

新しい固体素子の 量子計算機への応用可能性

村上貴洋 学籍番号 M1279028
広島大学大学院 理学研究科 物理科学専攻 ハドロン物理学研究室

平成14年2月23日

1 要旨

近年、量子計算機実現に向けた研究が盛んに行われている。今まで実行不可能な計算時間を必要とした問題の中に、量子計算という全く新しい方法を用いる事で、非常に効率良く解けるものが存在する事が分かった為である。しかしながら現状では、どんな物理系が量子計算機素子となりうるのか、そして適切に動作するのか分かっていない。現在研究されている主な素子としては、イオン・トラップされた原子、NMR等がある。しかし、それらは素子の拡張性という点において、非常に困難であると予想されている。従って量子計算機の実現には、半導体の微細構造のような固体素子の領域において、探索していく必要があると考えられる。そこで本研究では、そのような素子の一例として、励起子ポラリトンモードを利用した固体素子を取り上げ、数値計算により量子計算機素子への応用可能性を調べた。

まず、実験的に既に知られた励起子ポラリトンモードの2準位系を、ハミルトニアンで書き下した。そのハミルトニアンによる数値計算から、この素子が1量子ビットとして動作する事は分かった。その次に、量子計算機として非常に重要な2量子ビットへの拡張を考えた。2準位系を2つ並べた素子を想定し、1素子のハミルトニアンを拡張し、より単純かつ妥当に書き直す事で、ハミルトニアンを用意した。新たなハミルトニアンによる数値計算からは、2量子ビット動作も含めて可能である事が分かった。更に、量子アルゴリズムの実行性を考える為に、Groverの検索アルゴリズムを取り上げ、デモンストレーションを行った。

本研究の結果から、この新しい固体素子が、量子計算機素子に応用可能である事が分かった。

また想定したハミルトニアンは、多くの2状態系のものとほぼ同じ形をしている。現在研究されている量子計算機素子への試みでは、多くの場合補助ビットを用いている。本研究の結果は、補助ビットを用いない操作だけで、量子計算が行える可能性を示唆しており、これは非常に注目すべき点である。

目次

1	要旨	2
2	序論	4
2.1	量子計算機実現への動機	4
2.2	量子計算機概念の概要	5
3	量子計算機概念の具体化	6
3.1	量子アルゴリズム	6
3.2	量子計算機の素子	7
3.2.1	量子計算機としての物理系の設定	7
3.2.2	量子計算機に必要な量子ゲート	8
4	現在行われている量子計算機実現の試み	11
4.1	量子計算機実験の現状	11
5	励起子ポラリトンモードを利用した固体量子素子	12
5.1	励起子ポラリトンモード	12
5.2	量子ゲートへの応用	12
6	素子に対応する数値計算	14
6.1	数値計算の方法	14
6.2	1量子ビットの場合	14
6.3	2量子ビットの場合	16
6.3.1	2素子におけるハミルトニアン	16
6.3.2	CNゲートに相当する素子への操作	17
6.4	2量子ビットによる量子アルゴリズムの場合	18
7	素子の可能性についてのまとめ	30
8	今後の展望	30
9	結論	31
10	謝辞	31
	参考文献	32
11	付録	33
11.1	⊗: 直積 (テンソル積)	33
11.2	直積空間におけるハミルトニアンの合成	34

表 目 次

1	CNゲートの真理値表	9
2	素子中の1量子ビットエネルギー準位図	13
3	2素子における4状態の位相変化：初期状態	18
4	(制御ビット, 標的ビット) = (0, 0)	19
5	(制御ビット, 標的ビット) = (0, 1)	20
6	(制御ビット, 標的ビット) = (1, 0)	21
7	(制御ビット, 標的ビット) = (1, 1)	22
8	(制御ビット, 標的ビット) = (混合) (確率について)	23
9	(制御ビット, 標的ビット) = (混合) (位相について)	24
10	表3~9における素子への操作：CNゲート	25
11	入力値	25
12	素子への操作：Groverの検索アルゴリズム	26
13	時間経過に対応する操作とその変遷：検索アルゴリズム	26
14	時間経過に対応する操作とその変遷：検索アルゴリズム (位相)	27
15	時間経過に対応する操作とその変遷：検索アルゴリズム (位相)	28
16	時間経過に対応する操作とその変遷：検索アルゴリズム (位相)	29

2 序論

2.1 量子計算機実現への動機

コンピュータつまり計算機が社会一般に目覚ましい勢いで普及している。それは有用性を増し続けている結果であり、それを支える大きな要因に、計算機の劇的な縮小化を成してきた事がある。そしてこのまま縮小化が進めば、いずれ古典物理学を原理としている演算処理そのものにも、縮小化が必要になるであろうと予見されてきた。故に量子力学を原理とする演算処理の必要性が予測された。

初期の頃、多くの方は懐疑的で、量子力学を原理とする演算処理つまり量子計算は不可能だろうと考えた。計算には正確性が不可欠であるのに、量子力学が確率論的で正確ではないと思えるからだ。しかし直に解決された。量子力学は、Schrödinger方程式により変化を正確に記述できるものであり、孤立系においては確率振幅をユニタリー変換するものであるからだ。よって原理的には、ユニタリー変換という演算処理を用いて計算が可能なる事が分かった。つまり量子計算という計算の枠組みが確率した。その枠組みにおいて古典計算と等価の演算処理が行える事も分かった。故に量子計算機とう概念が生まれた。[7]

更に、量子計算という全く新しい計算方法の可能性が示された。古典とは異なり、量子計算は量子力学における干渉効果を原理としている。(アナログコンピューターとも異なる)。確率振幅の大きさと位相に情報を持たせて、ユニタリー変換で演算処理を行い、波束の収縮で結果を読み出すという高度な方法である。その特殊性は真の乱数発生などの単純なもので片付けられなかった。量子アルゴリズムと呼ぶに相応しいShorの因数分解が発見された。それは現在のどのアルゴリズムよりも優れた解法であり、今まで実行不可能とされてきた巨大な整数の素因数分解を、はるかに少ない計算ステップ数で解けるものであった。量子計算機研究の近年の脚光が訪れた。そして新たな量子アルゴリズムとしてGroverの検索アルゴリズムも発見された。[7] (それはShorの因数分解よりも量子アルゴリズムの機構が分かりやすく、また量子計算を最適に用いたアルゴリズムである事が示された)。他の主要な研究成果としては、重ね合わせのままの量子情報の伝達可能性、盗聴を暴露できる量子暗号の可能性が上げられる。そしてこれら量子計算機の研究は、その有用性を別にしても、量子力学の造詣を深めるという役目を果たしている。[6]

しかしながら、「量子計算機実現」には未だ課題が多く残っている。現在は様々な物理系において、様々な計算機としての定義付けの元で、様々な手法により、実現の為の実験がなされている。(第4章に具体例を上げる。)つまり未だ量子計算機の実像は画一されていない。しかし量子計算機を考える為に、量子計算機がどのような物かを決めておく必要があるだろう。次節に書く事にする。

2.2 量子計算機概念の概要

未だ量子計算機と呼ぶに相応しい物が実在しない事もあり、量子計算機という共通の定義はない。しかし量子計算機実現への動機を踏まえる事で、以下のような装置と言えるだろう。計算機として、入力を自由に行え、その入力に対して量子計算が行え、その結果を表示できる装置、それが量子計算機である。また量子計算とは、量子力学の原理にある重ね合わせ・Schrodinger方程式・波束の収縮の性質を、演算処理として見たてる事で行う計算方法である。その有益な特性の代表に「超並列計算」と言われるものがある。それは次の事を表す。

第一に、重ね合わせがある事から、計算に行う情報が、確率振幅の大きさと位相というアナログ的なものである事。

第二に、Schrodinger方程式を用いる事から、計算に用いられるゲートが、ハミルトニアンという多数の情報を同時に処理するものである事。

第三に、波束の収縮が観測に関わる事から、計算結果の表示が、経過でのアナログ的な多くの情報と対照的にデジタル的に選抜されたものである事。以上の特性を持って「超並列計算」と言えると考える。但し、定義は特にされている訳ではないが、広く多用されている言葉である。

そして、量子計算機がその真価を発揮する為に、以下の事も加えて量子計算機と

呼ぶべきと考える。現在汎用されている古典計算機でも、現段階では多くの場合において問題は無く、計算機としての有益性を示している。よって、古典計算機では実行不可能であり、量子計算機では可能である、そんな領域を扱える必要があると考えられる。100ビット（およそ30桁の10進数を扱える）を越えない計算なら、古典計算機で全く構わない。（現在においても5分もあれば解ける）。そこでどんなに小規模容量の量子計算機でも、100量子ビット以上を持つ事が必要と言えよう。（600ビットの素因数分解は現段階では100万年は悠に越える。しかし量子計算機なら3分もかかるはずがないと考えられている。）[7]

以上が量子計算機としての概要である。

この量子計算機実現に向かう為に、どのように具体化されると考えられているのか、物理系にどう量子計算をさせていくかを次の章で述べる。

3 量子計算機概念の具体化

量子計算機とは量子アルゴリズムを行う為の機械である。まずは量子アルゴリズムがどのようなものかを示し、それを実際に行う為の素子について話をする。

3.1 量子アルゴリズム

量子アルゴリズムとは、広い意味では古典計算でのアルゴリズムも含むが、基本的には、古典計算では行えない量子計算ならではのアルゴリズムである。つまり、重ね合わせ・位相情報・ユニタリー変換などの量子計算特有の性質を生かし、古典計算よりも優れた解法の手順を指すものである。前節でも触れたように、現在の主な量子アルゴリズムとしては次の2つである。Shorの因数分解アルゴリズムとGroverの検索アルゴリズムである。Shorの因数分解アルゴリズムとは、与えられた整数の素因数は何かを探し出す計算手順である。現在においては指数関数手順（指数関数時間）かかる問題だが、多項式手順（多項式時間）で解くアルゴリズムである。Groverの検索アルゴリズムとは、N個のファイル番号の中から検索すべき項目を用いて見つけ出す手順である。古典計算でおよそ $N/2$ 手順かかる問題だが、およそ \sqrt{N} 手順で解くアルゴリズムである。Shorの因数分解アルゴリズムの方が、現在の古典アルゴリズムと比較した時の優秀さ（速さ）は大きい。しかしGrover検索アルゴリズムの方が、量子アルゴリズムの機構が分かり易く、また量子計算を最適に用いたアルゴリズムである事が示されている。よって本研究では、Groverの検索アルゴリズムに着目した。

3.1.0.1 Groverの検索アルゴリズムの概要 上ではGroverの検索アルゴリズムをN個のファイル番号の中から検索すべき項目を用いて見つけ出す手順と説明した。しかしアルゴリズムの内容だけでは、「検索」と言う枠組みで囲むには欠けて

いる点がある。それはファイルの情報と見出しの付加番号の関係や、検索すべき項目とそれに対応する処理の仕方、そして問題の設定より情報整理の仕方が一般的ではない事である。よって、次の枠組みに問題を置き換える事で、より分かり易いイメージを持ってもらう事にする。

