた。

しかし、プラズマ塊と背景プラズマの密度比が大きい場合については、数値シミュレーションは極めて難しく、その時空発展はほとんど解明されていない。そこで本研究の目的は磁気流体力学 (MHD) 方程式に対する最新の安定かつ高精度な数値計算法を用い、高密度プラズマ塊と周辺流れの MHD 的な非線形相互作用を解明することにある。

本章の残りで、基礎方程式となる「MHD 方程式」の導出、密度や速度の勾配に

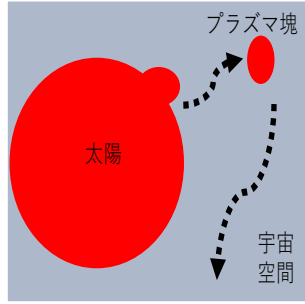


図 3: コロナ質量放出の模式図

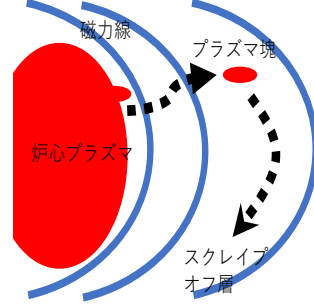


図 4: 核融合装置内のプラズマ塊輸送の模式図

起因する代表的な流体的不安定性である「レイリー・テイラー不安定性」および「ケルビン・ヘルムホルツ不安定性」の概略、および磁場とプラズマの基礎的な概念である「磁場の凍りつき」の解説をおこなう。2 章では、本研究でおこなうシミュレーションモデルについて説明する。3 章および 4 章ではシミュレーション結果およびその考察を与える。最後に本研究をまとめる。

1.3 MHD 方程式

本研究では基礎方程式として MHD 方程式を採用する。MHD 方程式は、プラズマの巨視的なダイナミクスを記述する方程式である。流体方程式に外力としてローレンツ力を作用させ、流体方程式と磁場の時間発展方程式の組み合わせによって導かれる。

プラズマ中の電磁場を記述する方程式はマクスウェル方程式が基本の方程式となる。

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4)$$

高温プラズマはイオンと電子の 2 種類の粒子が含まれる、電離した気体であり、イオン、電子の質量を m_i 、 m_e 、数密度、質量密度をそれぞれ n_i 、 n_e 、 ρ_{mi} 、 ρ_{me} とす

る。流体速度をそれぞれ $\mathbf{V}_i$ 、 $\mathbf{V}_e$ 、圧力を p_i 、 p_e とし、添字 s は粒子種を表す。ここで微小体積 $\Delta x \Delta y \Delta z$ 内の粒子数 $n(x, y, z, t) \Delta x \Delta y \Delta z$ の変化は、 yz 面と平行な面から入る粒子束 $n(x, y, z, t) \mathbf{V}_x(x, y, z, t) \Delta y \Delta z$ と向かい合うもう一つの yz 面と平行な面から出る粒子束 $n(x + \Delta x, y, z, t) \mathbf{V}_x(x + \Delta x, y, z, t) \Delta y \Delta z$ との差であるので、

$$\begin{aligned} (n(x, y, z, t) \mathbf{V}_x(x, y, z, t) - n(x + \Delta x, y, z, t) \mathbf{V}_x(x + \Delta x, y, z, t)) \Delta y \Delta z \\ = -\frac{\partial(n \mathbf{V}_x)}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned} \quad (5)$$

検討した面以外の他の面からの粒子束も考慮すると

$$\frac{\partial n}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z = -\left\{ \frac{\partial(n \mathbf{V}_x)}{\partial x} + \frac{\partial(n \mathbf{V}_y)}{\partial y} + \frac{\partial(n \mathbf{V}_z)}{\partial z} \right\} \quad (6)$$

まとめると

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot (n_s \mathbf{V}_s) = 0 \quad (7)$$

式 (7) を連続の式 (質量保存の式) という。

次に運動方程式を以下に記述する。

$$n_e m_e \frac{d\mathbf{V}_e}{dt} = -\nabla p_e - q_e n_e (\mathbf{E} + \mathbf{V}_e \times \mathbf{B}) + \mathbf{R} \quad (8)$$

$$n_i m_i \frac{d\mathbf{V}_i}{dt} = -\nabla p_i - q_i n_i (\mathbf{E} + \mathbf{V}_i \times \mathbf{B}) - \mathbf{R} \quad (9)$$

運動方程式の右辺第 1 項の ∇p は圧力による単位体積あたりの力を表し、第 2 項はローレンツ力を表している。第 3 項はイオンと電子間の衝突による項であり、電子がクーロン衝突する周波数 ν_{ei} を用いて、

$$\mathbf{R} = -n_e m_e (\mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i) \nu_{ei} \quad (10)$$

と書き表わせる。次に式 (8)、式 (9) の左辺の時間に対する全微分に注目すると、流体速度は座標 r 、時間 t の関数であり、流体のある微小体積は時間とともに移動する。したがってこの式の左辺の $d\mathbf{V}_s/dt$ は微小体積の流体加速度を表し、

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla \right) \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \\ &= \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + (\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla) \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (11)$$

となる。これより運動方程式 (8), (9) は

$$\begin{aligned} n_e m_e \left(\frac{\partial \mathbf{V}_e(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + (\mathbf{V}_e(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla) \mathbf{V}_e(\mathbf{r}, t) \right) \\ = -\nabla p_e - q_e n_e (\mathbf{E} + \mathbf{V}_e \times \mathbf{B}) + \mathbf{R} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} n_i m_i \left(\frac{\partial \mathbf{V}_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + (\mathbf{V}_i(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla) \mathbf{V}_i(\mathbf{r}, t) \right) \\ = -\nabla p_i - q_i n_i (\mathbf{E} + \mathbf{V}_i \times \mathbf{B}) - \mathbf{R} \end{aligned} \quad (13)$$

ここで、全質量密度 ρ , プラズマの平均速度 $\mathbf{V}$, 電荷分布密度 Q , 電流密度 $\mathbf{j}$ を以下のように定義する。

$$\rho(\mathbf{r}, t) \equiv m_i n_i(\mathbf{r}, t) + m_e n_e(\mathbf{r}, t) \approx m_i n_i(\mathbf{r}, t) \quad (14)$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \equiv (m_i n_i \mathbf{V}_i + m_e n_e \mathbf{V}_e) / \rho(\mathbf{r}, t) \quad (15)$$

$$Q(\mathbf{r}, t) \equiv q_i n_i(\mathbf{r}, t) + q_e n_e(\mathbf{r}, t) = e(n_i - n_e) \quad (16)$$

$$\mathbf{j} \equiv (q_i n_i \mathbf{V}_i + q_e n_e \mathbf{V}_e) \quad (17)$$

ここでプラズマは巨視的に電氣的に準中性なので、イオンは1価として $q_i = -q_e = e$ とした。このとき、イオンと電子の質量比は

$$\frac{m_i}{m_e} = 1836A \quad (A \text{ は原子量}) \quad (18)$$

なのでプラズマの質量密度はイオンからの寄与が大きいため m_e/m_i を $\ll 1$ なので無視した。式 (7) により次の結果が得られる。

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (20)$$

また、(12)、式 (13) より、

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + n_e m_e (\mathbf{V}_e \cdot \nabla) \mathbf{V}_e + n_i m_i (\mathbf{V}_i \cdot \nabla) \mathbf{V}_i \\ = -\nabla P + Q \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \end{aligned} \quad (21)$$

ここで $P = p_i + p_e$ は全圧力であり運動量交換の大きさが電子とイオンで大きさが等しく符号が異なるため運動量交換項は消去された。さらに、 $m_e/m_i \ll 1$ なので左辺第2項と第3項をまとめて $\rho(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}$ としてよい。

$\mathbf{V}_e = \mathbf{V}_i - \mathbf{j}/en_e \simeq \mathbf{V} - \mathbf{j}/en_e$ であるから式 (12) は

$$\mathbf{E} + \left(\mathbf{V} - \frac{\mathbf{j}}{en_e} \right) \times \mathbf{B} + \frac{1}{en_e} \nabla p_e - \frac{\mathbf{R}}{en_e} = \frac{m_e}{e^2 n_e} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} - \frac{m_e}{e} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \quad (22)$$

(10) で用いた衝突項 $\mathbf{R}$ は

$$\mathbf{R} = n_e \left(\frac{m_e \nu_{ei}}{n_e e^2} \right) (-en_e) (\mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i) = n_e e \eta \mathbf{j} \quad (23)$$

のように書き直すことができる。ただし抵抗率は以下のように定義した。

$$\eta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{m_e \nu_{ei}}{n_e e^2} \quad (24)$$

したがって、一般化されたオーム (Ohm) の法則が得られる。

$$\mathbf{E} + \left(\mathbf{V} - \frac{\mathbf{j}}{en_e} \right) \times \mathbf{B} + \frac{1}{en_e} \nabla p_e - \eta \mathbf{j} = \frac{m_e}{e^2 n_e} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} - \frac{m_e}{e} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \quad (25)$$

左辺の第1項、第4項だけが大きいときは普通のオームの法則 $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ に帰着する。

以上で導いた、二つのスカラー方程式と二つのベクトル方程式、すなわち、連続の式(質量保存の式)、運動方程式、一般化されたオームの法則をマクスウェル方程式(1)(2)(4)と組み合わせ、さらに圧力をこれらの量で表すことで、閉じた方程式系が構成される。この閉じた方程式系を一般的に磁気流体 (Magneto-Hydro Dynamics, MHD) 方程式という。

さらに簡略化するために、まず、ゆっくりした時間スケールにおいて電子の移動によって空間電荷が中和されるので、電荷密度 $Q = e(n_i - n_e) = 0$ となり電荷の連続の式 $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ となる。さらに同様の理由でマクスウェル方程式の変位電流項 $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ を落とすことができるためアンペールの式(1)は $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ であり、 $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ が恒等的に満たされてるので先述の電荷の連続の式は必要なくなる。一方、一般化されたオームの法則では電流の時間変化の項を無視でき、低圧力、低電流では左辺の $\mathbf{j}/en_e \times \mathbf{B}$ の項と第3項と右辺の第1項を無視できる。さらに右辺の $\mathbf{V}$ の項は左辺の $\mathbf{V}$ の項に比べ無視できるぐらい小さい。したがって磁気流体方程式をまとめると、以下のようになる。

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (26)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right) = -\nabla P + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (27)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad (28)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (29)$$

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) \quad (30)$$

上の方程式の変数名を表にまとめる。このとき変数の数のほうが方程式の数より

表 1: 使用される変数

ρ	流体密度
$\mathbf{V}$	速度
P	圧力
$\mathbf{j}$	電流密度
$\mathbf{B}$	磁場
$\mathbf{E}$	電場

一つ多いので、磁気流体方程式を閉じた方程式系にするにはもう一つ方程式を用意

する必要がある。解決策としては圧力項を密度など他の量で表すか、またはエネルギーの流れの方程式を用いるという方法がある。他にも状態方程式として断熱の式

$$\frac{dP\rho^{-\gamma}}{dt} = 0 \quad (31)$$

を用いることが多い。比熱比は、 d を現象の自由度として $\gamma = (d+2)/d$ で表されるので三次元では $\gamma = 5/3$ になる。また式 (28) に式 (30) を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{\sigma} \nabla \times \mathbf{j} \\ &= \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) + \frac{\eta}{\mu_0} \Delta \mathbf{B} \end{aligned} \quad (32)$$

となる。この式は誘導方程式と呼ばれる。また $\eta/\mu_0 = \nu_m$ を磁気粘性率という。さらに $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = -\Delta \mathbf{B}$ の関係式を用いた。

1.4 レイリー・テイラー不安定性

高密度プラズマと背景プラズマの流れの現象を説明するためにまず、密度の異なる流体の層の境界面で発達する不安定性を紹介する。本研究ではケルビン・ヘルムホルツ不安定性とレイリー・テイラー不安定性の2種類に焦点を当てた。

レイリー・テイラー不安定性 (以下 RT 不安定性 と記述する。) は、密度の大きい流体の層が密度が小さい流体の層の上に存在し、重力加速度等の加速度が働いている状況の時に発生する不安定性である。

はじめに直感的理解から示す。図5のように重たい流体が軽い流体の上に乗っている状態 ($\rho_1 > \rho_2$) を考える。今、重力加速度が起因となって2流体の境界面上に微小な摂動が加わり、図5のような状態になる。すると下から突き上げられた部分は周囲より軽いため、浮力が発生し、より上昇する。反対に下に突き出た部分は周囲より重いため、重力でさらに下降する。このようにして上に乗っていた重い流体と下にいた軽い流体の境界面に発生した不安定性は成長し、流体同士の混合が起こる。この不安定性を RT 不安定という。

この RT 不安定性を理論的に解く。流れは非圧縮性の流体とした。2層の流体の上層に密度 ρ_1 、流れの速度 u_1 、下層の密度を ρ_2 、流れの速度 u_2 とおいた。また重力加速度 g が鉛直下方に働くとした。図6のように、任意の点で流体に微小な摂動を加える。それにより密度が ρ から $\rho + \delta\rho$ ($\delta\rho/\rho \ll 1$)、圧力が $p + \delta p$ 、速度の x 成分が $u + \delta u$ 、 z 成分が w になったとする。微小量を線形化した運動方程式は

$$\rho \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial \delta p}{\partial x} \quad (33)$$

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho u \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial \delta p}{\partial z} - g \delta \rho \quad (34)$$

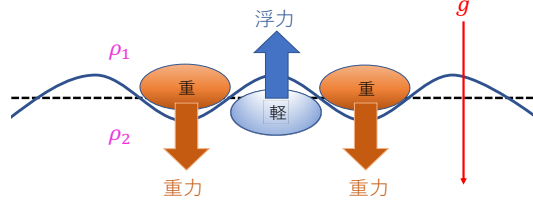


図 5: レイリー・テイラー不安定性の直感的理解

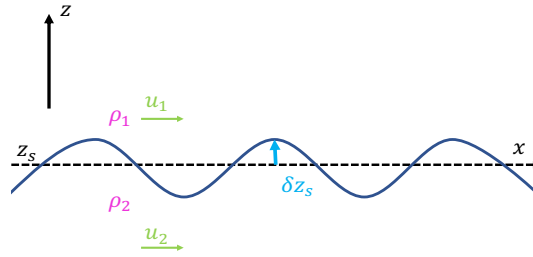


図 6: 密度・速度の異なる上下2層に摂動が生じる

非圧縮性流体の条件から

$$\frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (35)$$

流れに沿って流体の微小部分の密度は変化しないため

$$\frac{D(\rho + \delta \rho)}{Dt} = \frac{D\rho}{Dt} + \frac{D\delta \rho}{Dt} = 0 \quad (36)$$

が成立し、微小量については

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \delta \rho}{\partial x} = -w \frac{d\rho}{dz} \quad (37)$$

となる。境界面の位置を z_s とすると、境界面も微小変動により δz_s だけ変化し、変動を受けた面の位置は

$$z_s + \delta z_s(x, t) \quad (38)$$

となるので、

$$\frac{D\delta z_s}{Dt} = \frac{\partial \delta z_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial \delta z_s}{\partial x} = w(z_s) \quad (39)$$

となる。微小な変動 $\delta\rho$ 、 δp 、 δu 、 w を、 x 方向に進む波数 k 、振動数 ω の平面波とし、各微小変動を

$$f = Ae^{i(kx - \omega t)} \quad (40)$$

とおくと、式 (33),(34),(35),(37),(39) から以下の式を得る。

$$i\rho\delta u(ku - \omega) + \rho w \frac{du}{dz} = -ik\delta p \quad (41)$$

$$i\rho w(ku - \omega) = -\frac{d\delta p}{dz} - g\delta\rho \quad (42)$$

$$ik\delta u + \frac{dw}{dz} = 0 \quad (43)$$

$$i\delta\rho(ku - \omega) + w \frac{d\rho}{dz} = 0 \quad (44)$$

$$i(ku_s - \omega)\delta z_s = w(z_s) \quad (45)$$

u_s は境界面での値を表している。式 (41) に ik をかけ、式 (43) を用いて $k\delta u$ を消去し、式 (44) を用いて式 (42) から $\delta\rho$ 消去するとそれぞれ

$$-i\rho(ku - \omega) \frac{dw}{dz} + ik\rho w \frac{du}{dz} = k^2\delta p \quad (46)$$

$$i\rho w(ku - \omega) = -\frac{d\delta p}{dz} - \frac{igw}{(ku - \omega)} \frac{d\rho}{dz} \quad (47)$$

と表されるので、この2式から δp を消去すると

$$\frac{d}{dz} \left\{ \rho(ku - \omega) \frac{dw}{dz} - \rho kw \frac{du}{dz} \right\} - \rho k^2 w(ku - \omega) = gk^2 \frac{w}{(ku - \omega)} \frac{d\rho}{dz} \quad (48)$$

となる。続いて境界面 S における境界条件を考える。式 (45) から

$$\delta z_s = \frac{w(z_s)}{i(ku_s - \omega)} \quad (49)$$

より

$$\frac{w}{(ku - \omega)} \quad (50)$$

は面を通じて連続となる。さらに境界面を挟んで

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{z-\epsilon}^{z+\epsilon} \frac{df(z)}{dz} dz \equiv \Delta_s(f) = f(z_s + 0) - f(z_s - 0) \quad (51)$$

と表すことにする。式 (48) を $z_s - \epsilon$ から $z_s + \epsilon$ まで積分し、 $\epsilon \rightarrow 0$ の極限をとると

$$\Delta_s \left\{ \rho(ku - \omega) \frac{dw}{dz} - \rho kw \frac{du}{dz} \right\} = gk^2 \frac{w}{ku - \omega} \Delta_s(\rho) \quad (52)$$