Grover の検索アルゴリズムとは、N個のくじの中から当りを見付ける手順である。

調べるくじの付加番号に対する量子状態を等状態にする。その位相方向をプラスとする。当りの印し付けが一つのゲートに対応している。その当りゲートは当りの所だけ位相反転するもの。つまり当りだけマイナスを掛ける。

検索ゲートは自分自身にだけマイナスを掛ける重みを付けて平均値をとるというもの。各固有状態が等しい状態を用意して、当りゲートと検索ゲートを交互に繰り返す事で当りに対応する状態が確率1に近づく。つまり当りだけマイナスの状態にしておいて自分自身にマイナスを掛けると自分が当りなら全てプラス、一方で自分が外れならプラスとマイナスが入り混じる。その上での平均値を取れば全てプラスが最大に、入り混じれば0に平均値は近づく。繰り返す事で外れと当りの確率に大きな開きが出来る。補足すべき事に次の事がある。くじ全体数に対して当りが4分の1あれば当りゲート 検索ゲートの1回ずつで当りを最大確率に出来る。4本のくじに1本の当りなら1回ずつで当りを確率1に出来る。

3.2 量子計算機の素子

3.2.1 量子計算機としての物理系の設定

演算に用いるデジタル情報を、量子力学における固有状態で定義する。普通は2状態系を取り上げて、その各々にデジタル情報0と1を定義する。但し、重ね合わせの原理から、デジタルだがアナログ的に中間の情報も存在する。よって0と1だけの情報を乗せる物がビットなので、それとは量子ビットという名称で区別されている。

そのデジタル情報を単純な演算処理（計算の基本となる特定の単純な変換）させるものが、ゲートである。取り上げた物理系におけるゲートは、特定のハミルトニアン（系の発展を示す）と特定の時間により構成される。つまりハミルトニアンと時間が定まると、系の発展は特手のユニタリー変換と言う行列で表される事になる。その行列がゲートであり、入力情報である初期状態を、その行列による変換を通じて、出力情報である終状態を作り出す。但し、Schrodinger 方程式から、全ての入力情報を同時に変化させていく。よって通常使われているゲートと対応の大きさが違うので量子ゲートという名称で区別する事もある。

そしてこれらを計算機とする為には、その計算装置とした物理系に入力と出力を必要である。入力に対しては、任意の入力情報に対応した状態を作れる事が必要である。出力に対しては、複数のゲートを通して得られた終状態から、正しく

理解できる情報にする観測方法が必要である。但し、波束の収縮から、重ね合わせであったアナログ的な情報を、瞬時にデジタルとしての情報として出力表示はなされる。

3.2.2 量子計算機に必要な量子ゲート

量子計算機に任意の計算が出来るように、汎用性を持たせる為のゲートを基本ゲートとする。任意の計算とは、古典アルゴリズムを含めた量子アルゴリズムを全て行う事を意味する。この意味において万能量子計算機と呼ぶ事がある。(古典アルゴリズムを全て行えるかという考えから、万能チューリングマシンという概念が生まれた。それに由来する)。

前節で述べた通り、量子計算のゲートはユニタリー変換の行列で作られる。それは可逆ゲートと言う種類のゲートで、つまり入出力に際して情報量が保たれ、入力と出力の情報は単写像(1対1対応)となる、そういう種類のゲートである。現在普及されている古典計算機(ノイマン型計算機)では、ANDゲートなどの不可逆ゲートで回路が組まれている。よって、ANDゲートなどとは異なる、論理演算に必要な最小限のゲートは何かという枠組みを用いる必要がある。最小限の捉え方が幾つかあるので、幾つかの組み合わせを上げる事が出来る。その中の一つに、量子計算機研究で主に用いられている組み合わせがある。ここではそれを紹介する。また本研究もそれに則り、そのゲートを構成できるかによって、量子計算機素子としての応用可能性を議論する。

1量子ビットにおける任意ユニタリー変換ゲートと、2量子ビットにおけるCNゲート(ControlledNotGate, 制御付NOTゲート)この2つのゲートにより、全ての量子計算(量子計算は古典計算を含む)の回路が組める。[7]それはまた次の意味でもある。N個の量子ビットの全ての変化に対応する 2^N 次元のユニタリー変換を、その2つの組み合わせにより全て構成できる。よって、CNゲートと任意ユニタリー変換ゲートの2つは、量子計算機の基本ゲートとみなされている。

任意ユニタリー変換ゲートとは、1量子ビットが持つ状態ベクトルに、任意の回転を与えられるというゲートに相当する。1量子ビットをスピンの上下と捉えると、スピン一つの方角を、自由な回転を与えて変えさせると解釈できる。

$$\text{パウリ行列} : \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) \quad (2)$$

$$(\text{任意の回転演算子}) = \exp -i \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{n}}{2} \quad (3)$$

$$= 1 \cos \frac{\phi}{2} - i \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \sin \frac{\phi}{2} \quad (4)$$

(パウリ行列の一つは残り2つの積なので、
2つの行列つまり2軸の回転が
任意の(全ての)回転を表している)

またその回転をユニタリ行列で解釈すると、SU(2)群であるから、2軸の回転操作を行えば良いと言える。故に、任意ユニタリ変換ゲートが行えるかどうかは、2軸の回転が行えるかで判定できる。本研究において、素子の可能性を考察する上での重要な判定基準に用いた。

CNゲートとは、2量子ビットのゲートである。その振る舞いを表すには、量子ビット一つに対して2状態が対応するので、2x2状態つまり4状態系を考えるのとほぼ同じである。数式的には直積空間への拡張11.1と考える。以式がCNゲートの定義となる。

$$\text{CNゲートの変換行列} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$= \begin{pmatrix} \text{スピンで例えると上の行から} \\ | \quad >, | \quad >, | \quad >, | \quad > \\ \text{という関係である。} \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_1 \otimes 1_2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_2$$

(7) $\begin{pmatrix} 1 \text{量子ビット目(添え字1)が制御ビットで} \\ 2 \text{量子ビット目(添え字2)が標的ビット} \\ \text{(NOT又は恒等)} \\ \text{そう見ると分かり易い} \end{pmatrix}$

ゲートの働きを分かり易くする為に、下に真理値表を記す。但し、0と1の定義の取り方で、制御ビットと標的ビットは入れ替わる事すら可能なので、解釈する為のイメージである事を注意する。

表 1: CNゲートの真理値表

入力 (逆出力)		出力 (逆入力)	
制御ビット	標的ビット	制御ビット'	標的ビット'
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	0

3.2.2.1 Grover の検索アルゴリズムに必要なゲート 物理系とゲートの対応関係は上で説明した。よって、アルゴリズムの内容を主体として説明をする。

上述の通り Grover の検索アルゴリズムに用いる量子計算を、任意ユニタリー変換ゲートとCNゲートの2つで構成する事は可能である。しかし、Grover の検索アルゴリズムを行うという観点からは、不要な煩雑さを増す事となる。煩雑さを避ける為に、Grover の検索アルゴリズムを、次の平易な3種類の変換で構成するものと見る。

またこの3種類とは、P 6 で説明した個々の意味と対応している点でも分かり易くなる。

等しい状態を用意するゲートとなる Walsh-Hadamard 変換 W と、当りゲートとなる変換 $U1$ と、検索ゲートとなる変換 $U2$ である。

また次の2種類の変換より $U2$ を簡単に構成できる。上で既に必要とした Walsh-Hadamard 変換 W と、単位行列において1行1列の要素だけが -1 という S (W の定義によって変る) である。

下にくじの総数 N を4個とした式を例として記す。4個とした理由は、以下に示したデモンストレーションは2量子ビットによるもので、固有状態が4つのくじが出来るからである。

また操作の種類を少なくする為に、当りの付加番号を "1" と設定した。つまり $U1$ と S が同じ変換となる。

$$W = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U1 \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ & = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right) \quad (10) \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right) \quad (11)$$

$$= W \quad (12)$$

ユニタリー行列と物理系の関係は、上でのCNゲートで説明したのと同様の意味である。つまり2つの2状態系を直積空間に拡張したものである。同値の意味だが、一方の各固有状態にもう一方の各状態を掛け合わす事で、4状態系と同様にしたものである。

4 現在行われている量子計算機実現の試み

4.1 量子計算機実験の現状

量子計算機実現の過程としておおよそ2通りが考えられよう。一つは、あらゆる量子演算を可能にする2種類の量子ゲートを完全に作り、それをもって全ての量子アルゴリズムに対応する計算機を組み立てる流れである。もう一つは古典アルゴリズムより優れた量子アルゴリズムを実際に行う量子計算機を先ずは作りだしてから、汎用性をもつ計算機を作ろうとする流れである。本研究ではこの2つの流れを意識して、素子の可能性について論じた。任意ユニタリー変換ゲートとCNOTゲートを数値計算上で実現する事で、素子が原理的にあらゆる量子計算が行えると主張した。もう一方で、量子アルゴリズムの一つであるGroverの検索アルゴリズムをデモンストレーションする事で、特定のアルゴリズム専用のものを構成するのにも原理的には優れているという主張である。

それから、量子計算機実現に向けた現在の状況は、様々な物理系とアイデアを用いて、量子ビットや量子ゲートを実現させようとしている所である。それは逆に、どの物理系とアイデアが量子計算機実現に最適なのか分からない事も意味していよう。量子ゲートが出来たとしても、量子計算機になる為の課題は幾つも残されているからだ。つまりまだ始まったばかりと言える。

量子計算機を目指す実験の具体例をあげるとすると、イオントラップ・NMR・量子ドットなどが、現在の量子計算機素子の候補として実験されている。個々の物理系を紹介しておく。[7]

イオントラップは、イオン原子を特殊な電場の中に閉じ込めておいて、その原子のスピンを0と1に定義している。他に触れる物が無いので、純粋な2状態系を作るのに優れている。しかし特殊な電場を必要とする為に、多数の量子ビットを用意するのが難しい。

NMR（原子核磁気共鳴）は、分子における原子核スピンを電場により制御するもので、分子の中の各原子一つ一つが0と1に定義される。主に液体の分子を扱っており、アボガドロ数に相当する数の平均を取る事で孤立系保ちつつも、分子の原子数を増やす事で多量子ビットを構成出来る点が優れている。量子計算を行うという点では、現状においてNMRが最も多くの成果を上げていると言えるであろう。しかし分子の原子数を増やす事で、各々のスピン信号が不明瞭になるので、数10量子ビットに拡張するのも困難であると思われる。

量子ドットは、電子を小さな領域に閉じ込めておいて、その電子の量子化させたエネルギー状態を0と1に定義している。量子ビットの一つ一つの操作が可能である。また固体と出来る事から、素子としての強度を持たせられるので、操作性に優れており、多量子ビットへの拡張性は高いであろう。しかし適切な量子ドットを作る技術的な困難がある。またレーザーによる遷移でゲートを作るのだが、レーザーと同レベルの位相回転をしているので、単純には位相を制御できない。そこ

で2状態系とは別に補助ビットというものを用意して、補助ビットとの Rabi 振動で制御している。やや複雑な物理系を制御している事になる。

そんな中の候補の一つとして、励起子ポラリトンモードを利用した固体量子素子を取り上げる。量子計算機実現に近いと思われる利点が幾つかある。詳細は次節で述べる。

5 励起子ポラリトンモードを利用した固体量子素子

5.1 励起子ポラリトンモード

励起子ポラリトンモードとは光子と励起子が結合している物理状態を指す。共振器により閉じ込められた光子と、量子井戸により閉じ込められた励起子を同じ場所に用意する。つまり、光子有無の2状態の2状態の各々の場合について基底・励起があるので、2状態同士の掛け合わせより4状態が系に存在する。その励起エネルギーと光子エネルギーを同じにすると結合をして、励起子ポラリトンモードと呼ばれる状態になる。その状態では共鳴状態であり、Rabi 振動を起こす事が知られている。更にその Rabi 振動における基底・励起の振動により、電磁波が放射される事が分かっている。[1][2]

次の説でこの励起しポラリトンモードの概念図を用いながら、量子ゲートへの応用を説明する。

5.2 量子ゲートへの応用

微小共振器と量子井戸を半導体の中に適切に組み合わせる事で、ポラリトンモードを作る素子は既に存在する。その素子の物理系を考えよう。

素子の中には次の各状態が有る。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{光子 (フォトン)} : |p0\rangle = |\text{光子 0 個}\rangle, |p1\rangle = |\text{光子 1 個}\rangle \\ \text{励起子 (ダイポール)} : |g\rangle = |\text{基底状態}\rangle, |e\rangle = |\text{励起状態}\rangle \end{array} \right. \quad (13)$$

よって素子の中に次の4つの状態を考える。

4状態系の各エネルギーを表2にあるように以下の通りにおく。

状態	$ p0\rangle g\rangle$ $= p0, g\rangle$	$ p0\rangle e\rangle$ $= p0, e\rangle$	$ p1\rangle g\rangle$ $= p1, g\rangle$	$ p1\rangle e\rangle$ $= p1, e\rangle$	(14)
エネルギー	E_a	E_b	E_c	E_d	

$$(\Delta = E_c - E_b \text{ と } \Delta \text{ を定義しておく}) \quad (15)$$

素子の内部を孤立系が保てるとし、その上で入射エネルギーを E_b, E_c と同程度にすれば、エネルギーの保存則より、 E_a, E_d のエネルギー状態になる確率はほぼ0

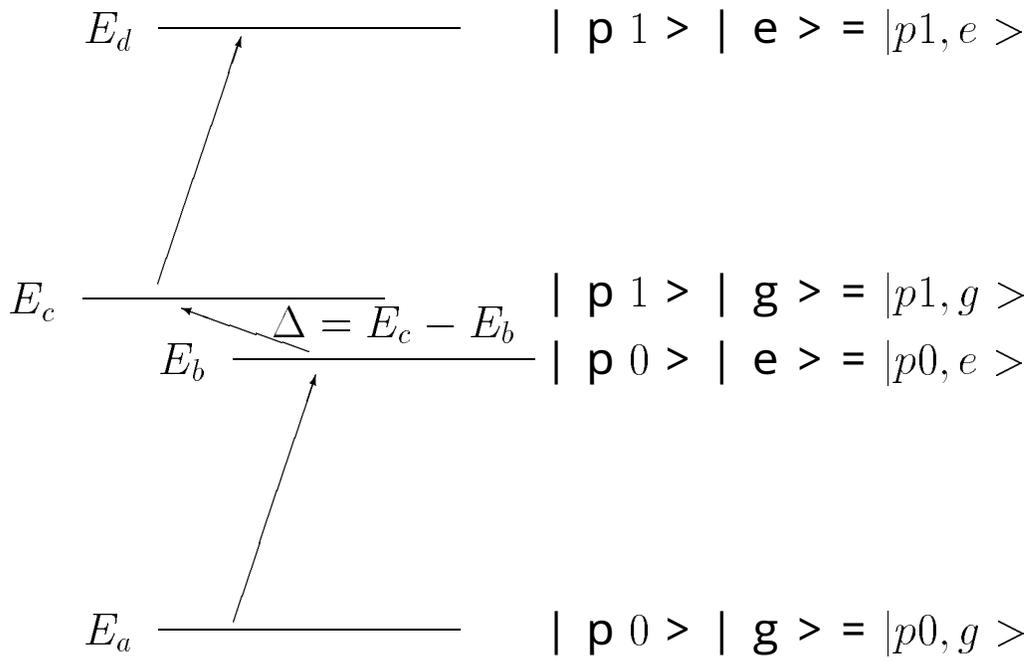


表 2: 素子中の 1 量子ビットエネルギー準位図

となる。

よって素子の中には $|p1, e\rangle, |p0, g\rangle$ の状態がなくなり、 $|p1, g\rangle, |p0, e\rangle$ の 2 状態系を構成する事になる。この 2 状態を 0 と 1 に定義して、量子計算を行わせる。また素子に電場を与える事で E_b, E_c の大きさをシュタルク効果により変化させる事が出来る。 $E_c - E_b = \Delta$ を 0 に近付けて行くと励起子ポラリトンモードの中の 2 状態 $|p1, g\rangle$ と $|p0, e\rangle$ はラビ振動を起こす事が知られている。[2]

ラビ振動の過程を数式で表すと以下の様になる。2 状態系 $|p1, g\rangle, |p0, e\rangle$ の各状態のエネルギーが E_c, E_b である。そして $|p1, g\rangle$ の状態から $|p0, e\rangle$ への遷移振幅を A とする。すると量子状態の変化を表す事が出来るハミルトニアン \mathcal{H} は以下の様に定まる。

$$\mathcal{H} = |p1, g\rangle E_c \langle p1, g| + |p1, g\rangle A \langle p0, e| + |p0, e\rangle A^* \langle p1, g| + |p0, e\rangle E_b \langle p0, e| \quad (16)$$

ブラ $\langle|$ を初期状態と解釈し、ケット $|>$ を終状態と解釈すれば分かり易い。それはつまり $|p1, g\rangle$ であった確率振幅は A という割合で $|p0\rangle |e\rangle$ に流れると解釈する事になる。更にその解釈を推し進め、各状態のエネルギー E も各状態が同じ状態に流れる割合を示すものと捉える。そして全確率を一定に保つ為には、 $|p0, e\rangle$ から $|p1, g\rangle$ へ流れる割合は A^* でなければならないと捉えられる。即ちハミルトニアンがエルミートである理由である。

$$= \begin{pmatrix} E_c & A \\ A^* & E_b \end{pmatrix} \begin{matrix} |p1, g\rangle \\ |p0, e\rangle \end{matrix} \quad (18)$$

つまり

$$\begin{pmatrix} E1 & a \\ a^* & E2 \end{pmatrix} \quad (19)$$

一つの qubit における 2 つの基底状態が情報 0 と 1 の定義となる。その定義された基底状態におけるエネルギー準位が $E1, E2$ である。またその 2 準位間の遷移確率が a, a^* である。

以上の事から Rabi 振動を起こす事が分かる。0 と 1 の任意の重ね合わせを Rabi 振動により作る事が出来る。[3]

シュタルク効果により、ポラリトンモードに与えた直流電場の変化は、 Δ を変化をもたらし、Rabi 振動を制御できる。また直流電場の上に振動電場を乗せる事でも Rabi 振動を生じさせられる。これによって 1 量子ビットが出来るだろう。

更に、電気双極子相互作用をうまく利用すれば、C N ゲートも出来るのではないだろうか。つまり 2 量子ビットの可能性が見出せる。

加えて量子計算機実現を考えると、半導体素子のように、微細構造を持ちながら精密且つ膨大に拡張できる物が実用的であろう。この物理系は、その観点に当てはまるものの一つと言えよう。[4]

よって、この素子を取り上げて調べる事とした。

6 素子に対応する数値計算

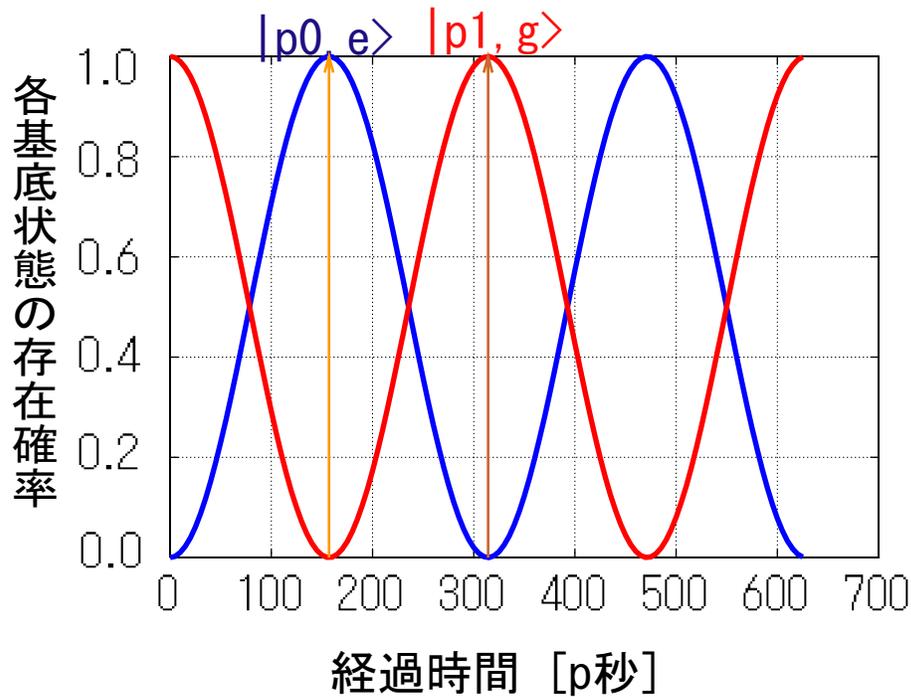
6.1 数値計算の方法

Schrodinger 方程式を微分の式のままに数値計算を行った。。微分方程式の扱いは 4 次の Runge-Kutta 法を用いた。また誤差の目安として、各状態の存在確率の和が 1 となるか (確率保存の法則が守られているか) で判定した。具体的な値は、0.999 以上 1.001 未満のみを採用した。

6.2 1 量子ビットの場合

ハミルトニアン $\mathcal{H} = \begin{pmatrix} E1 & A \\ A^* & E2 \end{pmatrix}$ を、Schrodinger 方程式に則り数値計算を行った。横軸が時間の経過を表し、縦軸がそれに従った各基底状態の存在確率を表す。

Rabi 振動 : 初期状態 $|p1, g\rangle$



初期状態 : $|p1, g\rangle$

↓

157.08p秒後に観測した場合の終状態 : $-|p0, e\rangle$

314.16p秒後に観測した場合の終状態 : $|p1, g\rangle$

実験値と数値実験の Rabi 振動はそろった。故にハミルトニアンが正しい事の裏付けとなった。(コヒーレント時間は技術発展により十分長くなるものと考え、この比較では考慮しない。)