となる。この式が境界面で満たされる境界条件である。

u_1, u_2, ρ_1, ρ_2 はそれぞれの領域で一定なので $du/dz = 0$, $d\rho/dz = 0$ なので式 (48) は

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = k^2 w \quad (53)$$

となる。この式の一般解は A を任意定数とし、 $z \rightarrow \pm\infty$ で $w \rightarrow 0$, および境界面 (ここでは $z_s = 0$ とする) での境界条件式 (50) を考慮すると境界条件を満たす解は

$$w(z) = A(ku_1 - \omega)e^{kz} \quad (54)$$

$$w(z) = A(ku_2 - \omega)e^{-kz} \quad (55)$$

ただし (54) は $z > 0$ 、(55) は $z < 0$ とする。境界条件式 (52)、式 (54)、(55) から

$$\rho_2(ku_2 - \omega)^2 + \rho_1(ku_1 - \omega)^2 = -gk(\rho_1 - \rho_2) \quad (56)$$

が得られる。この式を ω に関する 2 次方程式とみると、解は

$$\omega = k \frac{\rho_1 u_1 + \rho_2 u_2}{\rho_1 + \rho_2} \pm i \sqrt{\frac{k^2 \rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} (u_1 - u_2)^2 + gk \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}} \quad (57)$$

となる。式 (57) が密度・水平方向の速度が異なる 2 層の境界面におけるゆらぎの分散関係式である。

分散関係式 (57) に $u_1 = u_2 = 0$ を代入すると、この条件での分散関係は

$$\omega = \pm i \sqrt{gk \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}} \quad (58)$$

となるため、この系が不安定になるための条件は

$$\begin{aligned} \rho_1 - \rho_2 &> 0 \\ \rho_1 &> \rho_2 \end{aligned} \quad (59)$$

つまり、高密度の（重い）流体が低密度の（軽い）流体の上に乗っている（加速度が下向きに存在する）状態では、各層の境界面での微小なゆらぎは波数 k に関わらず成長する。

また与えたゆらぎの成長の時間スケールは $t_{RT} \sim 1/\omega$ で与えられるため成長のタイムスケールは

$$t_{RT} \sim \frac{1}{\omega} \propto \frac{1}{k^{1/2}} \propto \lambda^{1/2} \quad (60)$$

となるため、RT 不安定性では、ゆらぎの波長が短いほど早く成長して不安定になる。[6]

1.5 ケルビン・ヘルムホルツ不安定性

ケルビンヘルムホルツ不安定性 (以下 KH 不安定性 と記述する。) は、二つの密度の異なる流体の層に速度差が存在する時に発生する不安定性である。

図7のように密度の違う非粘性かつ非圧縮の2流体の間に速度シアが発生して

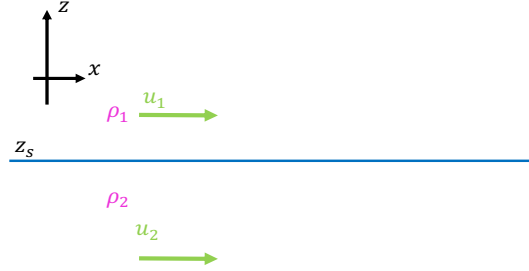


図 7: ケルビン・ヘルムホルツ不安定性の直感的理解 1

いる状態 ($\rho_1 \neq \rho_2$ 、 $u_1 \neq u_2$) を考える。今、2 流体の境界面上に微小な摂動が加わり、図8のような状態になる。 $z \rightarrow \infty$ の速度 $u_z = 0$ とする。 $x < x_0$ の ρ_1 の層側には摂動の波面 z_w が $z_w > z_0$ 、 $x > x_0$ の ρ_1 の層側には摂動の波面 z_{-w} が $z_{-w} < z_0$ であり、流体は非粘性・非圧縮であるため、

$$\int_{z_w}^{\infty} u_{1(x < x_0)} dz = \int_{z_{-w}}^{\infty} u_{1(x > x_0)} dz \quad (61)$$

が成り立つ。波面と初期の境界面 z_0 の位置関係から、微小摂動発生後は $u_{1(x < x_0)} > u_1$ 、 $u_{1(x > x_0)} < u_1$ 、言い換えると $u_{1(x < x_0)} > u_{1(x > x_0)}$ が成り立つような速度となる。同様に ρ_2 の層でも $u_{2(x < x_0)} < u_2$ 、 $u_{2(x > x_0)} > u_2$ 、言い換えると $u_{2(x < x_0)} < u_{2(x > x_0)}$ が成り立つような速度となる。(図8)

ここでベルヌーイの定理

$$\frac{u^2}{2} + \Pi + \phi = \text{const} \quad (62)$$

から (ただし $\nabla P / \rho = \nabla \Pi$, ϕ はポテンシャルを表す。) 速度が上がると圧力は下がるので ρ_1 層と ρ_2 層の初期圧力を P_0 とすると $P_{1(x < x_0)} < P_0$, $P_{1(x > x_0)} > P_0$, $P_{2(x < x_0)} > P_0$, $P_{2(x > x_0)} < P_0$ となるような圧力になる。すると各層を挟んだ z_s の境界面で $-\nabla P$ の効果により、 $x < x_0$ では z 方向に、 $x > x_0$ では $-z$ 方向に力が加わる (図8)。この力によって微小摂動は成長する。これが KH 不安定性の直感的理解となる。

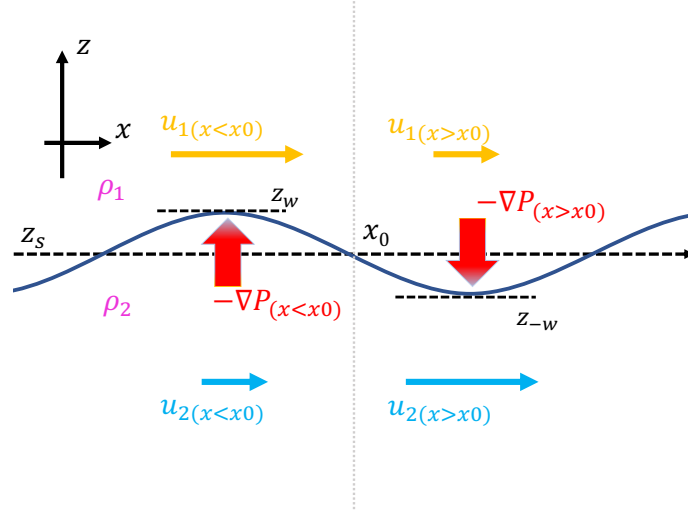


図 8: ケルビン・ヘルムホルツ不安定性の直感的理解 2

分散関係式 (57) から $u_1 \neq u_2 \neq 0$ のときの不安定性条件は

$$\begin{aligned} \frac{k^2 \rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} (u_1 - u_2)^2 + gk \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} &> 0 \\ \frac{k^2 \rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} (u_1 - u_2)^2 &> gk \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \end{aligned} \quad (63)$$

となり、この式をみたすとき、 ω は複素数になり、不連続面は不安定になる。また

$$k_{min} = \frac{g(\rho_1 + \rho_2)(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1 \rho_2 (u_1 - u_2)^2} \quad (64)$$

とおくと、 $\rho_2 > \rho_1$ のとき、 $k > k_{min}$ の変動は成長し不安定になる。KH 不安定性は u_1 と u_2 の差が 0 でない限り、小さな差でも必ず不安定性が生じる。[6]

1.6 磁場の凍りつき

プラズマのような抵抗が 0 に近似できるような物質には他にも特徴的な性質があり、その一つに「磁場の凍りつき」というものがある。

「MHD 方程式」の章で導出した誘導方程式 (32) の右辺第 1 項と第 2 項の比 R_m は磁気レイノルズ数とよばれ、

$$R_m \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{磁場の対流項}}{\text{磁場の拡散項}} = \frac{\nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B})}{(\eta/\mu_0)\Delta \mathbf{B}} \quad (65)$$

で表される。 $R_m \ll 1$ のときは拡散項の影響が大きくなる。一方、 $R_m \gg 1$ のときはクーロン衝突だけで異常抵抗が効かないプラズマとなり、磁場の対流効果の方が拡散効果に比べ極めて大きく、十分に分離している。このため $R_m \gg 1$ のとき、電

気抵抗率 $\eta = 0$ と近似することができる。磁気レイノルズ数は宇宙核融合プラズマや核融合装置プラズマでは $10^4 \sim 10^6$ 程度であるため電気抵抗は 0 と近似している。また $\eta = 0$ よりオームの法則 $\mathbf{E} = \mathbf{V} \times \mathbf{B}$ を近似した式で用いることが可能である。したがって、誘導方程式 (32) に適用すると、

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \quad (66)$$

ここでプラズマ中の面積 S を通る磁束 $\Phi \equiv (d/dt) \int_{s(t)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ の時間変化は磁場の時間変化と時刻 t から $t + dt$ の間に面積 S から逃げ出す磁束を表している。

$$\begin{aligned} d\Phi &\equiv \int_{s(t+dt)} \mathbf{B}(t+dt) \cdot d\mathbf{S} - \int_{s(t)} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{S} \\ &= dt \int_{s(t)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} - \int \mathbf{B}(t) \cdot (d\mathbf{l} \times \mathbf{V} dt) \\ &= dt \int_{s(t)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} - dt \int \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} \end{aligned} \quad (67)$$

以上から、

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_{s(t)} \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \right] \cdot d\mathbf{S} \quad (68)$$

が得られる。式 (66) が成り立つとき、式 (68) の左辺が 0 となる。つまり、電気抵抗が 0 である理想磁気流体プラズマの場合、一つの体積要素を占めるプラズマと磁力線は離れず一体となる。この現象を「磁場の凍りつき」という。[5]
抵抗が有限の場合、この磁場の凍りつきは破れ、磁束は変化する。

2 シミュレーションモデル

2.1 基礎方程式

本研究ではソフトウェア「CANS+」を用いて数値計算をおこなった。高安定かつ高精度のMHDシミュレーションが可能な高次精度MHD統合ソフトウェア「CANS+」は、以下のような規格化されたMHD方程式を解いている。
連続の式 (質量保存の式) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{V} = 0 \quad (69)$$

運動量保存の式 :

$$\frac{\partial \rho \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V} + p_t \mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{B}) = 0 \quad (70)$$

誘導方程式

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{V} + \psi \mathbf{I}) = -\nabla \times \eta \mathbf{j} \quad (71)$$

エネルギー保存の式

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot ((e + p_t) \mathbf{V} - \mathbf{B} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{B})) = S(\rho, p) \quad (72)$$

ここで、 $\mathbf{I}$ は単位行列、 p_t は全圧力を表し、(プラズマ圧力 + 磁気圧力) なので、

$$p_t = p + \frac{B^2}{2} \quad (73)$$

プラズマ圧は比熱比を γ で表すとすると、

$$p = (\gamma - 1) \left(e - \frac{1}{2} \rho \mathbf{V}^2 - \frac{B^2}{2} \right) \quad (74)$$

と与えられる。また式 (71) に含まれる ψ は

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (75)$$

からの誤差をなるべく小さいままで計算するために導入されたスカラ関数で、

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + c_h^2 \nabla \cdot \mathbf{B} = -\frac{c_h^2}{c_p^2} \psi \quad (76)$$

の方程式に従って計算が進められる。ここで c_h 、 c_p はそれぞれ任意の値を持つ伝搬速度、減衰係数を表す。

式 (72) の右辺はソース項であり、低圧力領域への計算安定化として陰に導入されている。つまり厳密なエネルギー保存は数値的安定化のために成り立っていない。

[7]

2.2 数値計算法

本研究では衝撃波などの急激な物理量の変化だけでなく渦等の極値をもつ状態を数値シミュレーションする。そこで急激な物理量変化付近の計算は振動が起きないように精度を落とし、極値では精度をよく再現する必要がある。そこで上述の基礎方程式系を解く計算スキームは

- 5次精度のMP5法によるセル境界への変数補間
- HLLD 近似リーマン解法を用いた。

そのためにまず有限体積法と一次精度風上差分法について説明する。[8]

モデル方程式として線形の移流方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (77)$$

を考える。 c は $c > 0$ とする定数。移流方程式を近似する方法のひとつとして離散化を用いて

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} \quad (78)$$

とおく方法がある。 n は時間ステップ、 i は x 方向の空間ステップを表す。式(78)を代入すると移流方程式は

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad (79)$$

これを变形すると

$$u_i^{n+1} = u_i^n - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n) \quad (80)$$

u_i^n は位置が $x = i\Delta x$ 、時間は $t = n\Delta t$ を示す。この移流方程式では上流で起こったことが速度 c で下流に伝播する。 c が正ならば左から右へと情報が伝播し、負の場合は右から左へと伝播する。式(79)では i での u を決めるのにそれより左(風上)のデータを参照にして計算する。つまり情報の伝播してくる方向を考えて差分をとる。式(80)を用いた数値計算解法を一次精度の風上差分法という。ここでクーラン数(Courant number)を以下のように定義する

$$\nu = c \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (81)$$

クーラン数は物理的な信号の伝達速度(c)と、数値的な信号伝達速度($\Delta x/\Delta t$)の比を表す無次元量である。もし数値的な信号の伝播の勾配が物理的な信号の伝播の勾配よりも小さい場合、言い換えると $\Delta x/\Delta t < c$ のとき、計算スキームでは次のステップの物理的な状態を決めるのに十分な情報を得ることができなくなる。結果、計算が破綻する。数値的な信号の速度が物理的な信号の速度を常に超えない状態を維持し続けないと計算スキームは不安定となる。したがって計算スキームが安定す

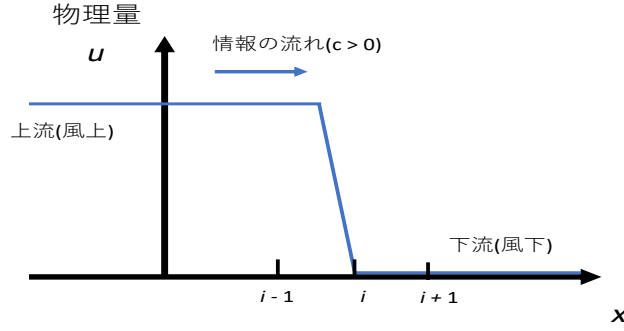


図 9: 移流方程式の初期値

るには $|\nu| \leq 1$ を満たす必要がある。この条件を CFL 条件という。

続いて有限体積法について記述する。移流方程式を

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad (82)$$

と書き直す。ここで、 $f(u) = cu$ ($c > 0$) とおいた。連続に並ぶ有限な体積のセルを考える。 $\tilde{f}$ は数値流速を表す。図 10 からわかるように、 u_i^n は $i-1/2$ と $i+1/2$ のセル境界を通過する数値流速を用い以下のように書くことができる。

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} \Delta x - u_i^n \Delta x + \tilde{f}_{i+1/2}^n \Delta t - \tilde{f}_{i-1/2}^n \Delta t &= 0 \\ u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{f}_{i+1/2}^n - \tilde{f}_{i-1/2}^n) \end{aligned} \quad (83)$$

このとき数値流速の表現方法は計算スキームによって異なり 1 次精度風上差分法では

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{i+1/2}^n &= \frac{c}{2} (u_{i+1}^n + u_i^n) - \frac{c}{2} (u_{i+1}^n - u_i^n) \\ &= cu_i^n \\ &= f(u_i^n) \end{aligned} \quad (84)$$

しかしながら、これらの式は $c > 0$ のみ正しい。なぜなら情報の伝播方向が正確に表されてなければ正確な答えを得ることができないからである。そこで c が正負いずれの場合でも正しくなるように表す。1 次精度の風上差分法の数値流速は場合分けにより

$$\tilde{f}_i^{n+1/2} = \begin{cases} f_i^n & (0 \leq \nu \leq 1) \\ f_{i+1}^n & (-1 \leq \nu \leq 0) \end{cases} \quad (85)$$

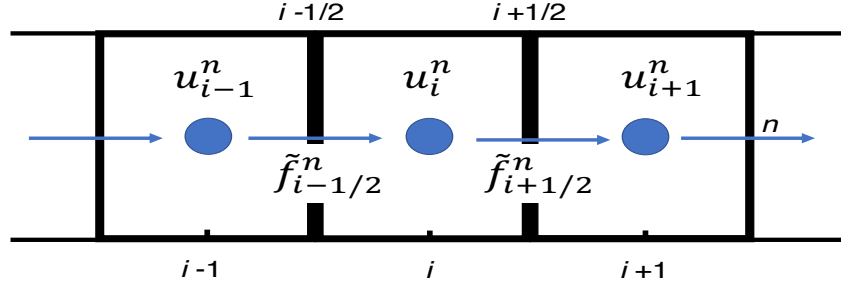


図 10: 有限体積のセルと格子境界を過ぎる流速

まとめると

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}_{i+1/2}^n &= \frac{c - |c|}{2} u_{i+1} + \frac{c + |c|}{2} u_i \\
 &= \frac{1}{2} [(cu_{i+1} + cu_i) - |c|(u_{i+1} - u_i)] \\
 &= \frac{1}{2} [(f(u_{i+1}) + f(u_i)) - |c|(u_{i+1} - u_i)]
 \end{aligned} \tag{86}$$