(ハミルトニアンの正しさは参考文献 [2], [3] より)

この 1 量子ビットで任意の重なりを作る事が出来る。[4]

6.3 2量子ビットの場合

6.3.1 2素子におけるハミルトニアン

2量子ビットに拡張した場合のハミルトニアン \mathcal{H} を、極力妥当かつ単純に構成した。

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} E1_1 & a_1 \\ a_1^* & E2_1 \end{pmatrix} \otimes \infty_{\epsilon} + \infty_{\epsilon} \otimes \begin{pmatrix} E1_2 & a_2 \\ a_2^* & E2_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_3 \end{pmatrix} \quad (20)$$

\otimes とは直積 (テンソル積) の記号である。計算方法は付録にのせた。
(21)

\otimes の左側が 1 qubit 目を表しており右側が 2 qubit 目を表している。つまり $\delta_3 = 0$ ならば (右辺第三項が無いならば) 個々の qubit の動きを直積空間で一つに表現したに過ぎない。 δ_3 が 2 つの qubit 間における唯一の相互作用という形をなしている。この相互作用は、2素子を近接距離に配置する事で考えられる電子双極子相互作用である。その電場を介した作用は、2素子共に励起子が存在する時のみ、エネルギー準位を δ_3 ずらすものと考えられる。故に、この形のハミルトニアンが十分に適しているものと考えられる。

更に単純化する為に、以下の形にハミルトニアンを書き直す。 $E1, E2$ はエネルギー値なのでエネルギーの基準の取り方による大きさの任意性がある。その任意性を利用して下の様における。

$$E2 \rightarrow 0 \quad \iff \begin{cases} E2_1 \rightarrow 0 \\ E2_2 \rightarrow 0 \end{cases} \quad (22)$$

$$E1 \rightarrow \Delta = E2 - E1 \quad \iff \begin{cases} E2_1 \rightarrow \Delta_1 \\ E2_2 \rightarrow \Delta_2 \end{cases} \quad (23)$$

よって式 (20) を今後下の形で議論する。

$$\text{式 (20)} \rightarrow \mathcal{H} = \begin{pmatrix} \Delta_1 & a_1 \\ a_1^* & 0 \end{pmatrix} \otimes 1_2 + 1_2 \otimes \begin{pmatrix} \Delta_2 & a_2 \\ a_2^* & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_3 \end{pmatrix} \quad (24)$$

$$= \begin{pmatrix} \Delta_1 + \Delta_2 & a_2 & a_1 & 0 \\ a_2^* & \Delta_1 & 0 & a_1 \\ a_1^* & 0 & \Delta_2 & a_2 \\ 0 & a_1^* & a_2^* & \delta_3 \end{pmatrix} \quad (25)$$

6.3.2 C Nゲートに相当する素子への操作

C Nゲートは2量子ビットのゲートである。C Nゲートの主な振る舞いは、一方の量子ビットを制御ビット (Controlled) とみなして、その制御ビットが1の場合に唯一もう一方の量子ビット・標的ビット (Target) を反転させる (NOTゲート) のみの変換をするものである。但し、量子ビットの混合状態を考えると、その各々の役目を逆転したかのような状況もあるので、上の説明はイメージであって定義ではない。C Nゲートの定義は下の変換行列である。

$$\text{C Nゲートの変換行列} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_1 \otimes 1_2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_2 \quad (26)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (27)$$

(1量子ビット目が制御ビットで
2量子ビット目が標的ビット、
そう見ると分かり易い)

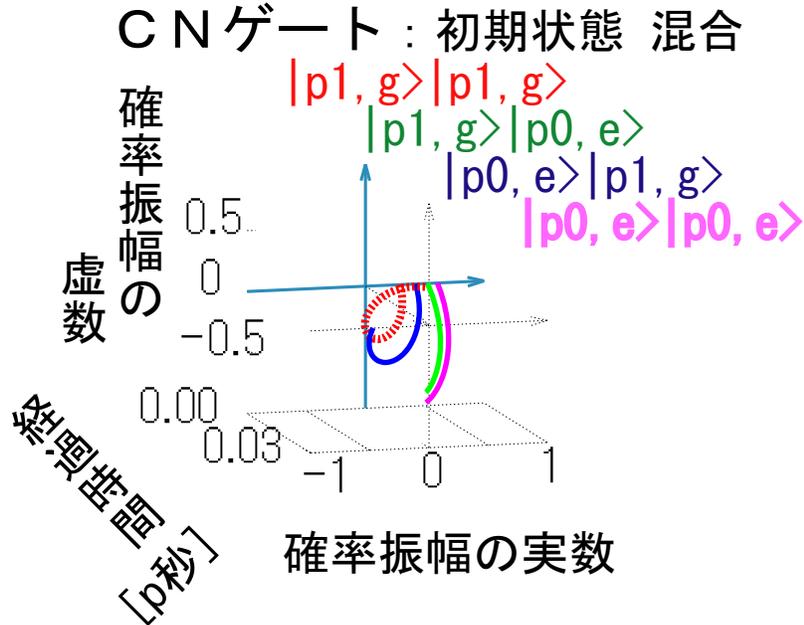
各入力に対してC Nゲートの出力が得られるかを示す。示す順番は以下の通りとする。

$$(\text{制御ビット}, \text{標的ビット}) = (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (\text{混合})$$

各入力の一つ一つに対して、先に存在確率の時間変化を表すグラフを示し、その後位相情報のグラフを示す。位相を見る為のグラフは3次元グラフを用いた。次の表3を用いて説明する。確率の表と同様に、4つの各固有状態を4つの線で表している。グラフの軸は次の通りである。奥から手前に向かって時間の経過を表しており、横軸に各固有状態の確率振幅における実数値であり、縦軸が各固有状態の確率振幅における虚数値である。また、奥から手前に向かう矢印が中心を示しており、その中心の矢印と各状態を表す線との距離が確率を表している。位相が時間に従い右回りを行っているのが分かる。それからこの表3は下に示す表9の初期状態を表している。エンタングルと呼ばれる混合状態の初期状態だが、各位相は全て揃えて、その位相の方向を実数の方向と定義してある。よって経過時間0の最も奥において、各固有状態を表す線は実軸とくっつき、各固有状態は虚数値を含んでいない事が見てとれる。ちなみに、下の全ての3次元グラフは、最も手前に終状態を表すように奥行きを時間軸を止めてある。

以下に示す全ての初期状態は、全て実軸から始まるように定義してある。故に実軸で終状態となる事が、位相を保ったユニタリー変換に相当する事を意味している。

表 3: 2 素子における 4 状態の位相変化：初期状態



おおよそ、位相の速さは Δ に従い、確率変化の速さは a に従っている。振動電場の幾つかの対応関係を見つけた。

定常電場でも Rabi 振動をなす事をみた。[4]

6.4 2量子ビットによる量子アルゴリズムの場合

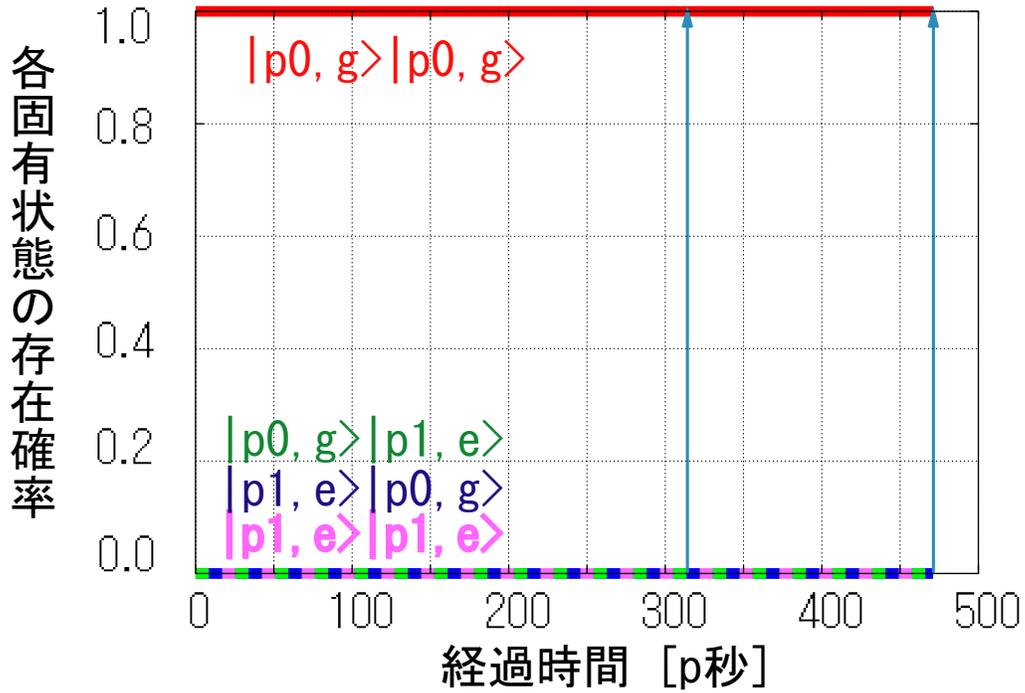
上で示してきたように、本研究で着目している素子を 2 つ用いて 2 量子ビットを構成できた。それならば、2 量子ビットでの量子アルゴリズムが行えるはずである。そこで、量子アルゴリズムの代表の一つである Grover の検索アルゴリズムを、その素子 2 個に実行させる事で、2 量子ビットを構成した事の裏付けをする。

Grover の検索アルゴリズムに相当する素子への操作は

Grover の検索アルゴリズムの内容は 3.1.0.1 で説明した。また Grover の検索アルゴリズムに必要なユニタリー変換は 3.2.2 で紹介した。それに基づき、次の 2 種類の変換を行う論理ゲートを構成する。WalshA-Hadamard 変換 W と当りゲートとなる変換 $U1$ この 2 つに相当するゲートである。但し Grover の検索アルゴリズムに次の 2 つを設定した場合である。一つ目は、WalshA-Hadamard 変換 W と単行列において 1 行 1 列の要素だけが -1 という変換 S 、この 2 つの変換で検索ゲートを構成する。2 つ目は、ユニタリー行列の 1 行目を「当り」とした場合である。つまり当りゲートとなる変換 $U1$ と、検索ゲートを構成する変換の一つ S が

表 4: (制御ビット, 標的ビット) = (0, 0)

CNゲート : 初期状態 $|p0, g\rangle |p0, g\rangle$



初期状態 : $|p0, g\rangle |p0, g\rangle \rightarrow$ 終状態 : $|p0, g\rangle |p0, g\rangle$

CNゲート : 初期状態 $|p0, g\rangle |p0, g\rangle$

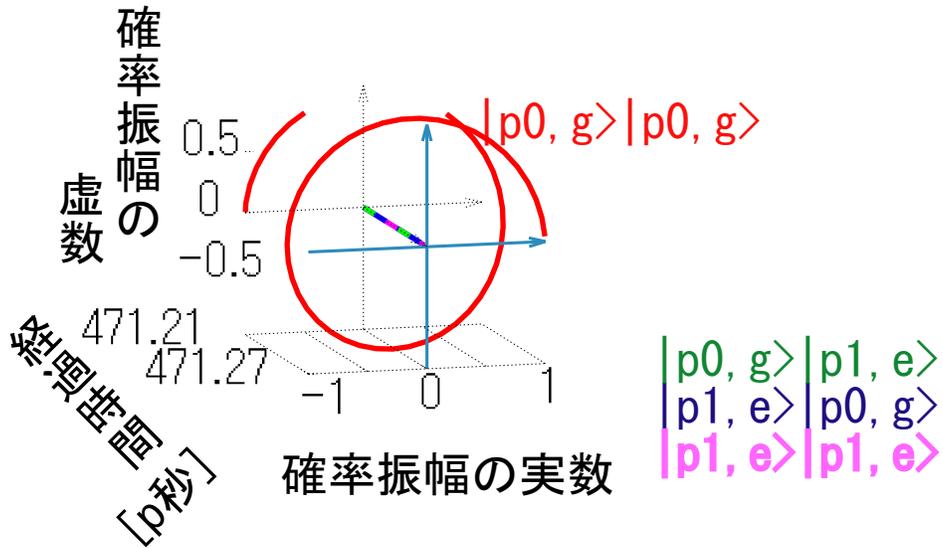
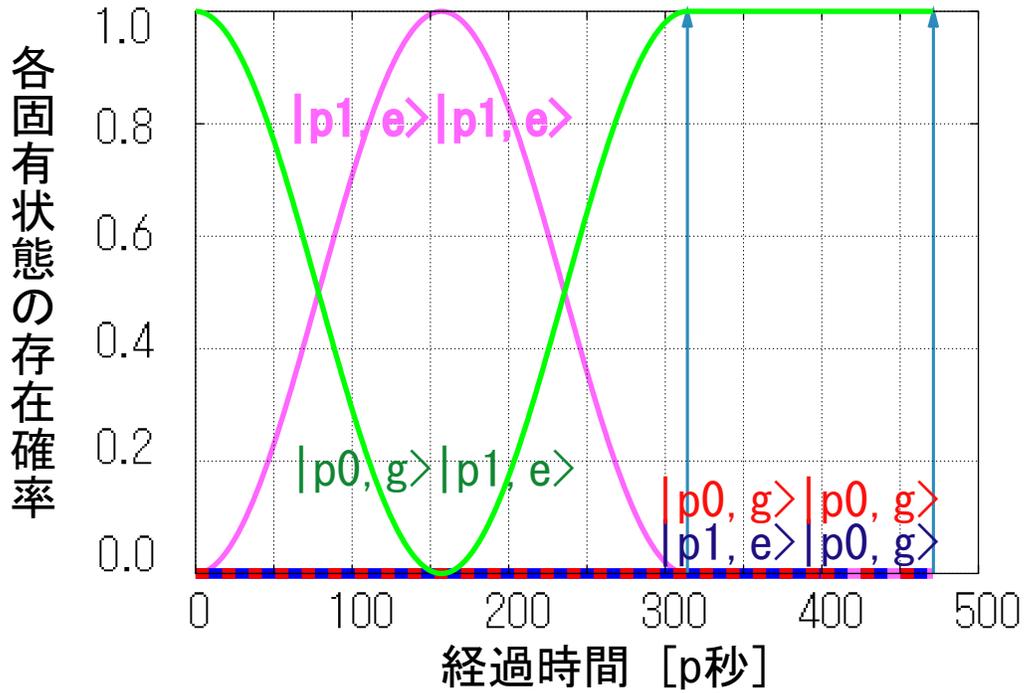


表 5: (制御ビット, 標的ビット) = (0, 1)

CNゲート：初期状態 $|p_0, g\rangle|p_1, e\rangle$



初期状態： $|p_0, g\rangle|p_0, g\rangle \rightarrow$ 終状態： $|p_0, g\rangle|p_0, g\rangle$

CNゲート：初期状態 $|p_0, g\rangle|p_1, e\rangle$

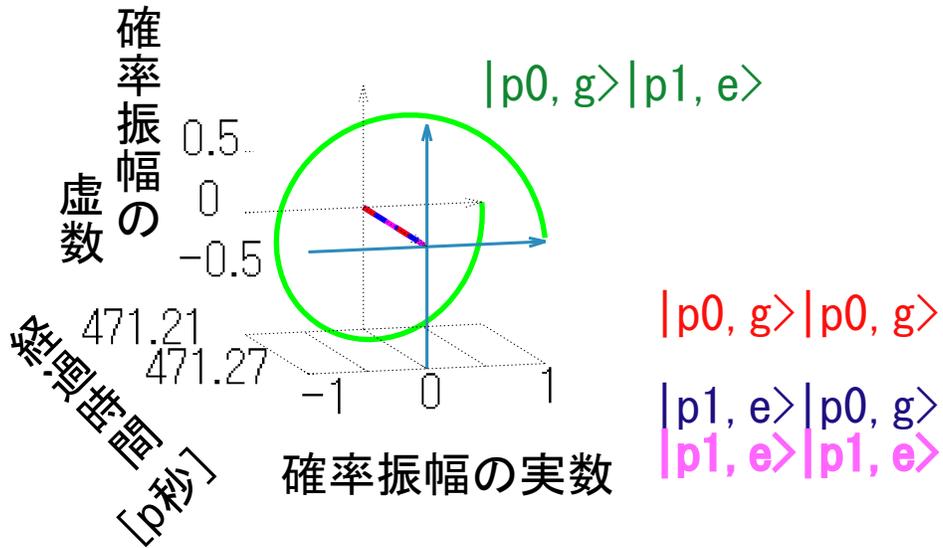
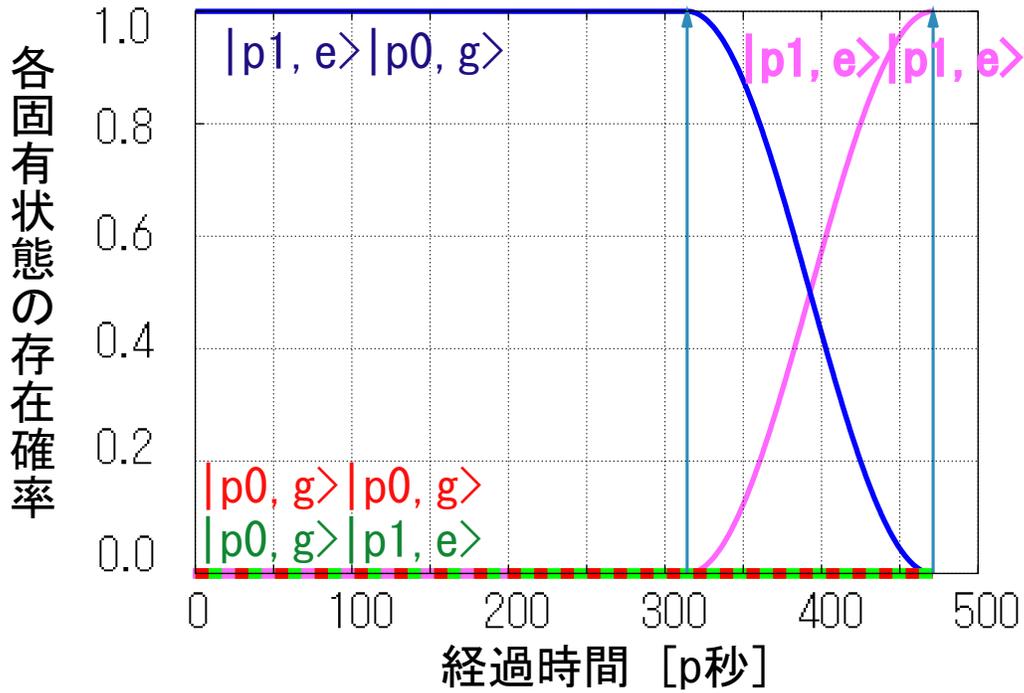


表 6: (制御ビット, 標的ビット) = (1, 0)

CNゲート : 初期状態 $|p1, e\rangle|p0, g\rangle$



初期状態 : $|p1, e\rangle|p0, g\rangle \rightarrow$ 終状態 : $|p1, e\rangle|p1, e\rangle$

CNゲート : 初期状態 $|p1, e\rangle|p0, g\rangle$

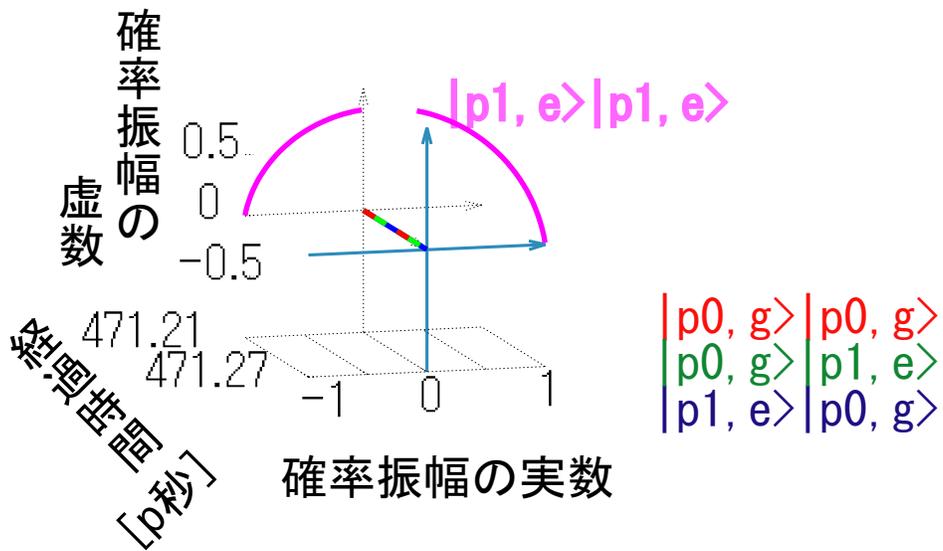
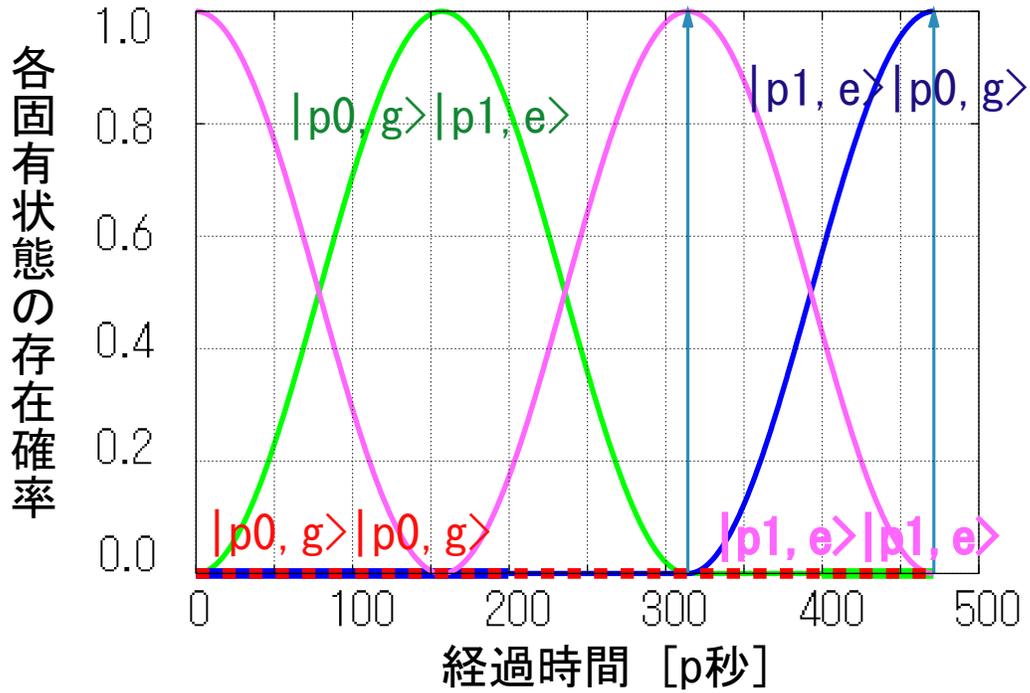