式 (86) は高次精度風上差分法につながる重要な表示式である。

今回、用いた HLLD 近似リーマン解法は、MHD 方程式に対する代表的な風上差分法の一つである [9]。この解法のメリットは

- 接触不連続、接線不連続が精度よく解ける
- 密度や圧力が負にならない

HLLD リーマン近似解法を用い、風上差分法を高精度化したものが 2 次精度の MUSCL 法である。しかしこれでは渦等の極値での精度が良くないため、さらに精度の高い滑らかな極値を描くことができる 5 次精度の MP5 法を用いた [10]。

時間更新は 3 次精度の TVD (Total-Variation Diminishing) Runge-Kutta 法を用いている。[11] [12]

流体・MHD 計算のような衝撃波、不連続を含む場合、通常の Runge-Kutta 法で行う線形安定性解析では不十分である。そのため前進 Euler 法 (1 次の Runge-Kutta

法) に関して数値スキームが TVD 条件

$$TV[u_j] = \sum_j |u_{j+1} - u_j| \quad (87)$$

$$TV[u^n + \Delta t L(u^n)] \leq TV[u^n] \quad (88)$$

を満たすならこの計算法で積分した $n+1$ ステップ目の解 y^{n+1} も TVD 条件

$$TV[u^{n+1}] \leq TV[u^n] \quad (89)$$

を満たすことが保証される。そのため、解の単調性を保ちつつ時間方向に高次精度化することが可能となる。

一般的な Runge-Kutta 法は、ある任意関数 $du/dt = L(u)$ とすると以下のように表される。

$$u^{n+1} = u_n + \Delta t \sum_{l=1}^s b_l k_l \quad (90)$$

$$k_l = L\left(u_j + \Delta t \sum_{m=1}^{l-1} a_{lm} k_m\right) \quad (91)$$

係数 a, b の組み合わせは自由であり、計算効率や安定性などから選択される。 s は段数を表しており、今回の数値計算法では 3 次精度まで計算しているため $s = 3$ まで式 (90), (91) を展開すると、

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t(b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3) \quad (92)$$

$$k_1 = L(u^n) \quad (93)$$

$$k_2 = L(u^n + \Delta t a_{21} k_1) \quad (94)$$

$$k_3 = L(u^n + \Delta t a_{31} k_1 + \Delta t a_{32} k_2) \quad (95)$$

式 (92) に k_1, k_2, k_3 をそれぞれ代入すると、

$$\begin{aligned} u^{n+1} &= u^n + \Delta t b_1 L(u^n) + b_2 L(u^n + \Delta t a_{21} k_1) + b_3 L(u^n + \Delta t a_{31} k_1 + \Delta t a_{32} k_2) \\ &= u^n + \Delta t \{ (b_1 + b_2 + b_3) L(u^n) + \Delta t (b_2 a_{21} + b_3 a_{31} + b_3 a_{32}) L(L(u^n)) \} \\ &\quad + (\Delta t)^3 b_3 a_{21} a_{32} L(L(L(u^n))) + O((\Delta t)^4) \\ &= u^n + \Delta t (b_1 + b_2 + b_3) L(u^n) + (\Delta t)^2 \{ b_2 a_{21} + b_3 (a_{31} + a_{32}) \} \frac{dL}{dt} \\ &\quad + (\Delta t)^3 b_3 a_{21} a_{32} \frac{d^2 L}{dt^2} + O((\Delta t)^4) \end{aligned} \quad (96)$$

ここで厳密解として u^{n+1} をテイラー展開する

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t L(u^n) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial L(u^n)}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^3}{6} \frac{\partial^2 L(u^n)}{\partial t^2} + O((\Delta t)^4) \quad (97)$$

式 (96) と式 (97) の係数を比較すると

$$b_1 + b_2 + b_3 = 1 \quad (98)$$

$$b_2 a_{21} + b_3 (a_{31} + a_{32}) = \frac{1}{2} \quad (99)$$

$$b_3 a_{21} a_{32} = \frac{1}{6} \quad (100)$$

この3式を満たし、なおかつ式 (89) の TVD 条件を満たす係数の組み合わせを決めれば良い。この条件を満たすように3次精度 Runge-Kutta 法は

$$\begin{aligned} b_1 &= b_2 = \frac{1}{6} \\ b_3 &= \frac{2}{3} \\ a_{21} &= 1 \\ a_{31} &= a_{32} = \frac{1}{4} \end{aligned} \quad (101)$$

と係数を置いており、各係数を式 (92) に代入すると

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \left(\frac{1}{6} k_1 + \frac{1}{6} k_2 + \frac{2}{3} k_3 \right) \quad (102)$$

$$k_1 = L(u^n) \quad (103)$$

$$k_2 = L(u^n + \Delta t k_1) \quad (104)$$

$$k_3 = L(u^n + \frac{\Delta t}{4} (k_1 + \Delta t k_2)) \quad (105)$$

この式を式変形し書き直すと、3次精度の TVD Runge-Kutta 法は以下の計算式によって計算される。

$$u^{(1)} = u^n + \Delta t L(u^n) \quad (106)$$

$$u^{(2)} = \frac{3}{4} u^n + \frac{1}{4} [u^{(1)} + \Delta t L(u^{(1)})] \quad (107)$$

$$u^{(n+1)} = \frac{1}{3} u^n + \frac{2}{3} [u^{(2)} + \Delta t L(u^{(2)})] \quad (108)$$

またこの計算法のメリットとして、計算中は u^n のみ保存しておけば、 $u^{(1)}$ 、 $u^{(2)}$ はその都度、その場で入力が出力で上書きされるので、メモリ消費を抑えられる点が挙げられる。

2.3 シミュレーションモデル

はじめに今回のシミュレーションの比熱比は

$$\gamma = \frac{5}{3} \quad (109)$$

とした。

本研究で用いたシミュレーションの計算領域と境界条件を以下に示す。 x 方向は-10

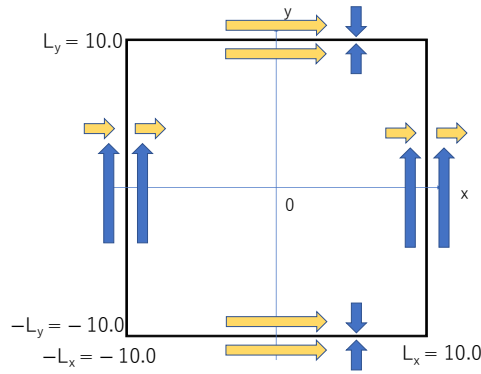


図 11: シミュレーションの計算領域と境界条件
(青色矢印は反射境界、黄色矢印は周期境界を表す)

$-10 < x < 10$ の範囲で、 y 方向は $-10 < y < 10$ の範囲で計算した。境界条件は x 方向は周期境界、 y 方向は反射境界とした。(図 11)

また今回の研究でのシミュレーションの初期条件は以下のように与えた。

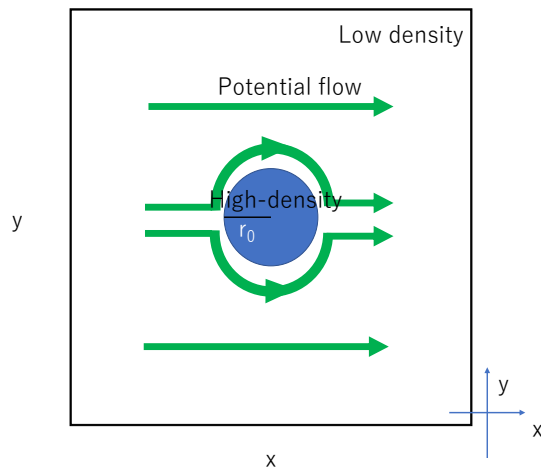


図 12: シミュレーションモデル

この図 12 は高密度プラズマ塊が背景プラズマ中を動いている様子をモデル化したものである。この時、シミュレーション中での流れは渦がなく、非粘性流体である potential 流を用いた。

先述の potential 流は

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 - \frac{1}{2(r/r_0)^3} \{3\mathbf{n}(\mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{V}_0\} \quad (110)$$

の式で表される。式 (110) の $\boldsymbol{n}$ は高密度プラズマ塊部分に対する法線ベクトルを表しており、

$$\boldsymbol{n} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \quad (111)$$

で表される。また高密度プラズマ塊部分の円の半径は $r_0 = 1.0$ とした。

3 結果

この章では、第2章の最後に述べた初期条件で x 方向や y 方向に磁場を入れたり、密度比や流れの速度を変えた数値シミュレーションの結果を示す。

ここで各シミュレーションの初期パラメータを述べる。高密度プラズマ塊と背景プラズマの密度比を rr とすると、表2 で計算した。

表 2: 計算した各パラメータ (密度比依存性)

	背景速度 V_0	密度比 rr
1.	0.5	2
2.	0.5	10
3.	0.5	100
4.	0.5	1000

次に初期速度を変化させる。音速が $V_0 = 1$ になるようにするため、圧力 P を

$$P = \frac{1}{\gamma} = \frac{3}{5} \quad (112)$$

とし、表3 のように計算をおこなった。

表 3: 計算した各パラメータ (背景速度依存性)

	背景速度 V_0	密度比 rr
5.	0.8	100
6.	1.1	100

さらに磁場を入れる計算を行った。

$$\beta = \frac{P}{(\mathbf{B}^2/2)} \quad (113)$$

$$= \frac{2P}{\mathbf{B}^2} \quad (114)$$

で与えられる β 値を用いて計算を行った。 $\mathbf{B}^2/2$ は磁場の圧力を表している。磁場の方向は各 β 値で x 軸方向と y 軸方向の2種類の方向に与えてそれぞれで計算を行った。(表4)

本研究の数値シミュレーションは、周期境界条件の影響を受けないよう、time = 0 から time = 20 までの範囲でおこなった。

表 4: 計算した各パラメータ (磁場依存性)

	背景速度 V_0	密度比 rr	磁場の強さ (β 値)
7.	0.5	100	1
8.	0.5	100	10
9.	0.5	100	100

3.1 密度比依存性

流れの速度を一定にして、高密度プラズマ塊と背景プラズマの密度比を変化させた。背景プラズマを流れる流れの速度は全て $V_0 = 0.5$ とした。図 13 は密度比 $rr = 2$ 、図 14 は密度比 $rr = 10$ 、図 15 は密度比 $rr = 100$ 、図 16 は密度比 $rr = 1000$ のプラズマ塊の時間変化ダイナミクスを示す。

各初期条件での図は上段左側から $\text{time} = 1, \text{time} = 2$, 中段左側から $\text{time} = 5, \text{time} = 10$, 下段左側から $\text{time} = 15, \text{time} = 20$ での状態である。図 17 は密度比 $rr=2, 10$ の低密度比の時刻 $t=20$ の拡大図、図 18 は密度比 $rr=100, 1000$ の高密度比の時刻 $t=20$ の拡大図である。

図 17 より $rr = 2, 10$ での低密度比ではプラズマ塊の側面後方に KH 不安定性特有の渦が確認された。一方、図 18 より $rr = 100, 1000$ の密度比が大きくなると側方に波打った様子の不安定性に加えて、前方に別の不安定性が確認できた。 $rr = 1000$ はプラズマ塊が高密度であるためあまり不安定性等は成長しなかったが、 $rr=100, 1000$ の高密度比ではどちらもプラズマ塊後方に乱流の発達を確認できた。

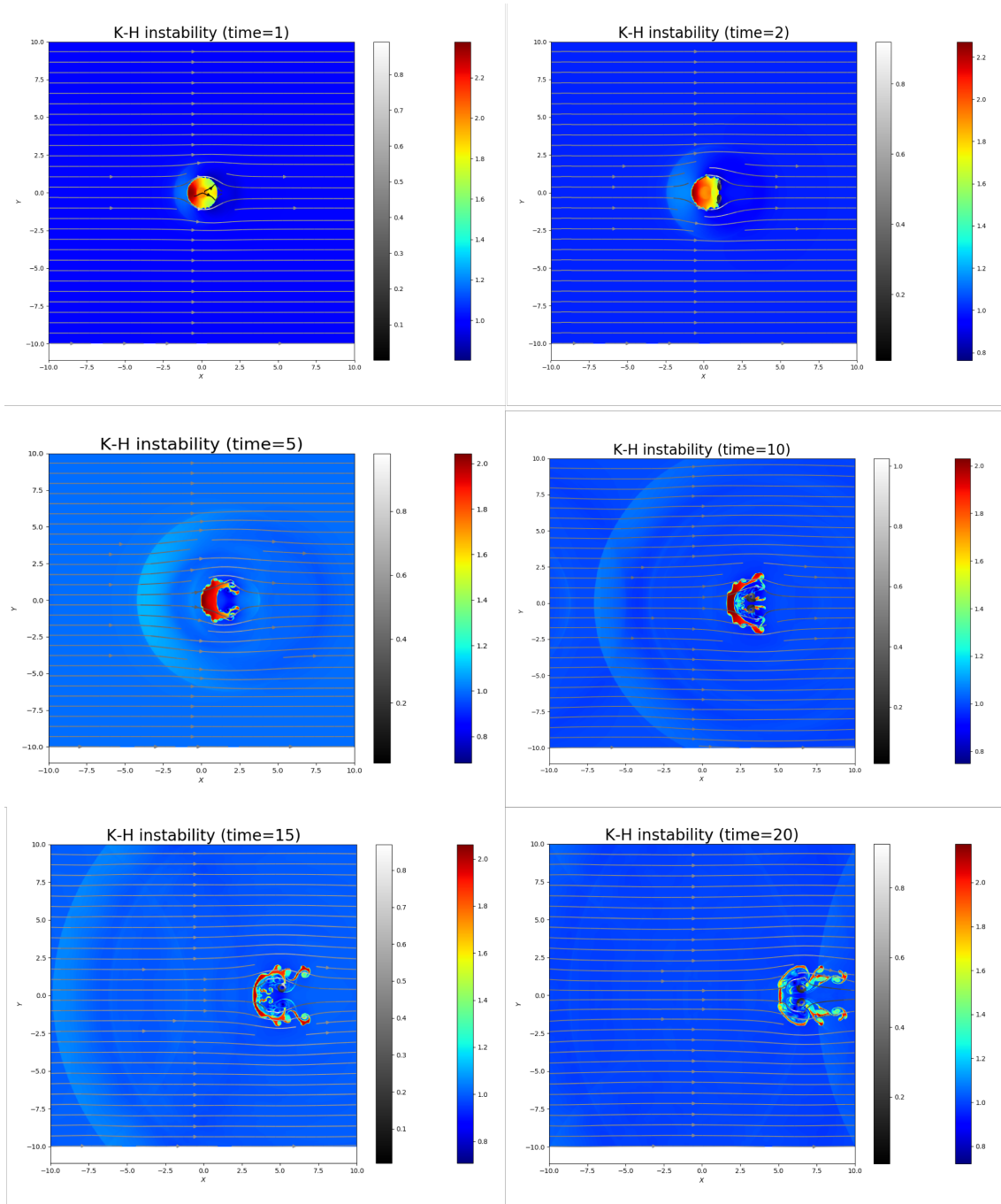


図 13: $rr = 2$

(流れを流線で表し、密度をカースケールで示した。左上から右下にかけて横向きに時刻 $t = 1, 2, 5, 10, 15, 20$ の図を示す。)

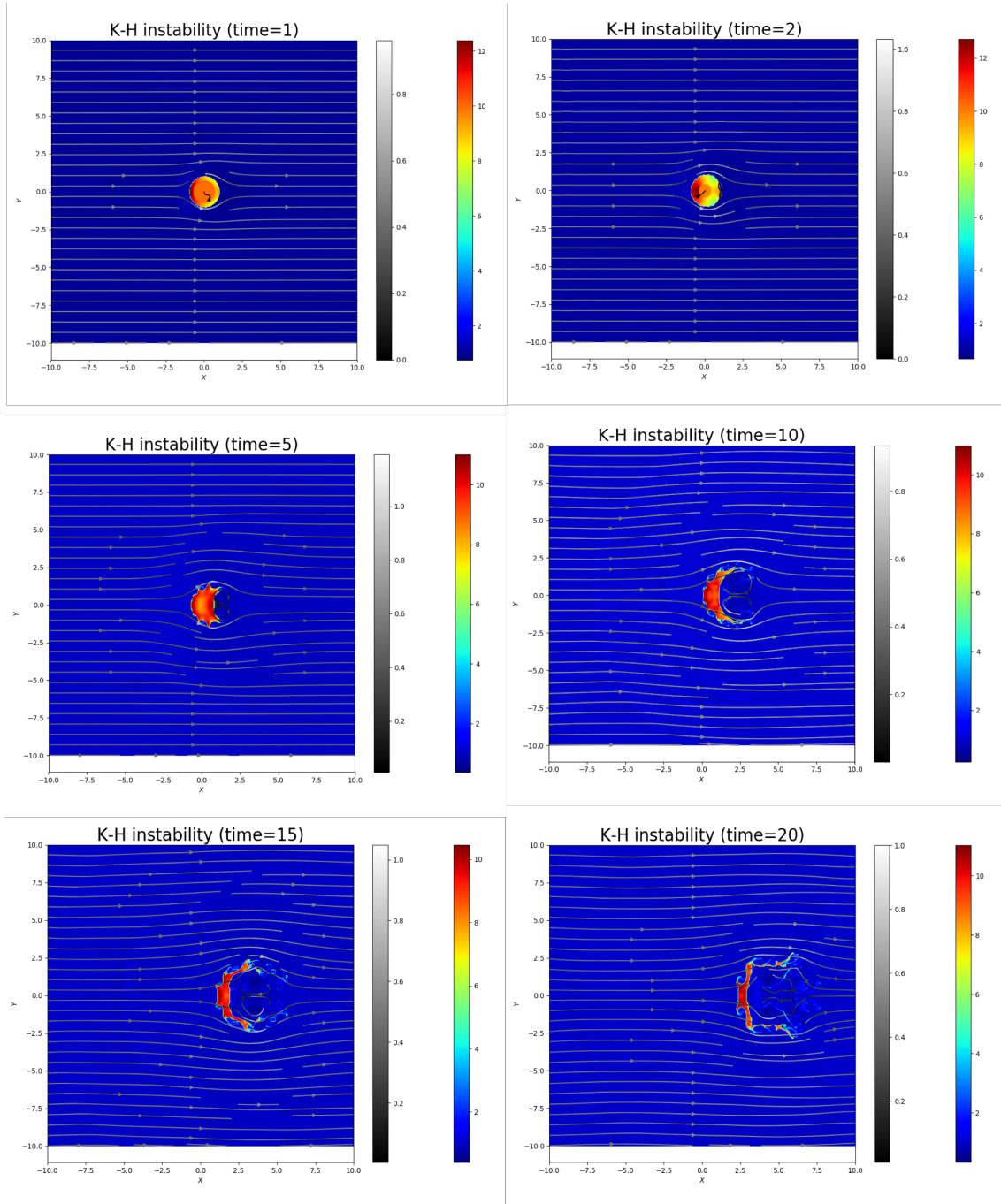


図 14: $rr = 10$

(図 13 から図 16 までと図 19 と図 20 の色や線、配置等は図 13 と同様)