表 7: (制御ビット, 標的ビット) = (1, 1)

CNゲート：初期状態 $|p1, e\rangle|p1, e\rangle$



初期状態： $|p1, e\rangle|p1, e\rangle$ → 終状態： $|p1, e\rangle|p0, g\rangle$

CNゲート：初期状態 $|p0, g\rangle|p0, g\rangle$

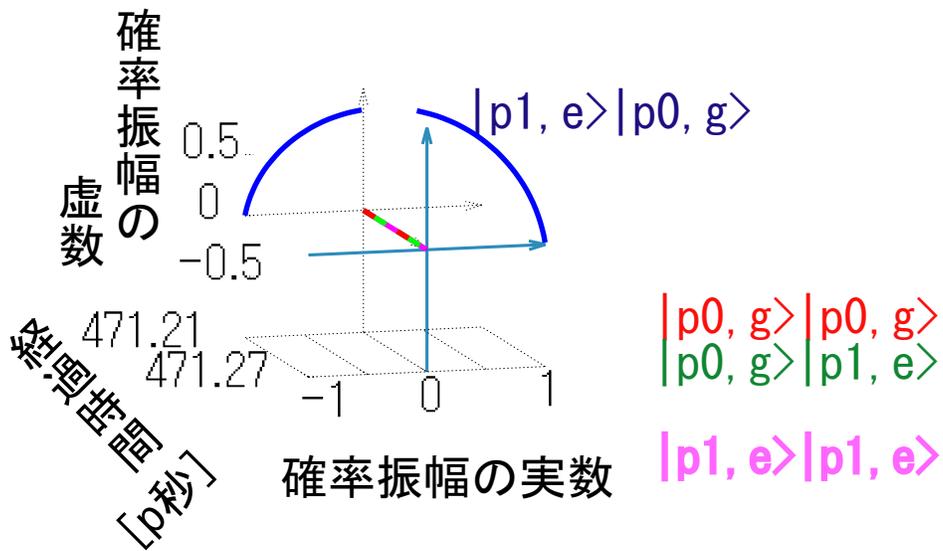


表 8: (制御ビット, 標的ビット) = (混合) (確率について)

CNゲート : 初期状態 混合

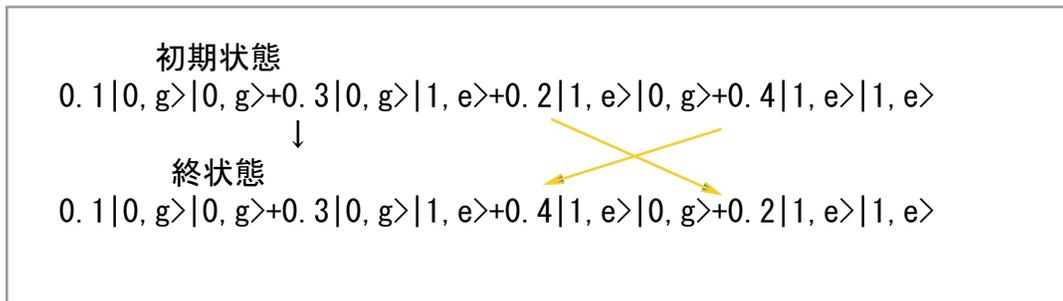
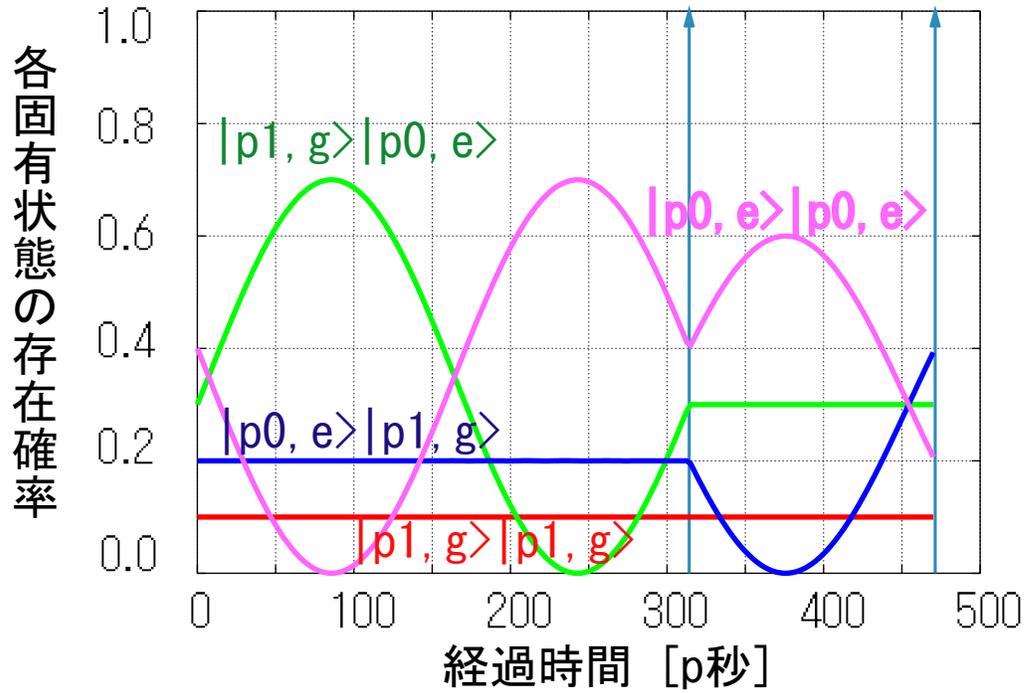
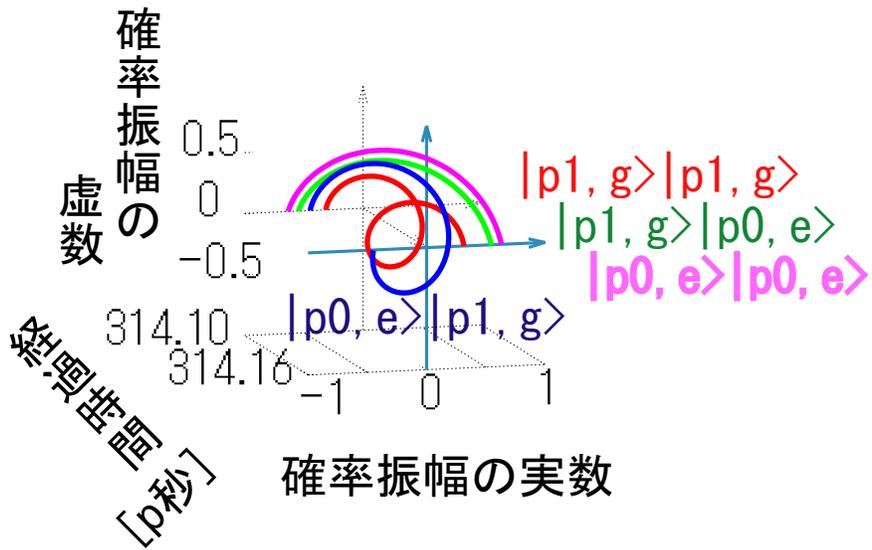


表 9: (制御ビット, 標的ビット) = (混合) (位相について)

CNゲート：初期状態 混合



CNゲート：初期状態 混合

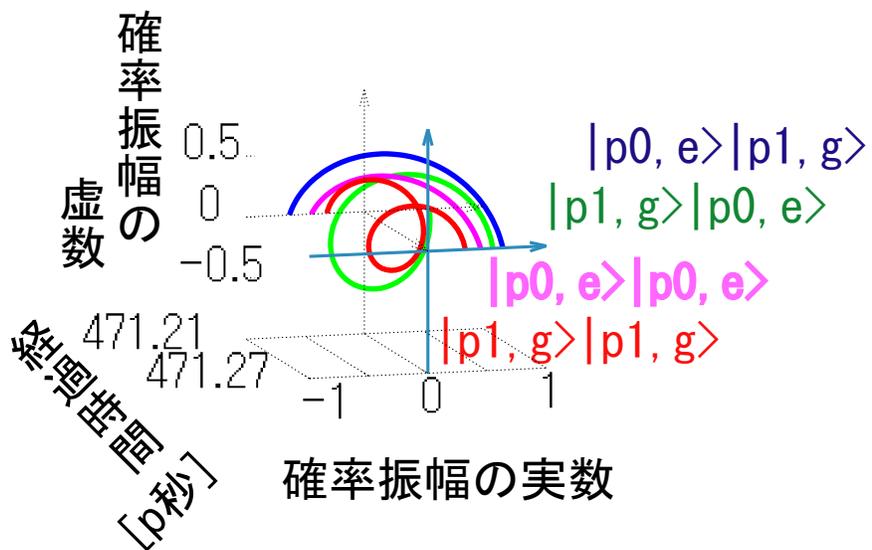


表 10: 表 3 ~ 9 における素子への操作 : C Nゲート

$a_1 = a_2 = 0.01$ で固定, $\delta_3 = 49.9$ で固定,

経過 p 秒	0 ~ 314.16 = 100.00 * π	~ 471.27 = 150.01 * π
Δ_1	49.99	99.98
Δ_2	100.01	49.99
待ち 時間	$\frac{\pi}{a}$	$\frac{\pi}{a}/2$
変換 行列	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
	位相修正	疑似C Nゲート

(Δ_1 は 2 順位系のエネルギー差で直流電場で変化する。meV の大きさ。(Δ_2 は材質や配置などで決まり、相互作用を切る装置で 0 も作る。meV の大きさ。(t は経過は経過時間の事で、系を一定に保つ時間を表