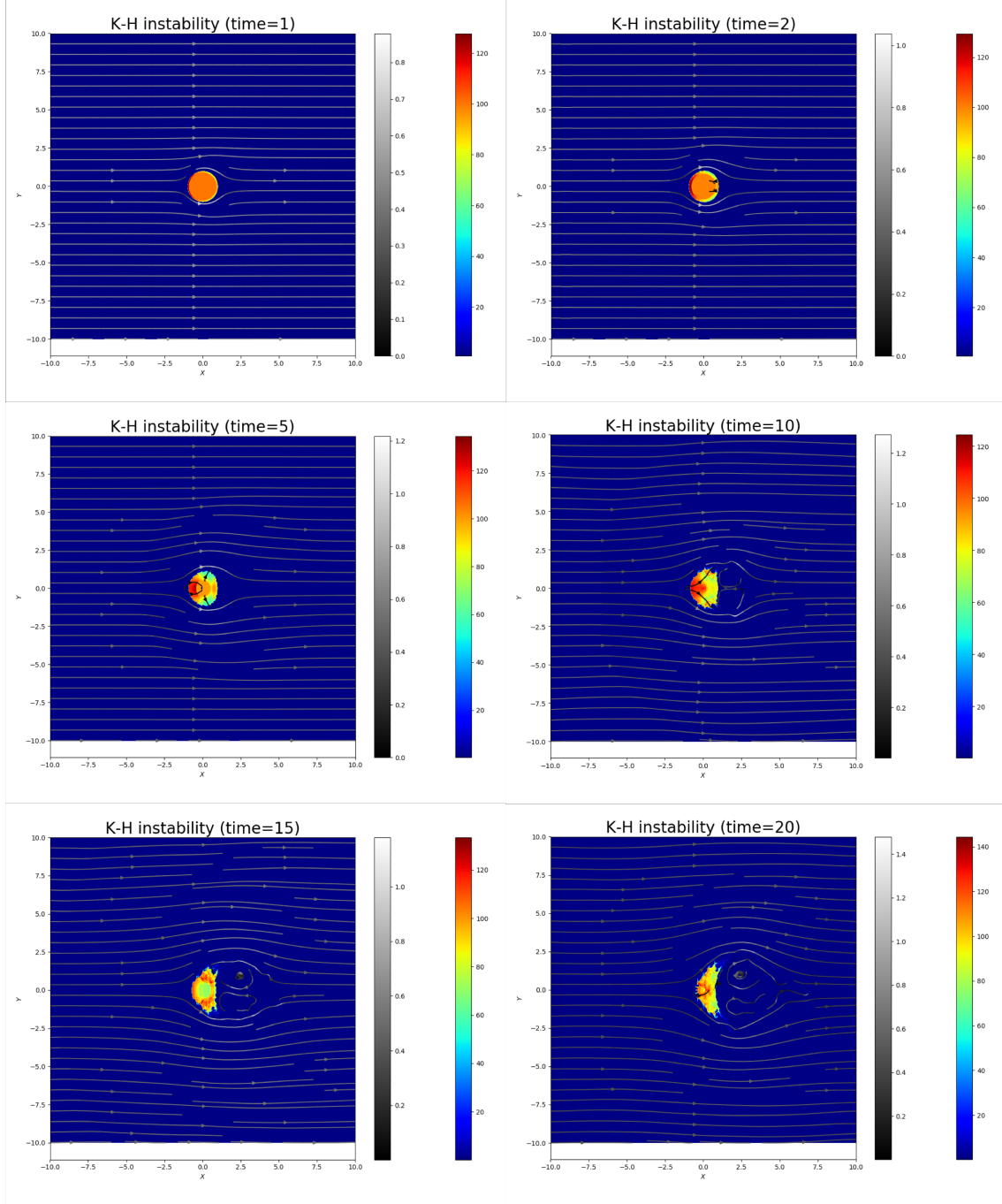


図 15: $rr = 100$

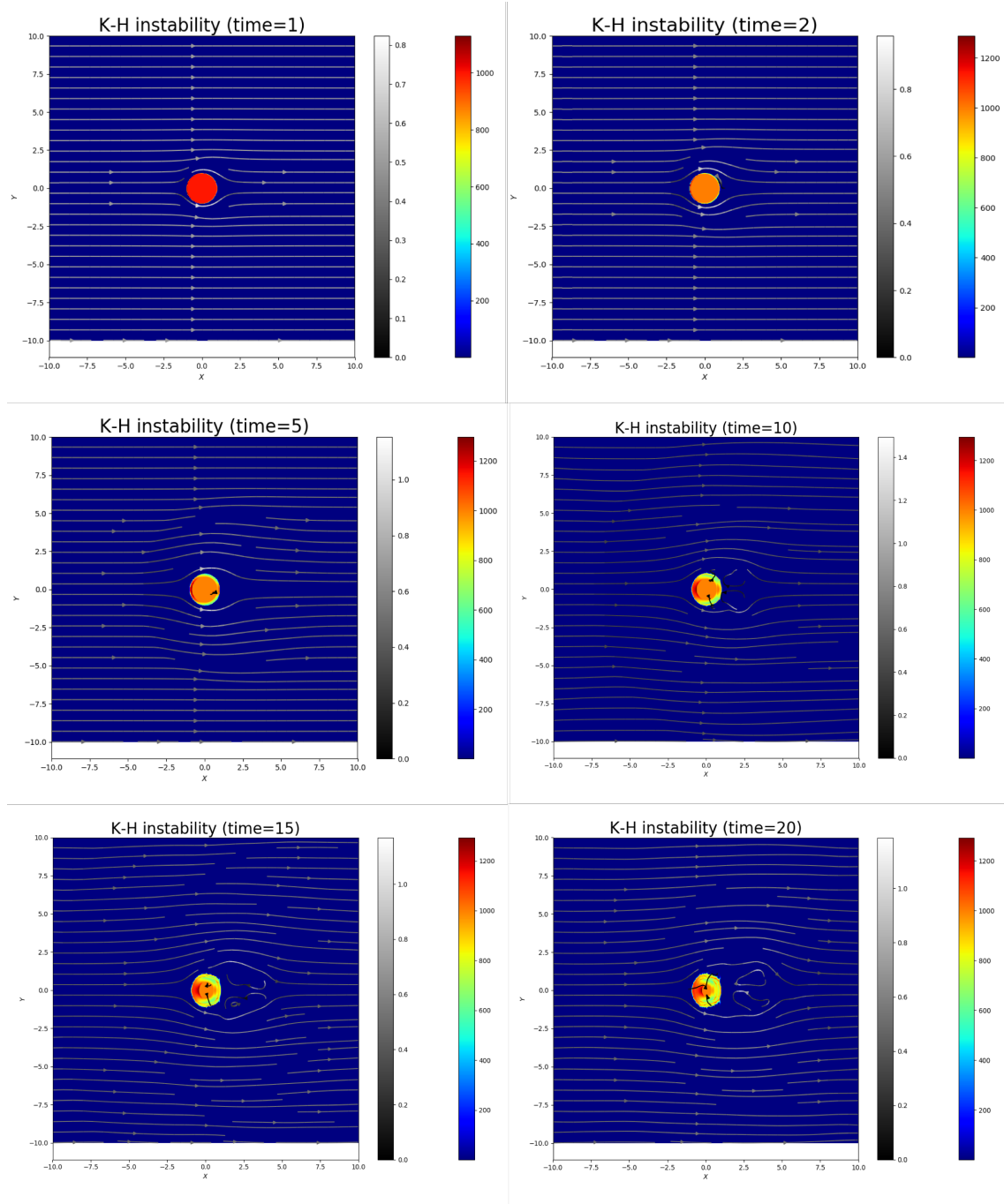


图 16: $rr = 1000$

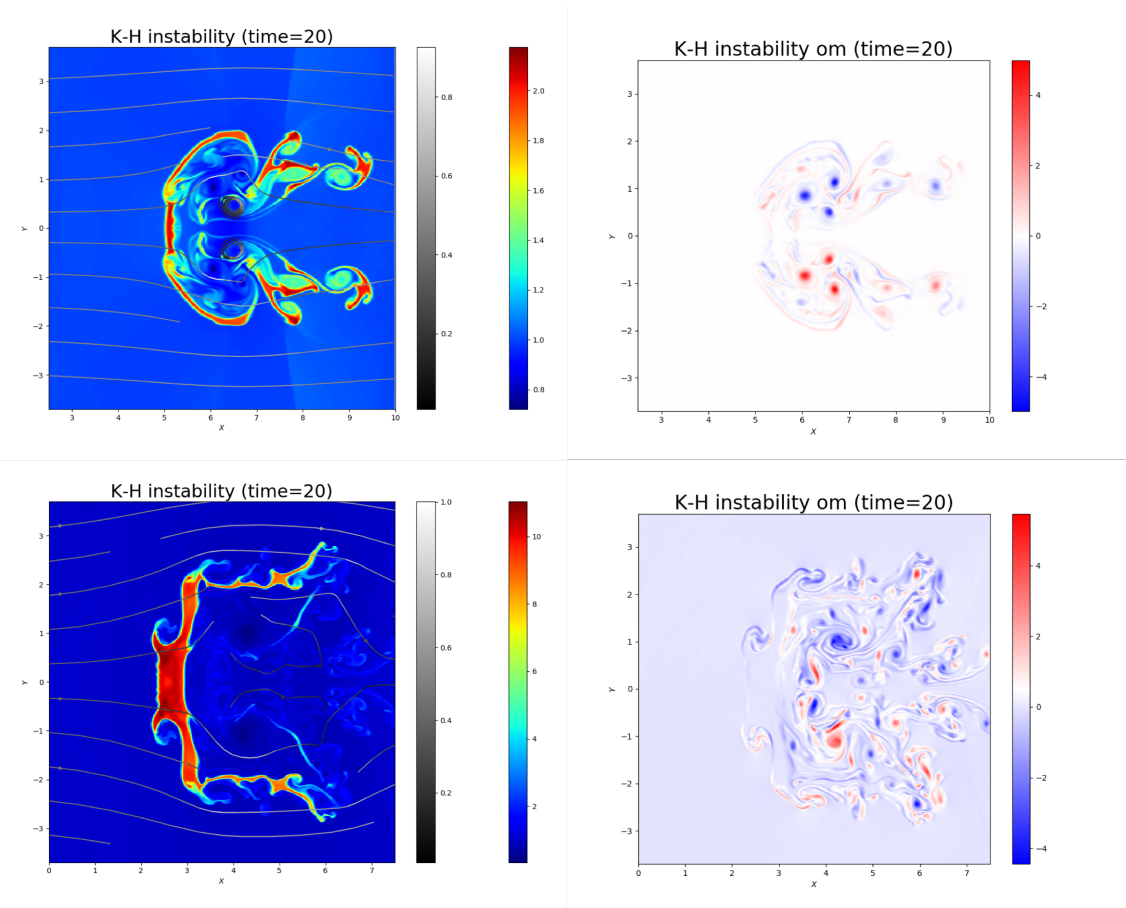


図 17: 低密度比のプラズマ塊 拡大図

(上から密度比 $rr=2, 10$ の時刻 $t=20$ の密度のカラースケールと渦度の空間分布。範囲は y 軸に $[-3.7, 3.7]$ x 軸は $rr=2$ が $[2.5, 10.0]$, $rr=10$ が $[0.0, 7.5]$)

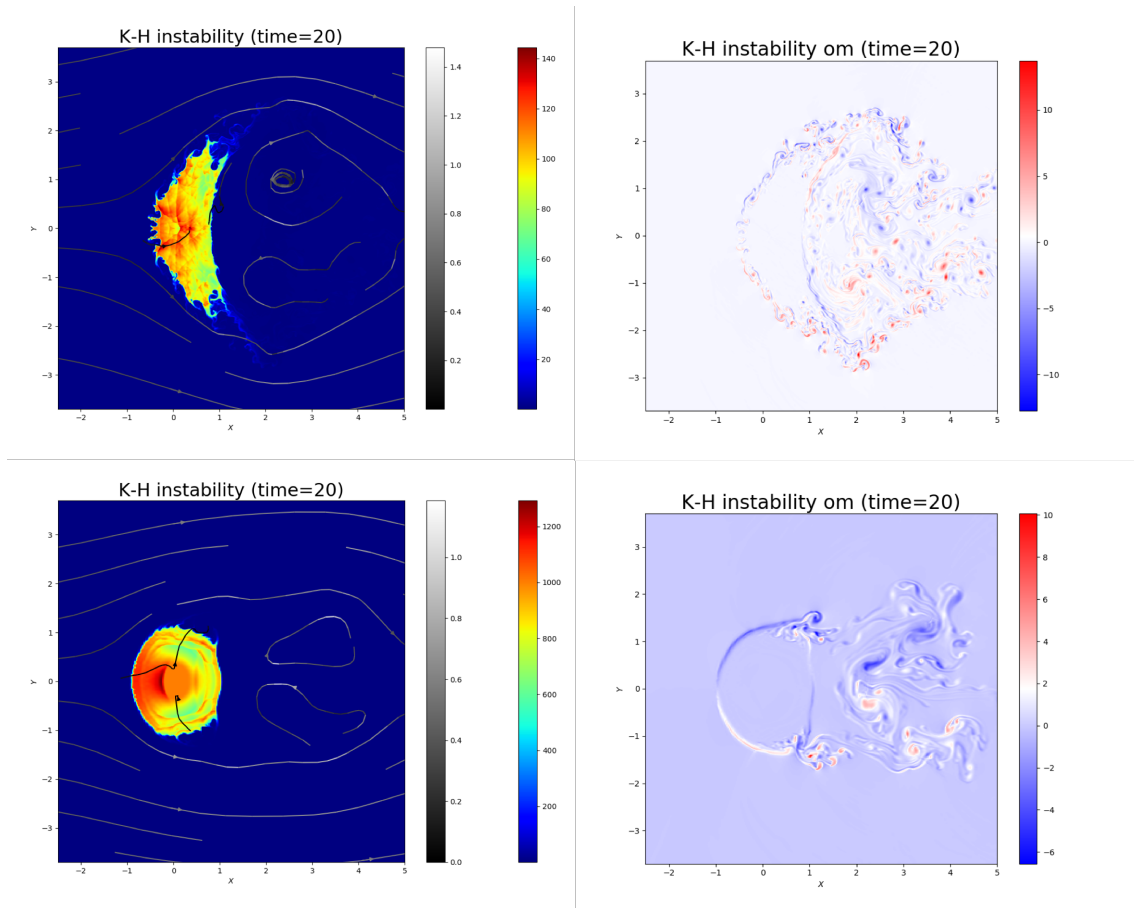


図 18: 高密度比のプラズマ塊 拡大図

(上から密度比 $rr=100, 1000$ の時刻 $t=20$ の密度のカラースケールと渦度の空間分布。範囲は y 軸に $[-3.7, 3.7]$ x 軸は $rr=100, 1000$ が $[-2.5, 5.0]$)

3.2 背景速度依存性

高密度プラズマ塊と背景プラズマの密度比を一定にし、流れの速度を変化させた。プラズマ塊は高密度で計算をおこなうが、 $rr = 1000$ ではより高密度であるため時間発展がより必要であり、計算時間がかかる。よって密度比は $rr = 100$ とした。図 19 は流れの速度を $V_0 = 0.8$ 、図 20 は流れの速度を $V_0 = 1.1$ のプラズマ塊の時間変化ダイナミクスを示す。

各初期条件での 6 つの図の位置は前章の「密度比」で示した図と同様である。 $V_0 = 1.1$ ではプラズマ塊の前方に衝撃波が発生した。

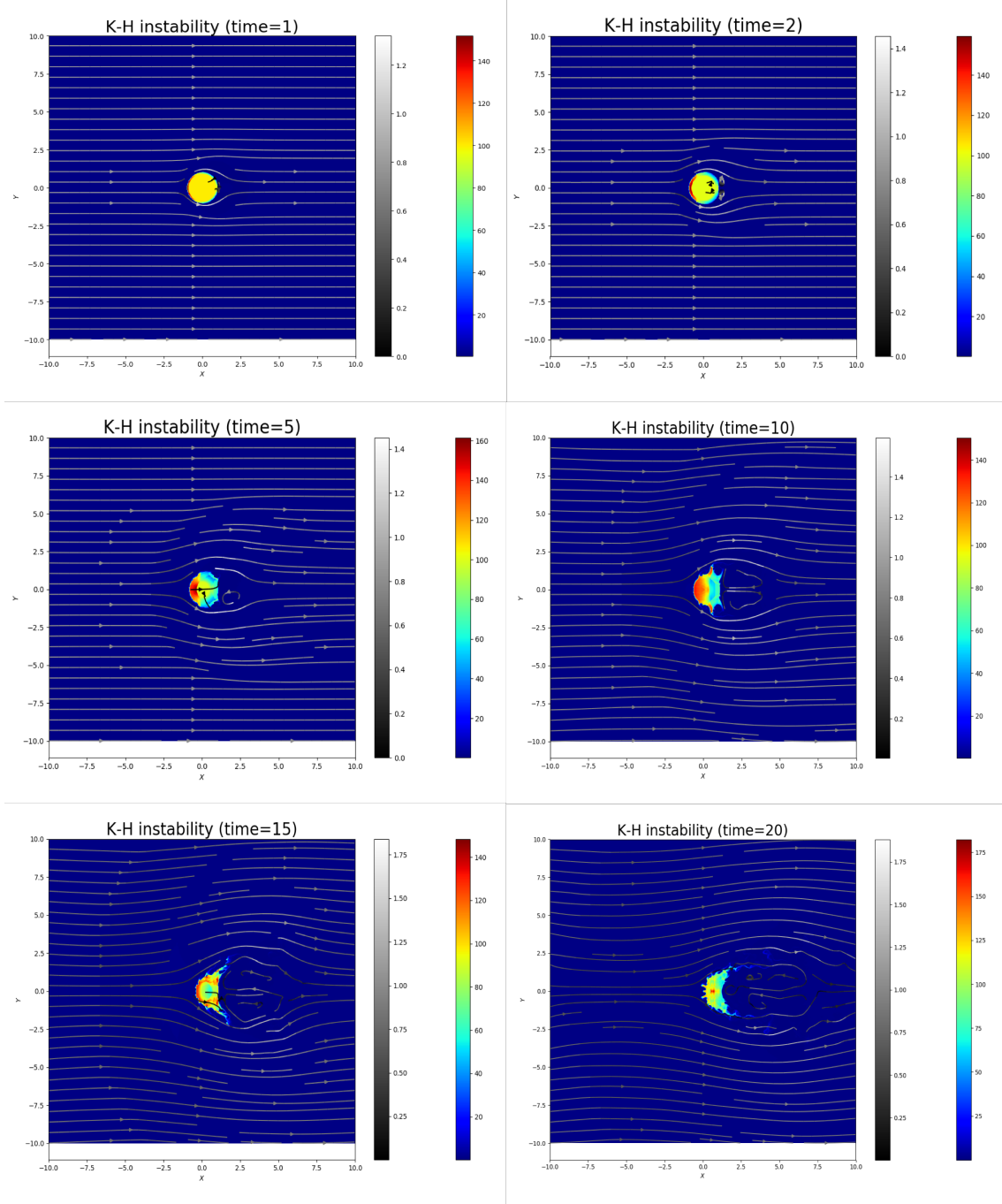


図 19: $V_0 = 0.8$

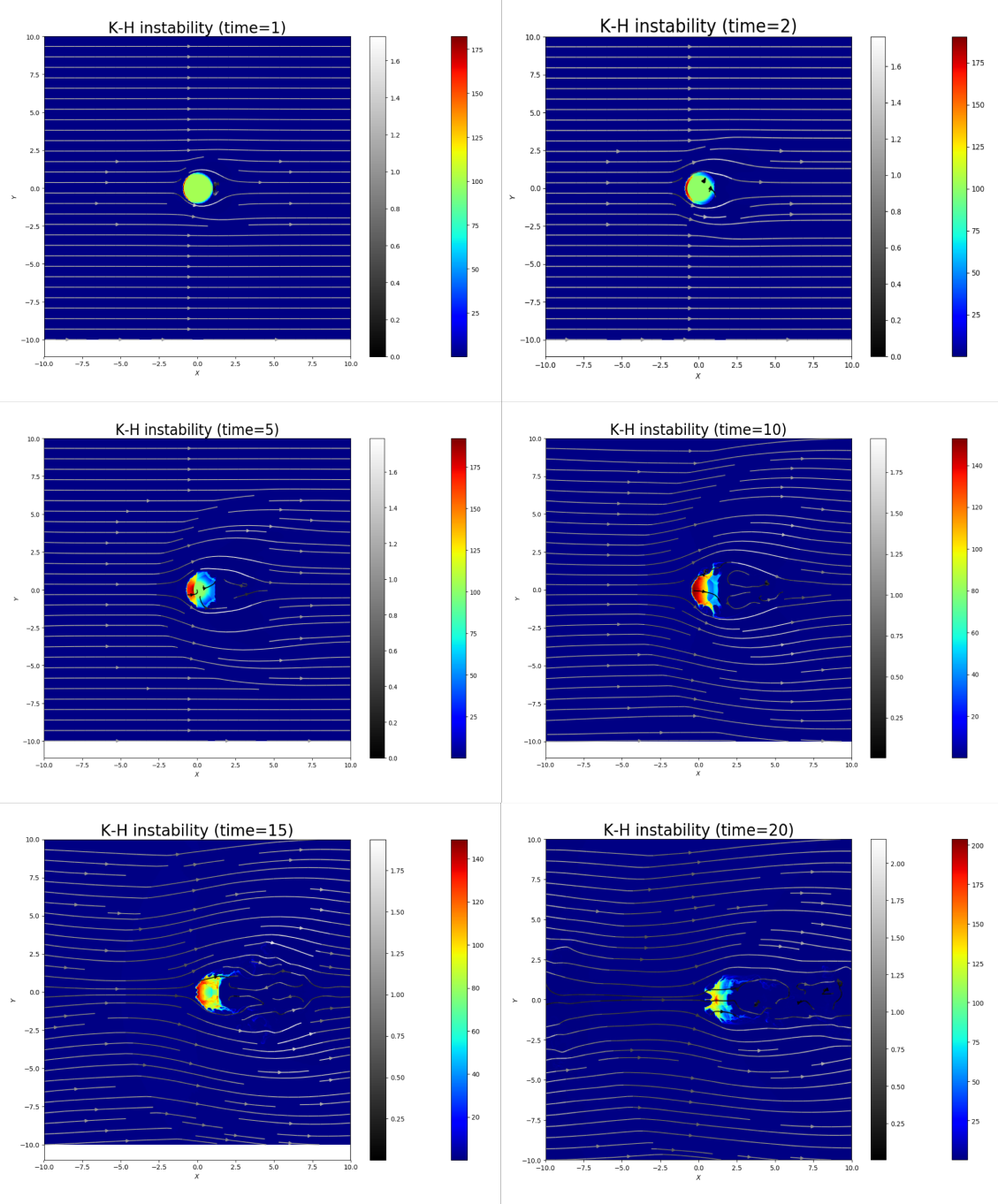


図 20: $V_0 = 1.1$

3.3 磁場依存性

続いて磁場を入れてシミュレーションをおこなった。磁場は x 軸に平行と y 軸に平行に入れたときの 2 種類をそれぞれ磁場の強さを変えて計算をおこなった。

本研究では高密度プラズマのダイナミクスに焦点を当てているため高密度での計算をおこないたいのだが、 $rr=1000$ で計算をおこなうと、他の密度比と比べ、より高密度のため不安定性等の成長を確認するための時間発展が、より必要となり計算時間がかかってしまう。また速度を変えた 3.2 章の結果から速度を変化させても超音速、亜音速を流した結果時とさほどダイナミクスに大きな違いが見られなかった。以上の理由から、初期条件の密度比と流れの速度はそれぞれ $rr = 100$ 、 $V_0 = 0.5$ に固定した。

まず磁場を x 軸方向に入れたときの結果を以下に示す。図 21 は磁場の圧力に対するプラズマの圧力の比 $\beta = 1$ 、図 22 は $\beta = 10$ 、図 23 は $\beta = 100$ のプラズマ塊の時間変化ダイナミクスを示す。以下の図らは、それぞれの条件での密度のカラースケールと左側のグラフには流れの流線、右側のグラフには磁力線を描き、上から time = 5 ごとの計算結果を示した。

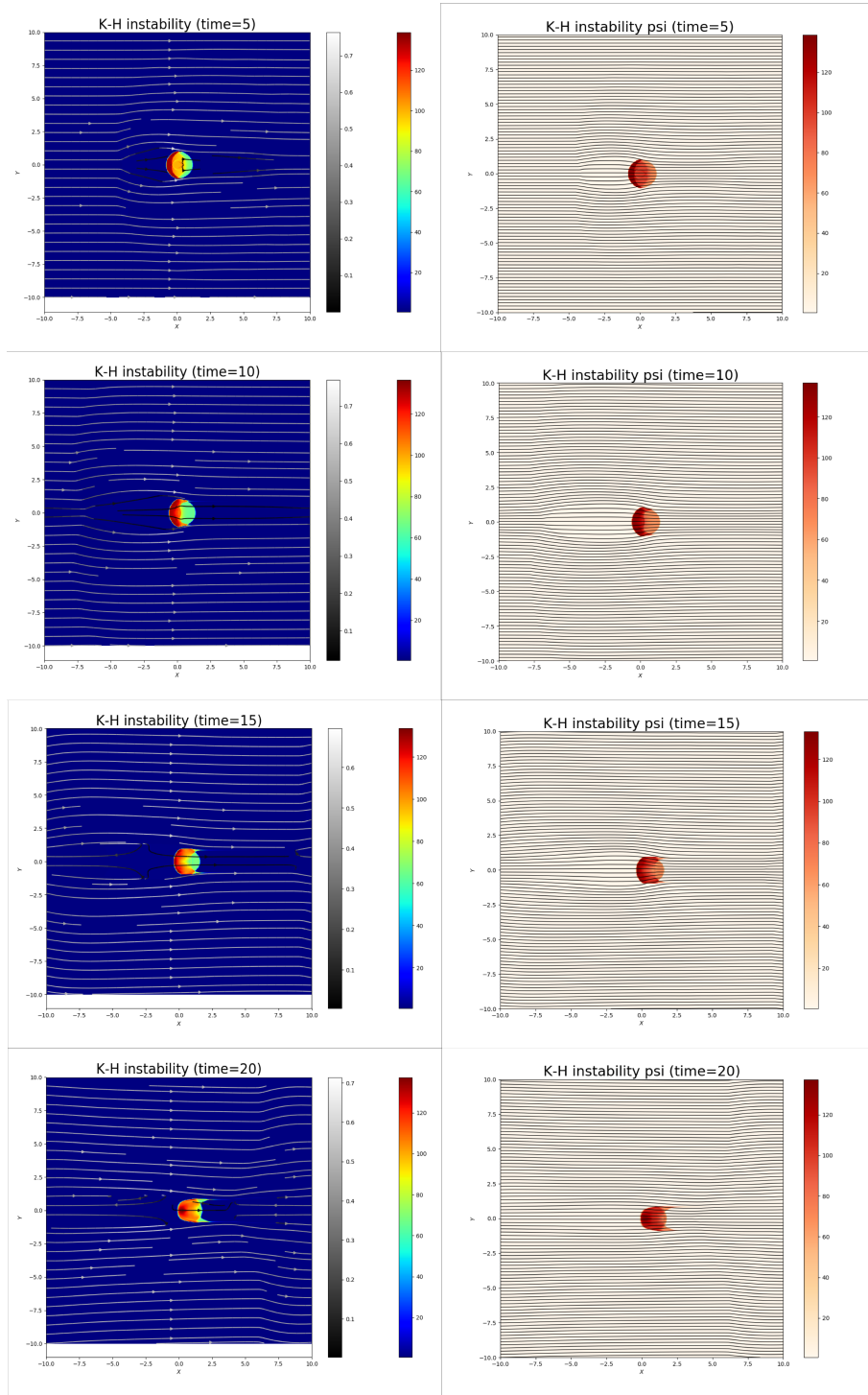


図 21: $\beta = 1$

(密度をカースケールで示し、左図の線は流れの流線を表し、右図の線は磁力線を表す。上から時刻 $t = 5, 10, 15, 20$ の図を示す。)

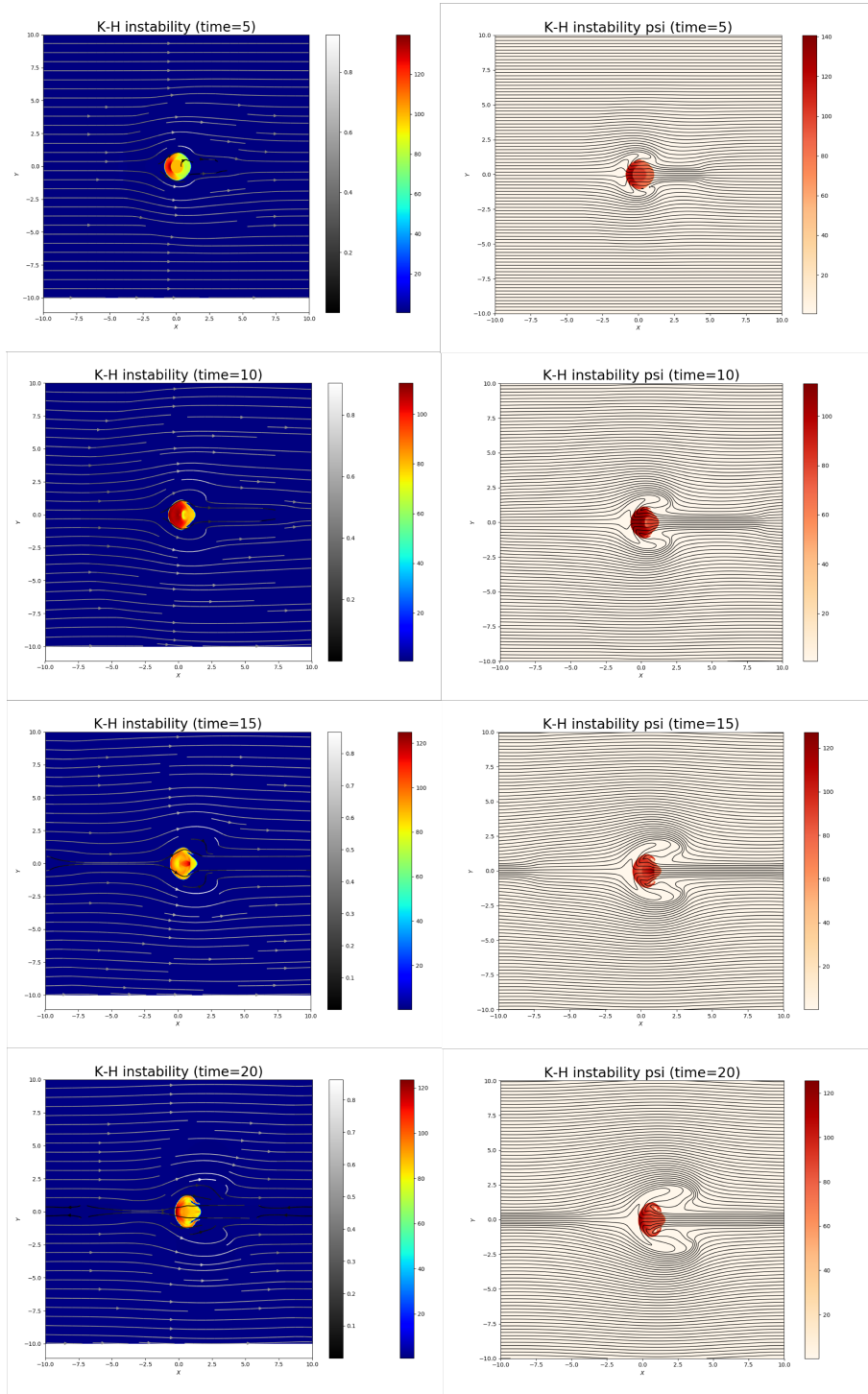


図 22: $\beta = 10$

(この図から図 26 まで色や線、配置等は図 21 と同様)