表 11: 入力値

等しいという事を指す。

$$W = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$U1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= S$$

WalshA-Hadamard 変換 W は次の様に構成した。

$$W = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right) \quad (28)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) * \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right) \quad (29)$$

$$= W \text{ (表の時間とは逆の順番に行列は並んでいる) } \quad (30)$$

素子に与える操作手順を表 12 に纏める。そして、次の表 13 でその手順による変化を示す。

表 12 について説明をする。表の左から順番に、時間の経過に従った流れ・手順を表している。また表の上から順番に、アルゴリズムの内容から実際に行うべき操作の順に表している。

表 12: 素子への操作 : Grover の検索アルゴリズム

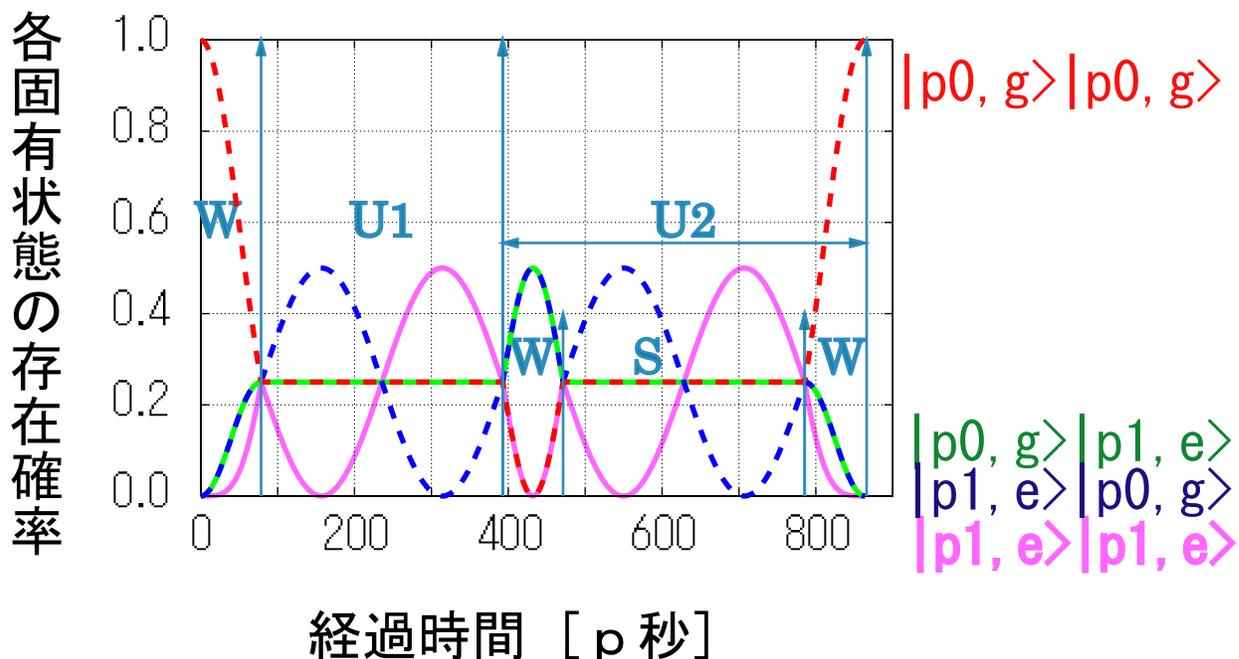
変換 行列	W		U 1		U 2		U 2	
	W		U 1		W		W	
	$\frac{1}{\sqrt{4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$		$\frac{1}{\sqrt{4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$		$\frac{1}{\sqrt{4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
Δ_1	0.00	100.00	100.00	0.00	100.00	100.00	0.00	100.00
Δ_2	0.00	100.00	50.01	0.00	100.00	50.01	0.00	100.00
δ_3	0.00	0.00	50.01	0.00	0.00	50.01	0.00	0.00
待ち 時間	$\frac{\pi}{a}$	π/Δ	$\frac{\pi}{a}$	$\frac{\pi}{a}$	π/Δ	$\frac{\pi}{a}$	$\frac{\pi}{a}$	π/Δ
経過 p 秒	25.00π =78.54	25.01π =78.57	125.01π =392.73	150.01π =471.27	150.02π =471.30	250.02π =785.46	275.02π =864.00	275.03π =864.03

$a_1 = a_2 = 0.01$ で固定

(Δ は 2 順位系のエネルギー差で直流電場で変化する。meV の大きさ。(a は材質や配置などで決まり、相互作用を切る装置で 0 も作る。meV の大きさ。(経過は経過時間の事で、系を一定に保つ時間を表

表 13: 時間経過に対応する操作とその変遷 : 検索アルゴリズム

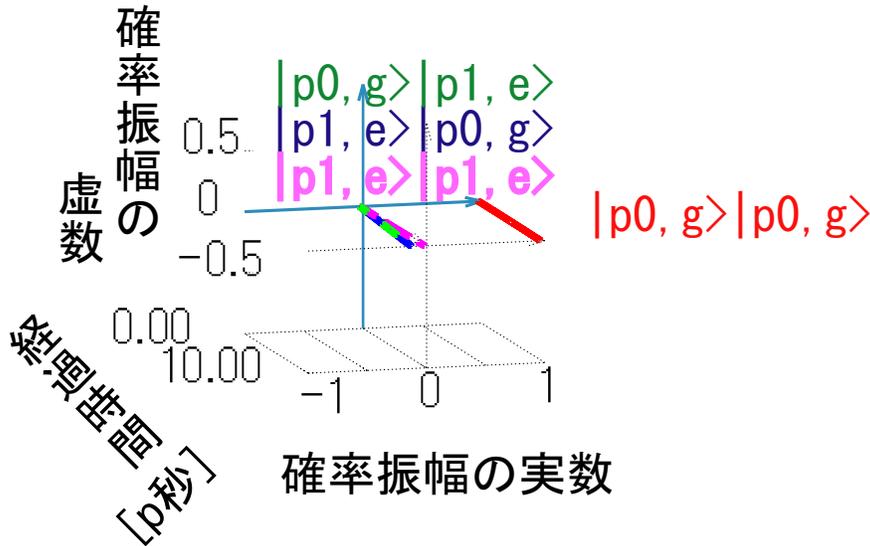
検索アルゴリズム : $|p_0, g\rangle |p_0, g\rangle$ を検索



初期状態 : $|p_0, g\rangle |p_0, g\rangle \rightarrow$ 終状態 : $|p_0, g\rangle |p_0, g\rangle$

表 14: 時間経過に対応する操作とその変遷：検索アルゴリズム（位相）

検索アルゴリズム： $|p_0, g\rangle|p_0, g\rangle$ を検索



検索アルゴリズム： $|p_0, g\rangle|p_0, g\rangle$ を検索

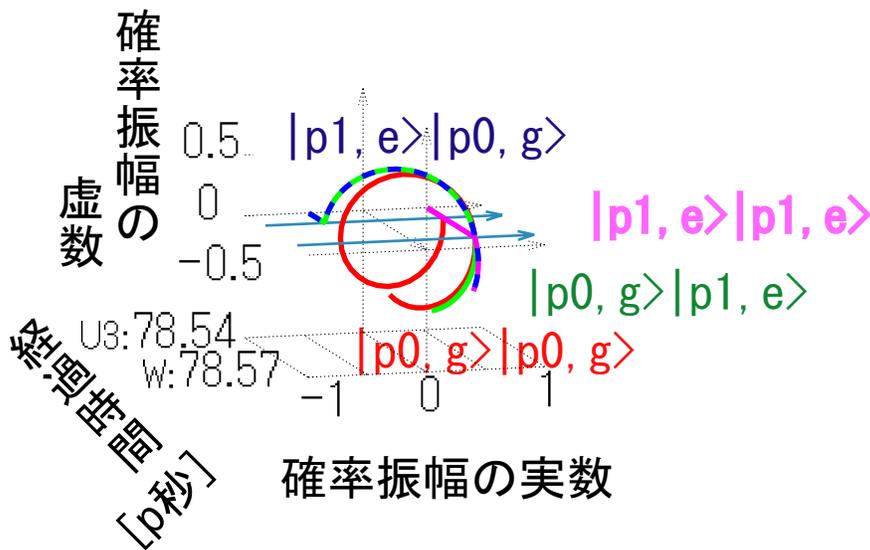
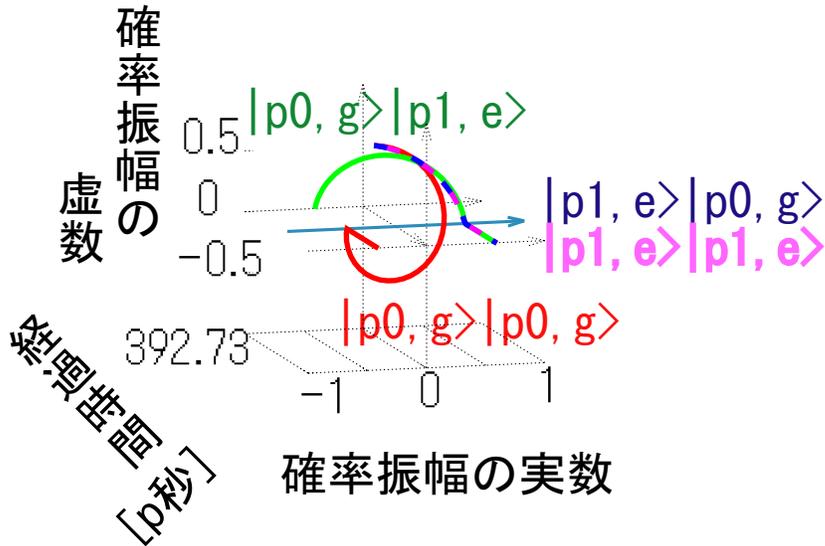