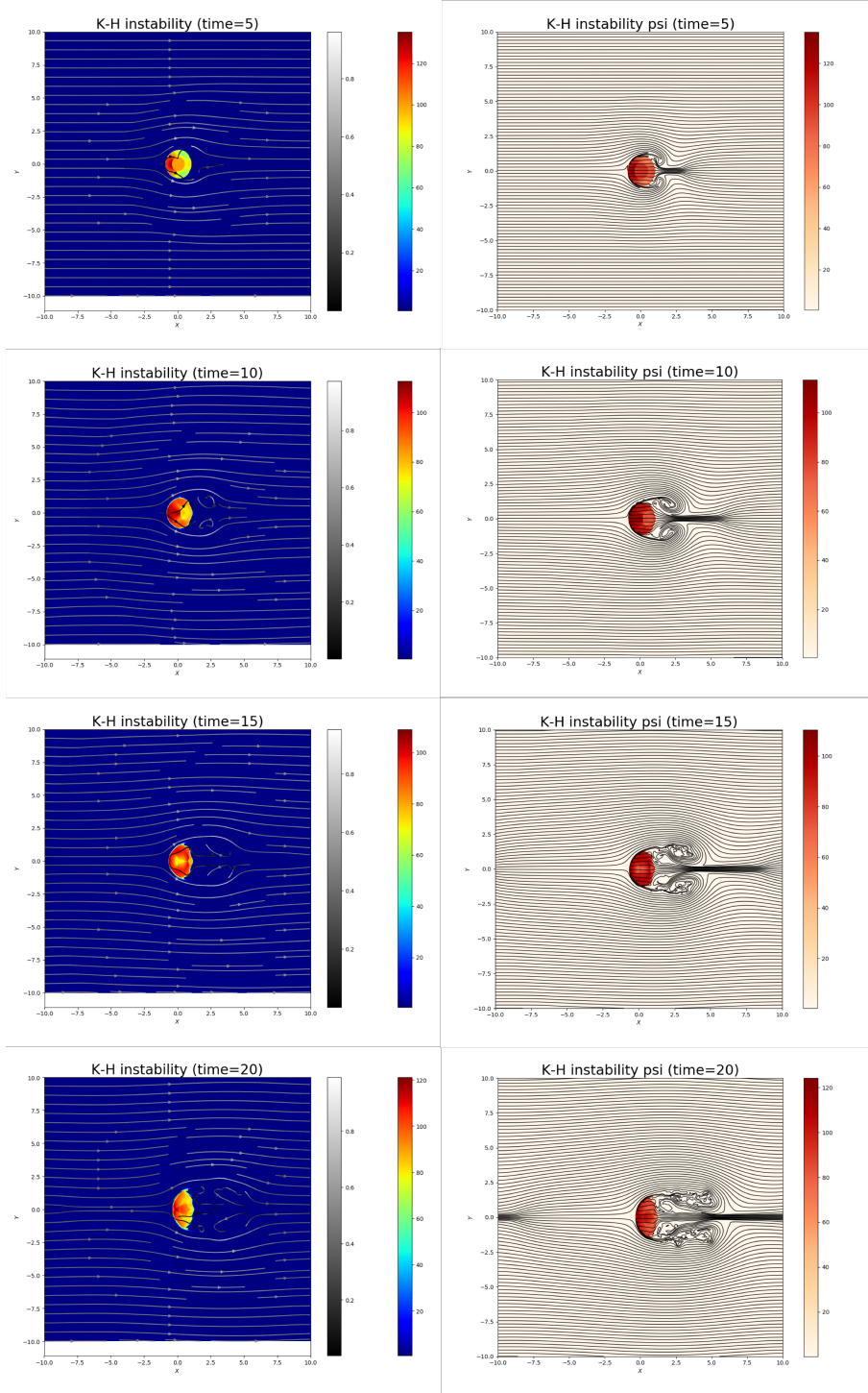


Figure 23: $\beta = 100$

続いて、磁場を y 軸方向に入れたときの結果を以下に示す。図 24 は $\beta = 1$ 、図 25 は $\beta = 10$ 、図 26 は $\beta = 100$ のプラズマ塊の時間変化ダイナミクスを示す。電流等の他のパラメータでのグラフ化した結果は次章の考察の章で示す。

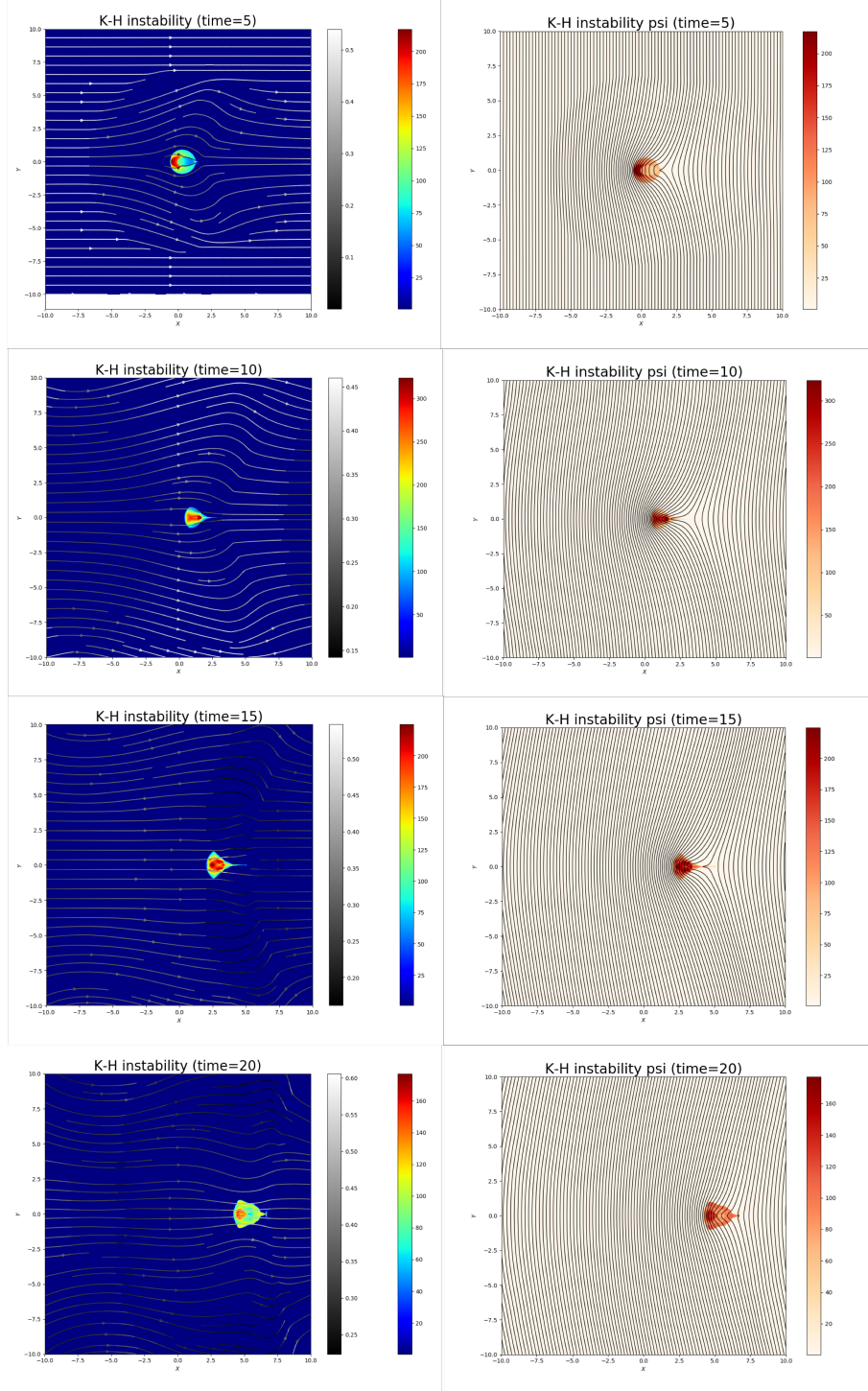


图 24: $\beta = 1$

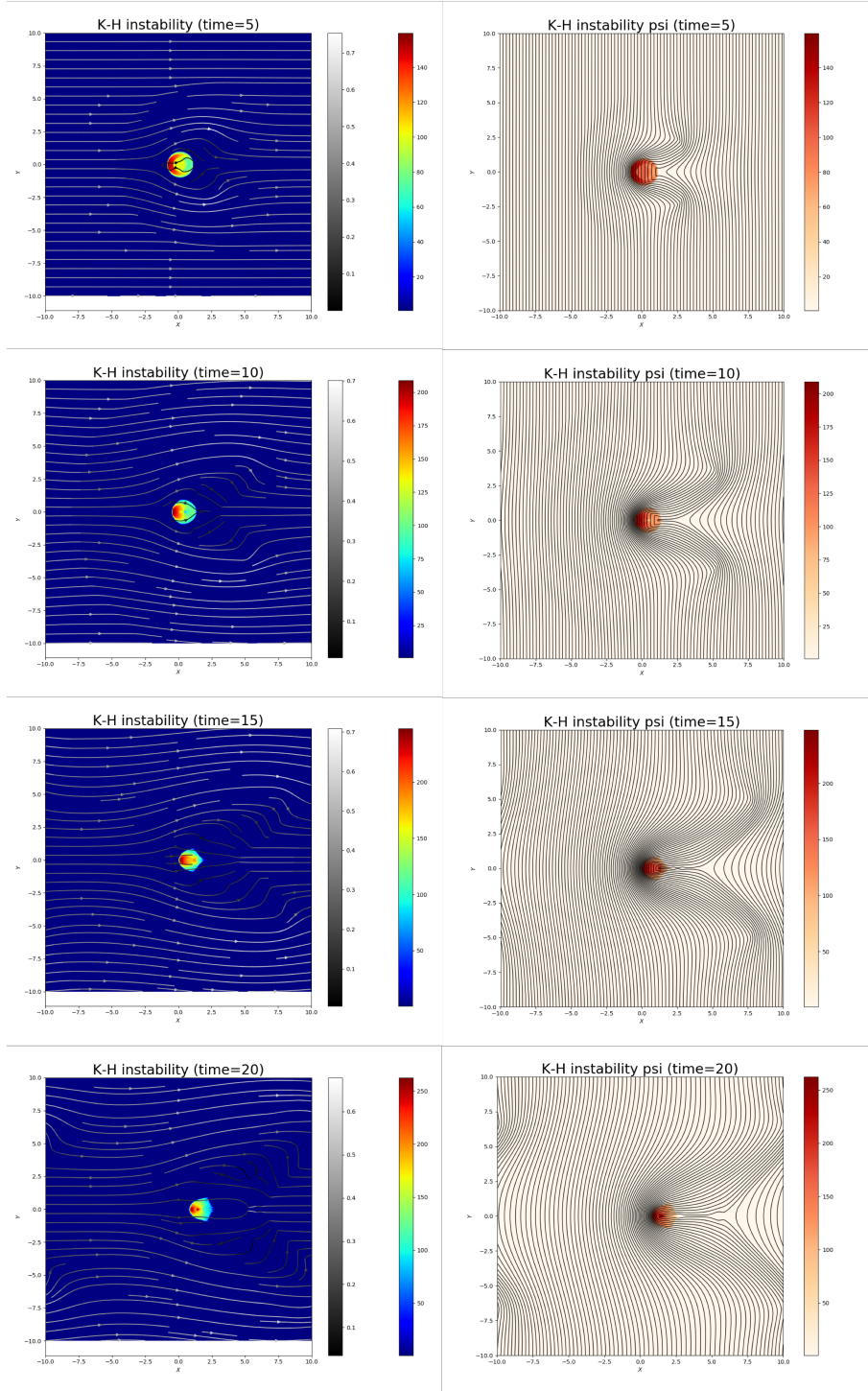


図 25: $\beta = 10$

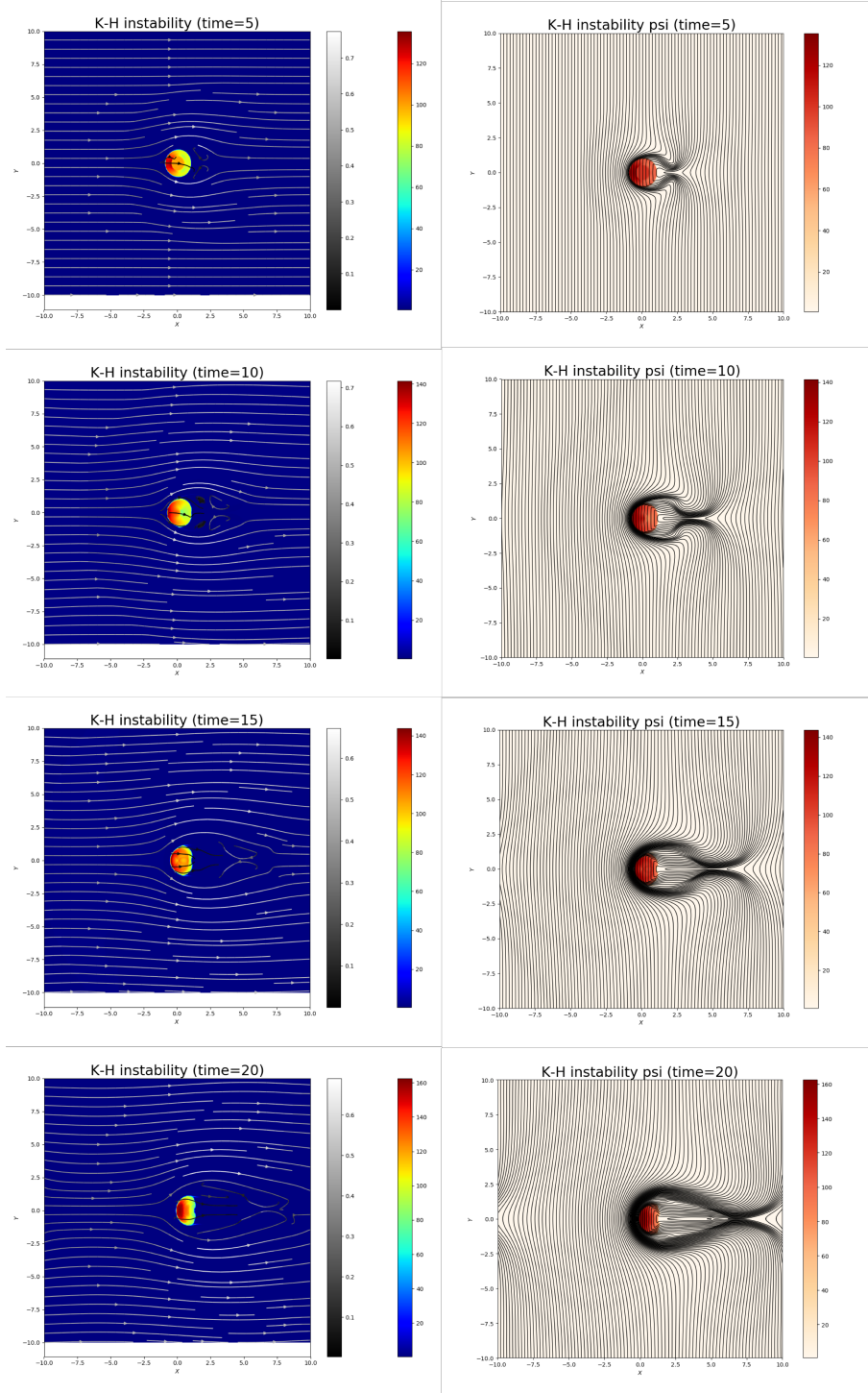


Figure 26: $\beta = 100$

4 考察

4.1 密度比の差に対するプラズマ塊のダイナミクス

ここでは密度比の差によってプラズマ塊のダイナミクスがどのように変化するかについて議論する。

図 13 の密度比が 1 : 2 や、図 14 の密度比が 1 : 10 となる低密度比のグラフを見るとプラズマ塊側面後方の速度シアア中で渦が時間発展ごとに成長しているのが確認できる。これは条件や渦の形から KH 不安定性であることは間違いない。一方、図 15 の密度比が 1 : 100 や、図 16 の密度比が 1 : 1000 となる高密度比のダイナミクスは側方および側面後方で KH 不安定性とともに、前面に RT 不安定性が生じ、プラズマ塊後方で乱流が発達する。流れがプラズマ塊の前面に当たることで流れが減速する。すると $-x$ 方向に加速度が生まれる。(図 27) この加速度が微小な摂動の起因となる。この加速度は序論の章で説明した際の重力加速度に当たる。この加速度による起因と密度差によって RT 不安定性が生じる。

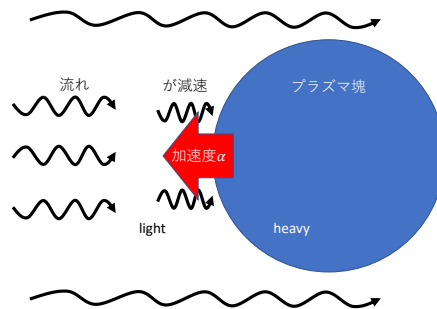


図 27: プラズマ塊前方に加速度が起きる仕組み

また、低密度比のプラズマ塊の方が高密度比のときと比べ、後方に動いているのは、密度が 2 や 10 の方が 100 や 1000 に比べ質量が軽いため背景プラズマの流れに流されているからである。

4.2 背景速度の差に対するプラズマ塊のダイナミクス

次に背景プラズマを流れる流れの速度差によってプラズマ塊のダイナミクスがどのように変化するかについて議論する。

図 20 の背景プラズマ速度 $V_0 = 1.1$ の超音速を流したダイナミクスではプラズマ塊に対して上流部分に衝撃波が発生した。図 19 や図 20 のような背景プラズマの流れを超音速や亜音速で流すと $V_0 = 0.5$ と同様にプラズマ塊の前方や側方に不安定性が成長する。特に図 19 と図 20 の亜音速のときと、超音速のときではプラズマ塊周

辺の流れは同じような流れとなった。

そこで3つの条件でのプラズマ塊周辺の流れの速さを調べた。以下の図 28, 図 29, 図 30 は、背景プラズマの流れの速度 $V_0 = 0.5, 0.8, 1.1$ でのマッハ数 M_s をカラースケールで二次元プロットした図である。左側の図から $t=5, t=10$ である。マッハ数 M_s は

$$M_s = \frac{V}{\sqrt{\gamma P/\rho}} = \frac{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}{\sqrt{\gamma P/\rho}} \quad (115)$$

とした。また time =10 以降の結果は、周期境界による流体の流れの影響が発生するのでここには載せていない。

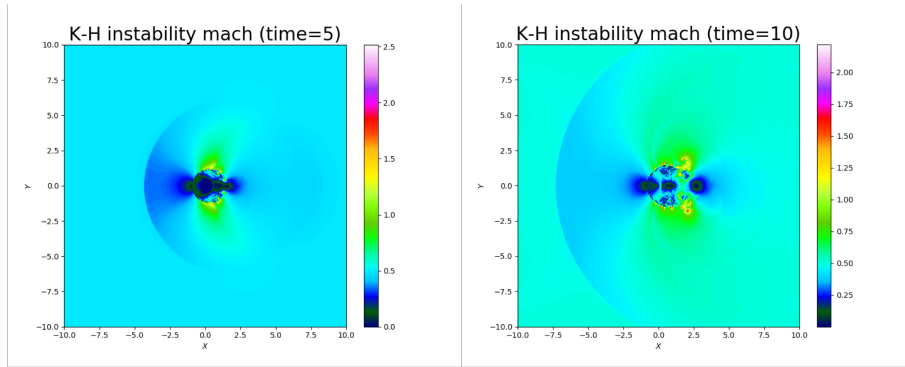


図 28: $V_0 = 0.5$ マッハ数

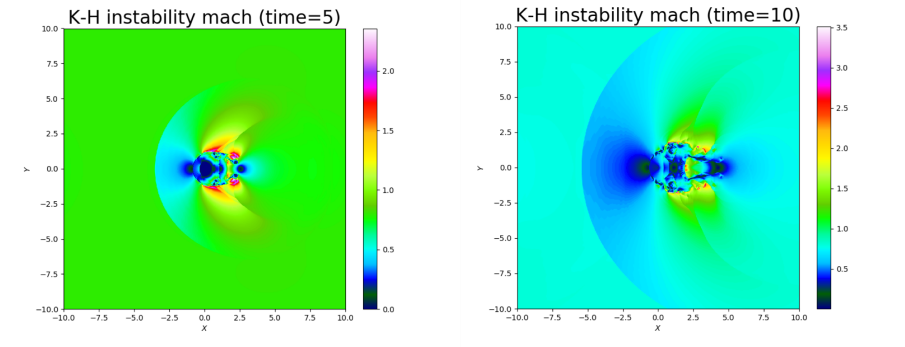


図 29: $V_0 = 0.8$ マッハ数

これより $V_0=0.8$ と $V_0=1.1$ ではプラズマ塊上流の衝撃波によってプラズマ塊周辺の流れは亜音速にまで速度が落ちており、構造は違うものの、結果的に $V_0=0.5$ や $V_0=0.8$ と $V_0=1.1$ はいずれもさほどプラズマ塊の振る舞いに大きな違いはないことがわかった。

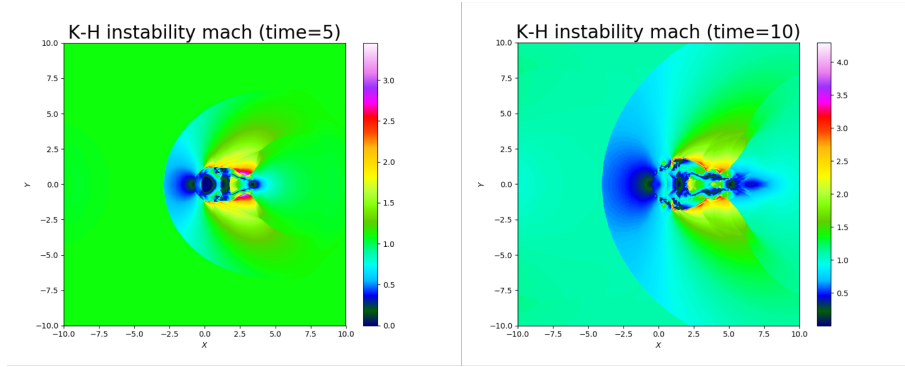


図 30: $V_0 = 1.1$ マッハ数

4.3 磁場の強さと方向に対するプラズマ塊のダイナミクス

磁場の強さと方向によってプラズマ塊のダイナミクスがどのように変化するのかについて議論する。

はじめに磁場を加えていない条件 (図 15) と比べ磁場を入れたプラズマ塊の特徴を述べる。図 31、図 32、図 33 は各初期条件での $\text{time}=20$ 時の x 軸に $[-2.5, 5.0]$ 、 y 軸に $[-3.7, 3.7]$ の範囲に拡大した図である。ただし図 33 の $\beta=1$ のみ表示範囲は x 軸に $[1.0, 8.5]$ 、 y 軸に $[-3.7, 3.7]$ とした。図 32、図 33 は上から $\beta=1, \beta=10, \beta=100$ の結果である。

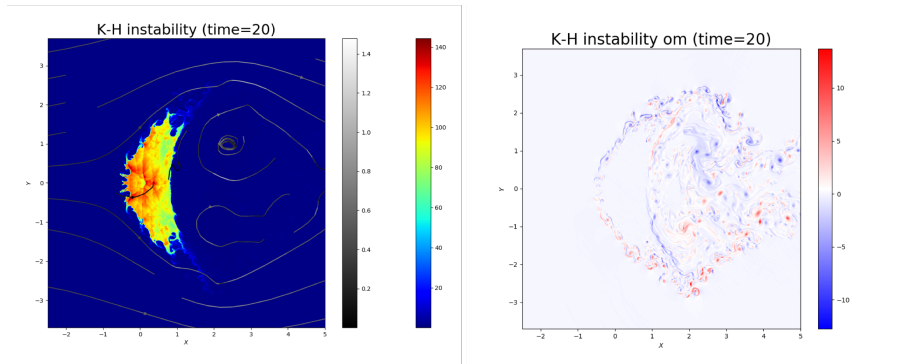


図 31: $rr = 100$ のプラズマ塊とその渦度

この拡大した図から磁場を加えたときと加えていないときのプラズマ塊の流れの構造は全く異なっていることがわかる。磁場を加えていないときはプラズマ塊と背景プラズマとの境界で不安定性や乱流が発達している。一方磁場を加えたときには層流が生じ、特に流れの方向と磁場の方向が平行のとき、磁場が弱いと層流と乱流が共存していることが確認できる。

はじめに磁場が y 軸方向に入っている時のダイナミクスに着目する。図 24 ～ 26 の右側のグラフの磁力線とプラズマ塊の位置関係から磁場の凍りつきが起こっていることがわかる。これは磁力線の線に沿ってプラズマ塊の形が形成されていることからわかる。また磁場が強くなるとともに x 軸方向にプラズマ塊が動いている。この関係性も磁場の凍りつきにより説明することができる。プラズマ塊に磁場の凍りつきが起こることで背景プラズマ中を走る磁力線との間で曲がる。この磁力線の曲がりが大きくなると張力が大きくなる。磁場が強いほど磁力線の張力が大きくなるためプラズマ塊は磁力線の非線形相互作用により、より右に動くと考えられる。

次に磁場が x 軸方向に入っている時のダイナミクスに着目する。これは y 軸方向に磁場を流したときのダイナミクスにも言えることであるが、磁場によるローレンツ力が図 15 に見えるような渦や乱流を抑制する。 x 軸方向に流した場合、 $\beta=1$ での比較的強磁場を加えたときの振る舞いは乱流は抑制され、層流が見られる。しかし $\beta=10$ や $\beta=100$ では磁場の圧力がプラズマの動圧に比べてかなり小さいので、磁場を加えていない図 31 に近い流れの構造になると予想したにも関わらず、プラズマ塊の流れ構造は全く異なった。プラズマ塊前方と側方では乱流が抑制された。

以下の図 34 の左側は $\beta=10$, $B//x$ 軸での磁力線とプラズマ塊の二次元プロット、右側に電流の空間分布を示し、time=20 時の x 軸に $[-2.5, 5.0]$ 、 y 軸に $[-3.7, 3.7]$ の範囲に拡大した図である。

今回のシミュレーションでは電気抵抗が 0 であるので、磁場の凍りつきが発生し磁力線はプラズマ塊にくっついて変化する。プラズマ塊が背景プラズマの流れによってプラズマ塊の形が初期条件の円から変化する。流れによって形を変えたプラズマ塊とともに動く磁力線はプラズマ塊の変化と同様に変化し、曲げられる (図 34)。すると磁力線が曲げられたことで電流が発生し、さらに流れの作用によりプラズマ塊がさらに変化することで磁力線の曲がりが大きくなり、発生した電流はより大きくなる。

電流が発生、変化することでマクスウェルの法則から局所的に磁場 B が大きくなる。局所的な磁場の増大からローレンツ力が発生する。このローレンツ力によって局所的に細かい乱流を抑える、と考えられる。

しかし実際のプラズマ気体には少なからず抵抗が存在する。以下の図 35,36,37 は、それぞれ磁場を x 方向に $\beta=10$ 、抵抗 $\eta = 10^{-3}, 10^{-4}$ を加えた計算結果と、 y 方向に $\beta=100$ 、抵抗 $\eta = 10^{-4}$ を加えた計算結果をである。

図 35 と図 36 を見比べると、抵抗 $\eta = 10^{-3}, 10^{-4}$ ではほとんどプラズマ塊の様子や流体の流れ、磁力線の流れに差は出なかった。

x 軸方向への磁場導入時に、抵抗を加えた図 35 や図 36 と抵抗 0 の図 22 のプラ

プラズマ塊を見比べると抵抗を加えたプラズマ塊には前方や側方に不安定性が生じ、側面後方で乱流が再び発生した。磁力線のダイナミクスを見ると図 22 と比べてプラズマ塊に巻きつく磁力線は巻きつき方は緩やかになる。これは抵抗を加えたことによる、磁場の凍りつきの破れによるものであると考えられる。またプラズマ塊後方は抵抗の有無にかかわらず同じように磁力線に凍りついて不安定性や乱流は生じず同じような形となった (図 38)。

さらに y 軸方向に磁場を加えたときのプラズマ塊の振る舞いは抵抗を加えた図 37 と抵抗 0 の図 26 では抵抗を加えた方の磁力線の巻きつきの方がやや穏やかである。また図 37 の方がプラズマ塊側面後方が磁力線に沿って流れている。さらにプラズマ塊の後方に存在する磁力線の反平行部分は抵抗を加えることで、これまた磁場の凍りつきの破れの影響から磁力線のリコネクション (つなぎ変わり) が発生した。

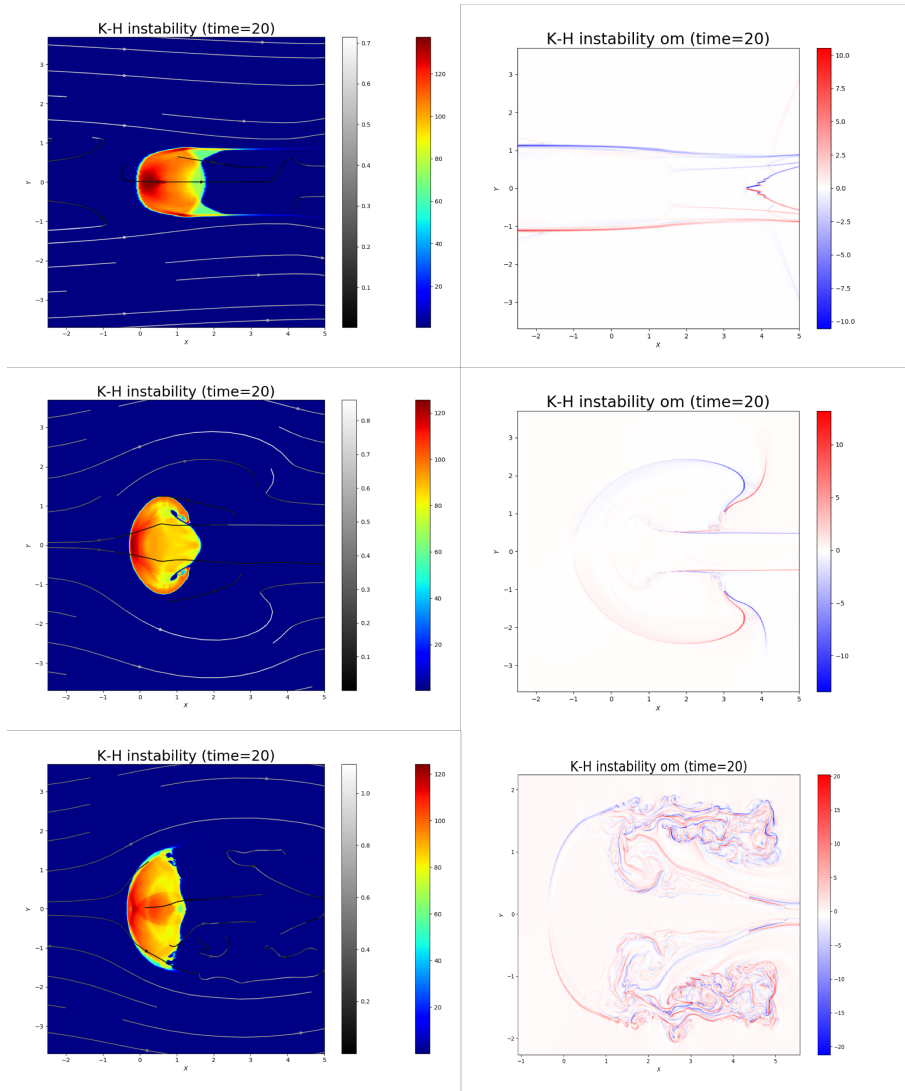


図 32: $B//x$ 方向のプラズマ塊とその渦度
(上から $\beta = 1, 10, 100$)

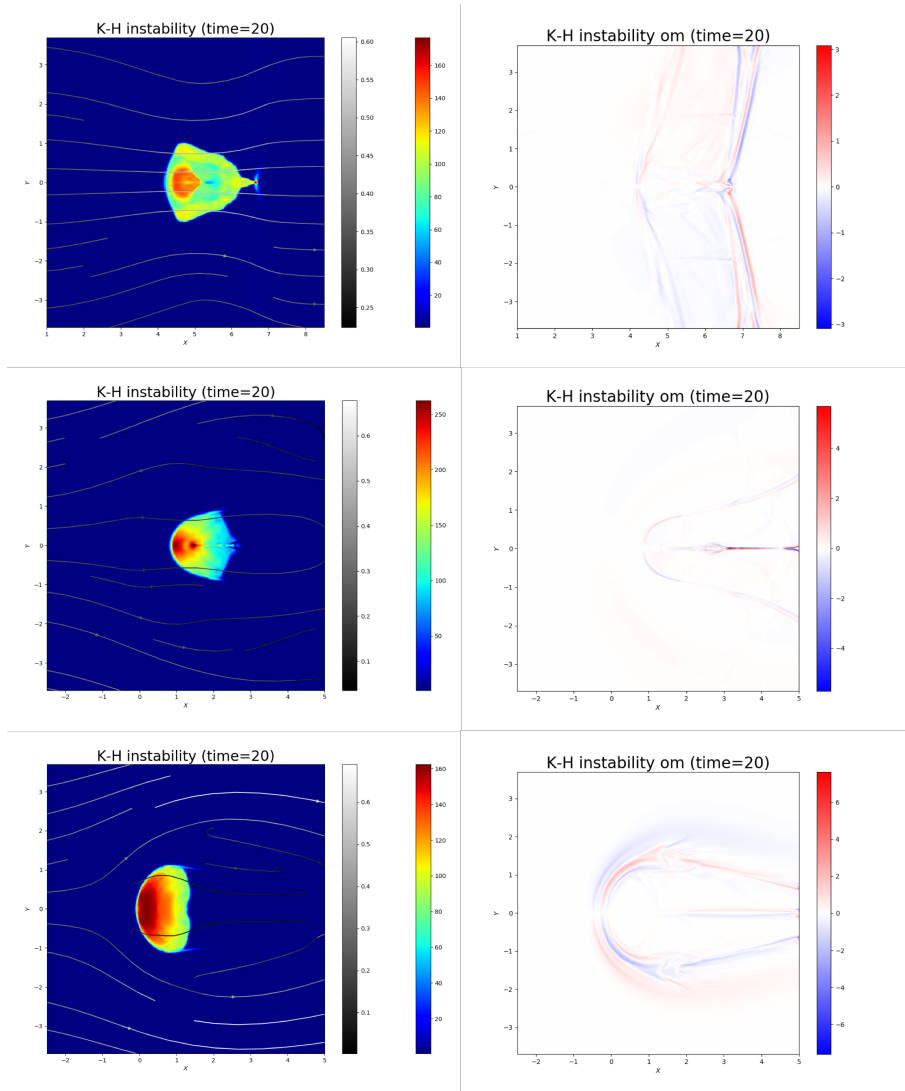


図 33: $B//y$ 方向のプラズマ塊とその渦度
(上から $\beta = 1, 10, 100$)

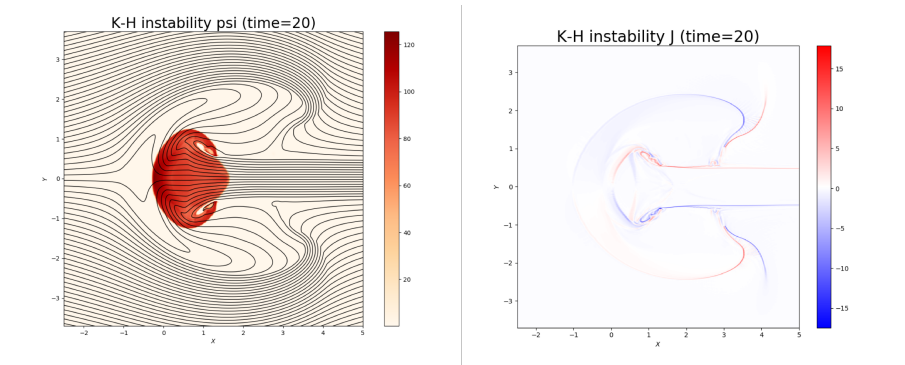


図 34: $\beta=10$ $B//x$ 軸 の磁力線、電流

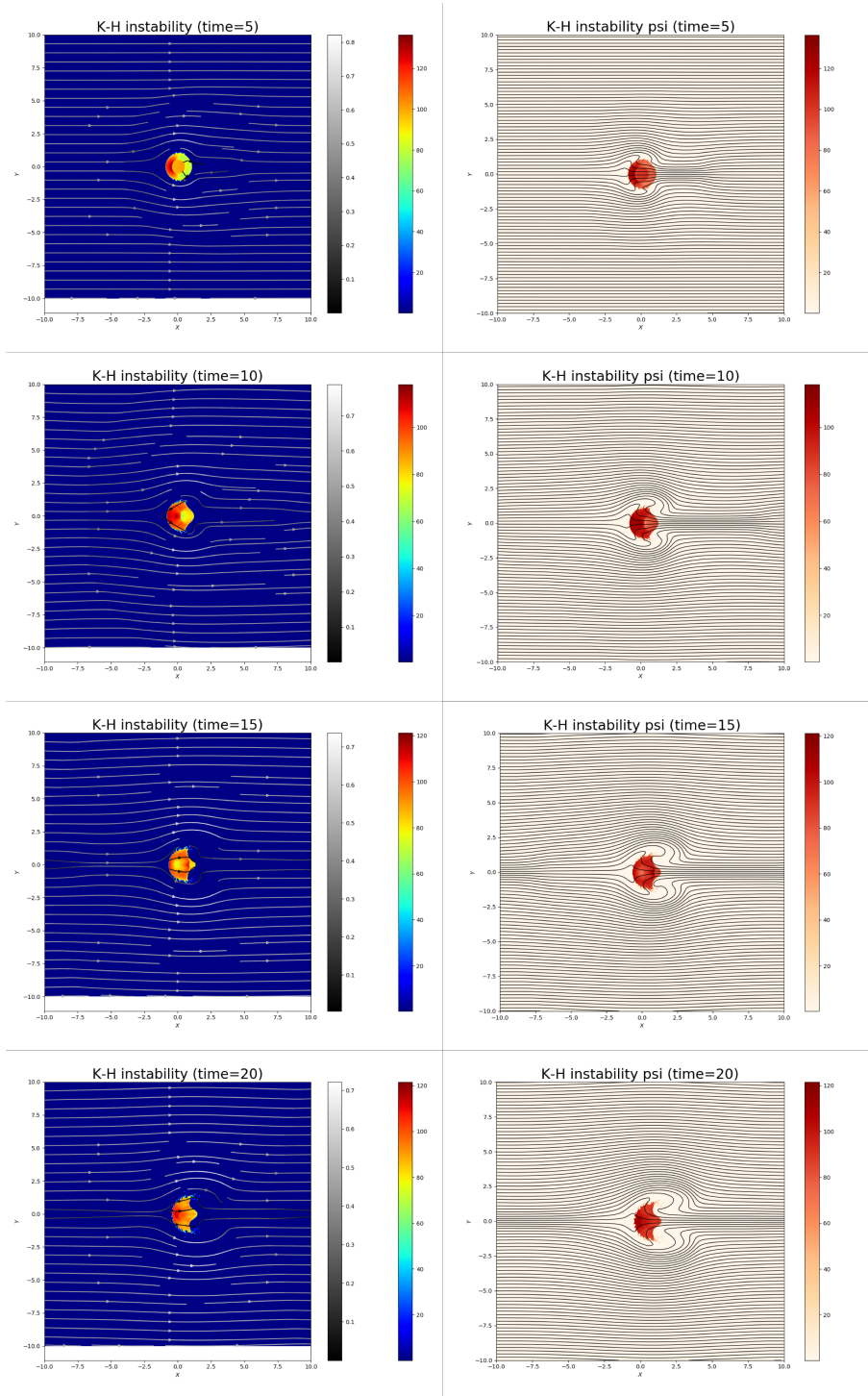


図 35: $\beta=10$ $\eta = 10^{-3}$ $B//x$ 軸

(図 35, 36, 37 の色や線、配置等は図 21 と同様)

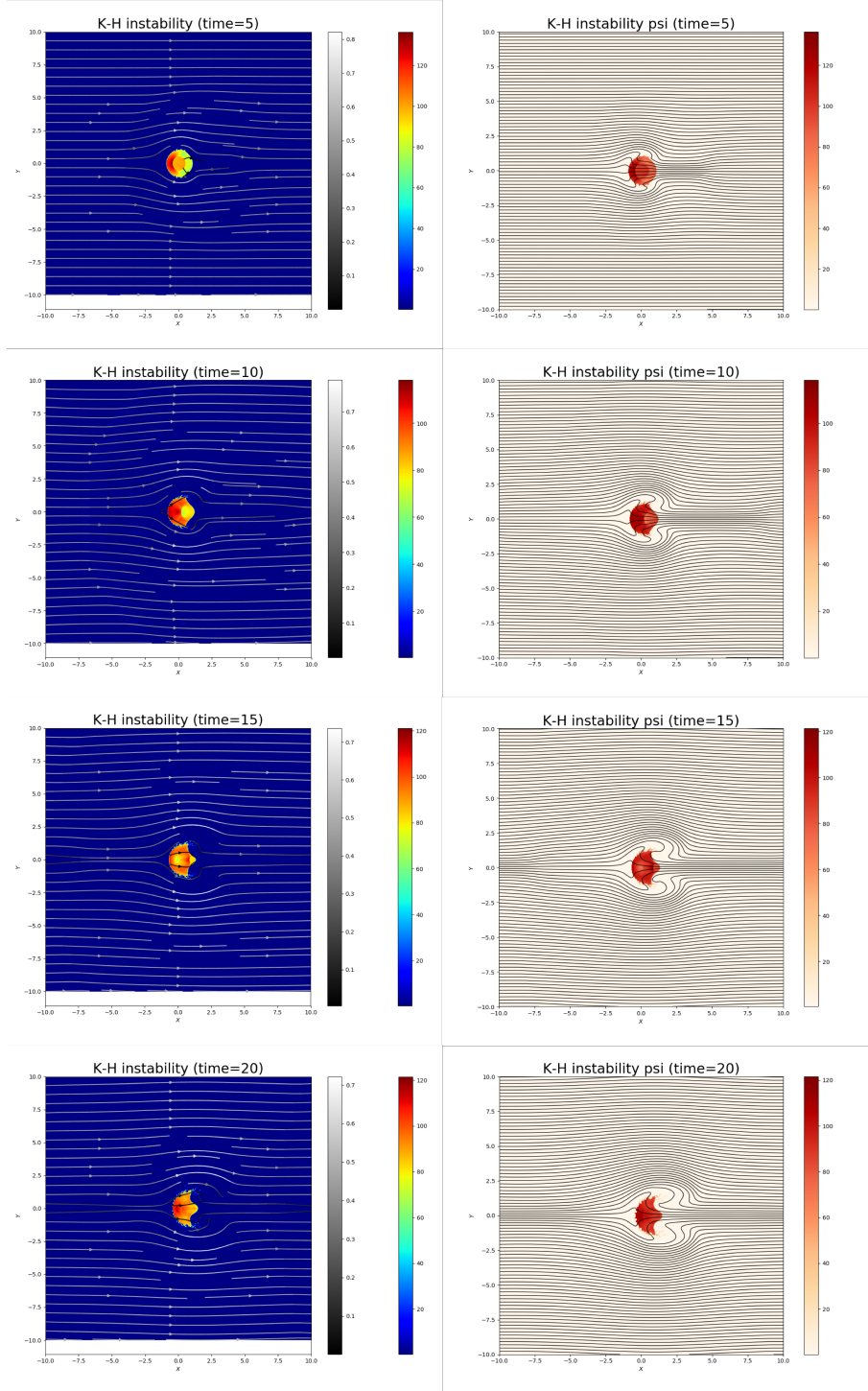


図 36: $\beta=10$ $\eta = 10^{-4}$ $B//x$ 軸

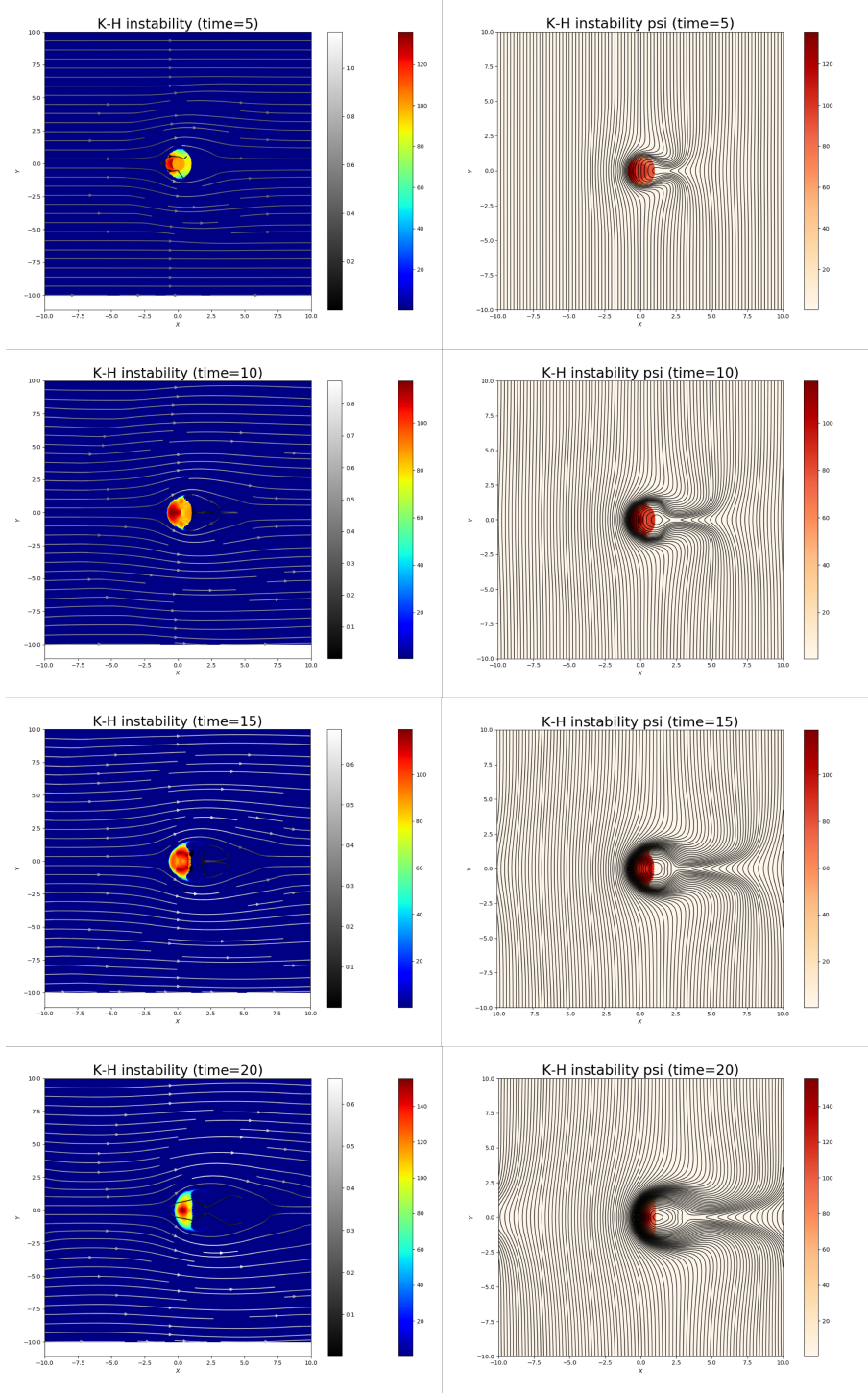


図 37: $\beta=100$ $\eta = 10^{-4}$ $B//y$ 軸

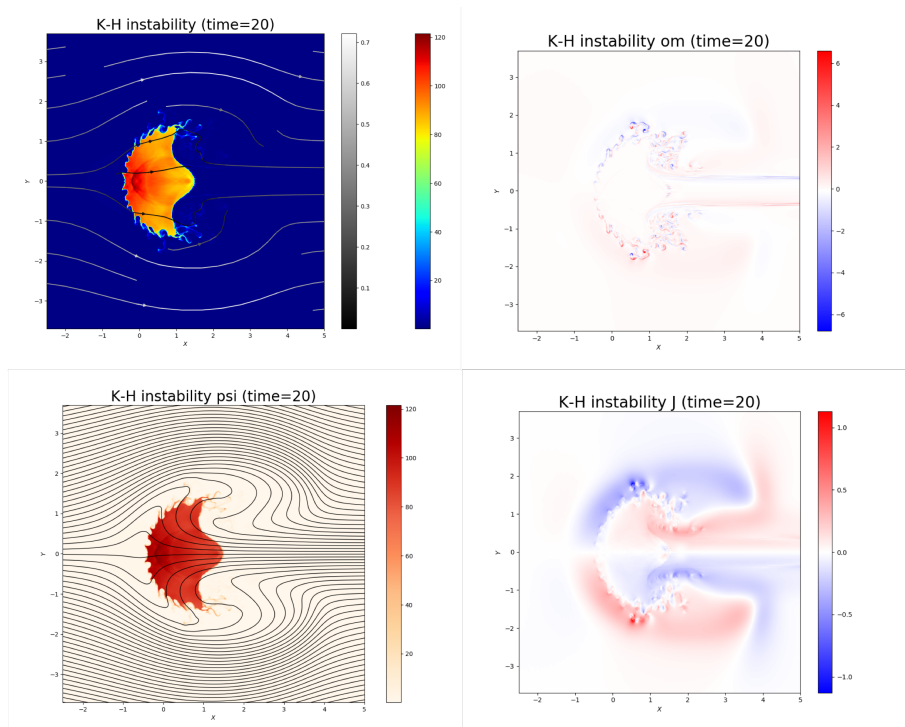


図 38: $\beta=10$ $\eta = 10^{-4}$ $B//x$ 軸 $t=20$ の流れ, 渦度, 磁力線, 電流
(各図上段左から密度と流れ、渦度、下段左から密度と磁力線、電流 を示す。)

5 結論

基礎方程式に磁気流体力学方程式を用い、安定かつ高精度な数値シミュレーションをおこない、高密度なプラズマ塊と背景プラズマの流れの非線形相互作用を密度比、背景速度、一様磁場の強さと方向の違いによる各パラメータの大小による比較から解明した。

プラズマ塊が高密度になるとプラズマ塊の前方に RT 不安定性が生じ、後方に強い乱流が生じることがわかった。また背景流れの超音速流、亜音速流の違いは衝撃波の影響からプラズマ塊および流れの構造の変化に違いは及ぼさなかった。

一様磁場の方向と背景流れの方向が垂直関係にあるとき、磁場の大きさに関わらず乱流は抑えられ、磁場の凍りつきによる張力から磁場が大きければ大きいほどプラズマ塊は後方に流される。一方、一様磁場の方向と背景流れの方向が平行関係にあるとき、磁気圧が背景プラズマの流れによる動圧に比べて小さい場合、磁場の凍りつきによる影響から局所的に乱流を抑え、層流と乱流が共存する形をとった。

最後に一様磁場を加えた状態に抵抗を加えると、磁場の凍りつきが破れ、磁場方向と背景流れ方向が垂直関係の時には磁気リコネクションが生じ、磁場方向と背景流れ方向が平行関係の時、新たな不安定性が生じ、乱流が再び発達した。

参考文献

- [1] <https://www.flickr.com/photos/vanderkroew/3663614366>
- [2] 「今、核融合炉の壁が熱い！」 (<http://www.aesj.or.jp/~fusion/aesjfnt/jp/publications/rensai2/Vol.50No.6.pdf>) の画像の一部を加工
- [3] 宮本 健郎 (2004) 「プラズマ物理・核融合」財団法人 東京大学出版会
- [4] T. Ono, "スクレイプ・オフ層における Plasma Blob 輸送現象", プラズマ・核融合学会誌, 82 (2006), 205
- [5] 田中 基彦・西川恭治 (1991) 「パリティ物理学コース 高温プラズマの物理学」丸善 (株)
- [6] 坂下志郎・池内了 (1996) 「宇宙流体力学」培風館
- [7] 「CANS+ ドキュメント」 (<http://www.astro.phys.s.chiba-u.ac.jp/cans/doc/index.html>)
- [8] 藤井 孝蔵 (1994) 「流体力学の数値計算法」財団法人 東京大学出版会
- [9] T. Miyoshi, K. Kusano, "A multi-state approximate Riemann solver for ideal magnetohydrodynamics", Journal of Computational Physics, 208 (2005), 315
- [10] A. Suresh, H. T. Huynh, "Accurate Monotonicity-Preserving Schemes with Runge - Kutta Time Stepping", Journal of Computational Physics, 136 (1997), 83
- [11] 平林孝太「3rd-order TVD Runge-Kutta method」(<http://www-space.eps.s.u-tokyo.ac.jp/~hirako/memo9-tvdrk.html>)
- [12] S. Gottlieb, C.-W. Shu, "Total Variation Diminishing Runge-Kutta Schemes", Mathematics of Computation, 65 (1998), 73

謝辞

本研究に際して研究に必要な数値計算法だけでなく磁気流体力学の基礎からご指導を頂きました指導教員である三好隆博助教に心より感謝いたします。また杉立徹教授はじめ志垣賢太准教授、本間謙輔助教、山口頼人特任助教および同研究室の皆様には研究室ミーティングを含む日常の議論等から多くの知識や示唆を多数いただきました。またお忙しい中、副査として時間を割いていただいた本学伊藤清一助教にも合わせて感謝申し上げます。

本研究をおこなうにあたり関わってくださった皆様に重ねてお礼を申し上げます。