表 15: 時間経過に対応する操作とその変遷：検索アルゴリズム（位相）

検索アルゴリズム： $|p_0, g\rangle|p_0, g\rangle$ を検索



検索アルゴリズム： $|p_0, g\rangle|p_0, g\rangle$ を検索

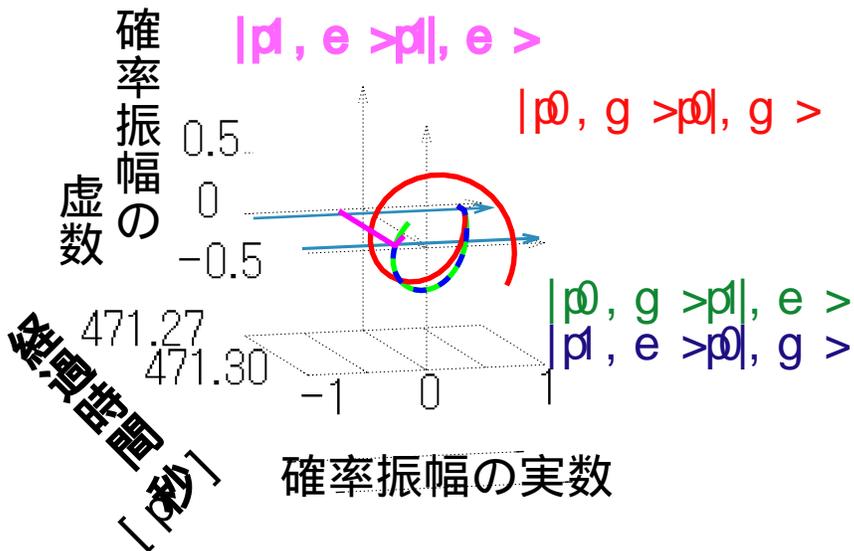
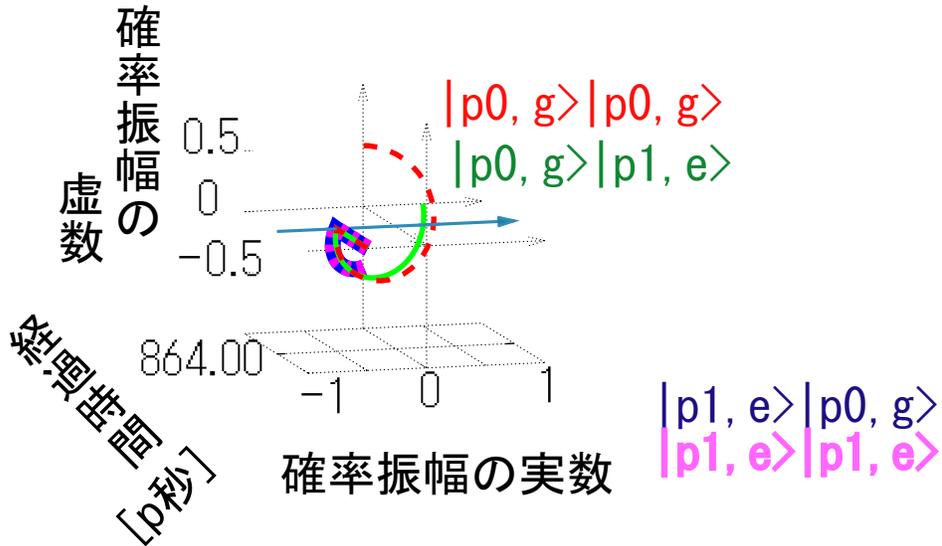
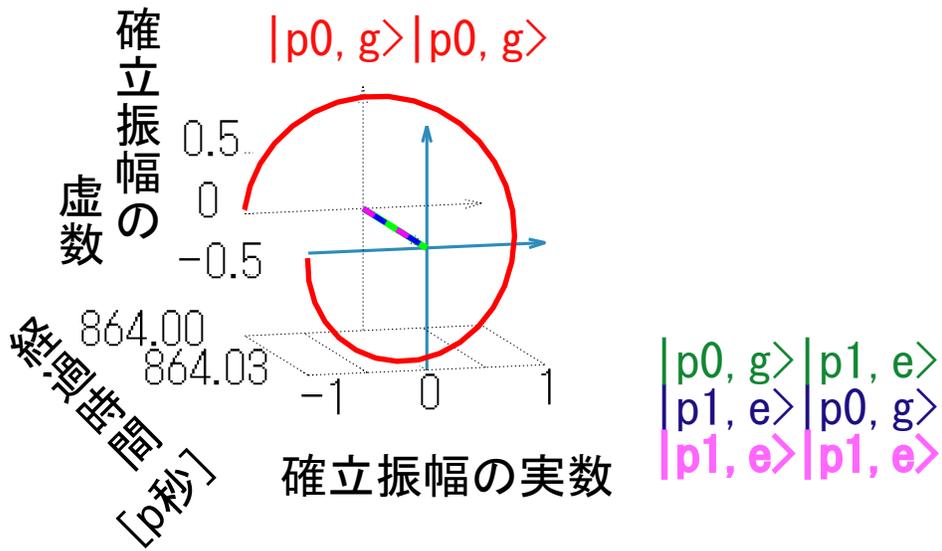


表 16: 時間経過に対応する操作とその変遷：検索アルゴリズム（位相）
検索アルゴリズム： $|p_0, g\rangle|p_0, g\rangle$ を検索



検索アルゴリズム： $|p_0, g\rangle|p_0, g\rangle$ を検索



7 素子の可能性についてのまとめ

1量子ビットのスイッチは作れた。1量子ビットを確率振幅で見た時に2軸の回転も可能だった。よって1量子ビットの変換・SU(2)を全て表すのに必要とされる3種類(3軸回転・パウリ行列 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$)の操作が原理的に可能な事が示された。つまり、任意のユニタリー変換が行えるので、1量子ビットの任意ユニタリー変換ゲートを原理的に作れた。実際には何故に作れるのかを考えると、ここで用いている Δ はレーザーのエネルギーではなく、シュタルク効果によるエネルギー差だからである。どういう事かと言うと、通常のレーザーによる励起を考えると、 Δ はレーザーのエネルギーに相当し、そのエネルギーで回転している位相は、f秒の制度で制御しなければならず不可能である。よって補助ビットを用いる事となる。しかし、この系では、 Δ がシュタルク効果による分離程度の差なので、レーザーによる励起を使っても十分に可能なのだ。つまり、実験室系では確かに高速で位相は回転しており観測できないが、レーザーと同レベルの回転系でみると、位相のずれ方はゆっくりなのだ。実質必要なのは相対的な位相のずれであるので、必要とする位相分の電場と時間を与えてやれば、直接行う観測は難しいが、量子アルゴリズムに必要な位相のずれを作ることが出来たと言うことである。

2量子ビットにおいては数値実験でのデモンストレーションでCNゲートの操作を行えた。但し単一の操作では確率だけを考慮したCNゲートが限界であろう。位相も正しく考慮したCNゲートは出来そうにない。位相を修正する2量子ビット内の操作を加えてCNゲートとなった。補助ビットと言うような位相を修正する為に別の量子ビットは使わないで位相修正はできる。2軸の回転が行えていたので、電気双極子相互作用によるスイッチさえ行えれば、位相を修正できる。故に、合成によってCNゲートは作られたのだ。

1量子ビットの任意ユニタリー変換とCNゲートが行えたので原理的には全ての演算が行えると言える。つまり万能量子計算機の素子たりうる可能性が十分ある事を示せた。

グローバーのアルゴリズムに相当する操作を重ねる事で数値実験上では確かに成功している。NMRの様に平均値だけの出力ではなくて量子状態特有の混合状態そのものの出力も可能である。よってNMRよりも優れた素子としての可能性はありうる。

8 今後の展望

このハミルトニアンはどのような回転を行えているのかを論理的に明らかにする。グローバーのアルゴリズムを回転群で解釈する。相互作用を無くしたり起こさせたりがグローバーで必要か。振動電場を利用してどのような操作が可能か。相互作用が本当に分極子分極子相互作用で行われるか。

相互作用の導入の仕方が δ_3 で本当に妥当か。
グローバーのアルゴリズムがどこまでのデコヒーレンスに耐えられるか。
本当に耐えられる程度にデコヒーレンスを押さえる所まで科学技術が発展するか。
多量子ビットになるとどう振舞うか。
多量子ビットが実現可能か
 δ_3 を固定にしても上のユニタリー変換に相当する物があるろう。
量子ビットに別の電場を与えなくとも振動電場で可能だろう。
実際の入出力がどのように行われるかの詳細を検討する。
どの程度のデコヒーレンスなら C N Gate と Grover が耐えるか示そう。

9 結論

この励起子ポラリトンモードを利用した固体素子は、原理上において全ての量子ゲートが組める。加えて、2軸の回転操作を行えるので、より量子アルゴリズムに適したゲートを、作成できるという汎用性も備えている。。ひいては量子計算機素子としての応用可能性を十分に秘めている。

つまり NMR と同様のハミルトニアンなので同様の操作を行い同一の演算を行える。但し NMR の様にアンサンブル平均を用いてはいない。これらのことより量子計算機素子たりうる可能性をこの素子は十分に持っている。また同様のハミルトニアンで表される物理系においても同じ事が言える。具体的には励起子や電気双極子を利用した素子が同じであろうと思われる。

ここの数値計算で使ったハミルトニアンは非常に単純な形をしている。2状態系でラビ振動をする物理系のハミルトニアンを独立にしたテンソル積。それに一つの固有状態にのみ影響を及ぼす δ_3 の相互作用だけを加えた形。よってこのハミルトニアンは汎用性を持ち、この結果も汎用性がある。

10 謝辞

多大な御指導をして下さった広島大学大学院先端物質科学研究科量子物質科学専攻の高橋先生と飯沼先生に謝辞を述べる。この研究を行う契機を下された広島大学理学研究科ハドロン物理学研究室の故宮村修先生と岩田プロジェクトに謝辞を述べる。この研究の元となるアイデアやデータを下さった広島大学大学院先端物質科学研究科量子機能電子工学専攻の山西先生と角谷先生に謝辞を述べる。

そして量子計算機の造詣を深めてくれる事となった「量子セミナー」を開いて下さった飯沼先生、講義をして下さった先生達にここに感謝の意を記す。

参考文献

- [1] Y.Kadoya, K.Kameda, M.Yamanishi, T.Nishikawa,
T.Kannari, T.Ishihara and O.Ogura, Appl.Phys.Lett.vol68,281(1997).
- [2] 山西正道 角屋豊
”半導体キャビティ Q E D による量子操作：
 TH_Z 電磁場発生, 量子ビット, 制御 NOT”
広島県産業科学技術研究所「岩田プロジェクト」2000.
- [3] 宮村修
”A numerical study of Yamanishi Q-bit model”
広島県産業科学技術研究所「岩田プロジェクト」2000.
- [4] 高橋徹 飯沼昌隆 遠藤一太 角屋豊 宮村修 村上貴洋 山西正道
半導体キャビティ Q E D による量子操作：
 TH_Z 電磁場発生, 量子ビット, 制御 NOT”
広島県産業科学技術研究所「岩田プロジェクト」2001.
- [5] A.ヘイ, R.アレン 編 原 康夫, 中山 健, 松田 和典 訳
『ファインマン計算機科学』 岩波書店 1999.
- [6] 大矢 雅則 著
『パリティ物理学コース クローズアップ 量子コンピューターの数理』
丸善株式会社 1999.
- [7] C.P.Wjilliams & S.H.Clearwater 著
『量子コンピューティング 量子コンピュータの実現へ向けて』
シュプリンガー・フェアラーク東京株式会社 2000.
- [8] Michel A.Nielsen & Isaac L.Chuang
『Quantum Computation and Quantum Information』
Cambridge University Press 2000.
- [9] Artur Ekert and Richard Jozsa
”Quantum computation and Shor’s factoring algorithm”
Reviews of Modern Physics, Vol.68, No.3, July 1996.
- [10] S.Somaroo, C.H.Tseng, T.F.Havel, R.Laflamme, and D.G.Cory
”Quantum Simulations on a Quantum Computer”
1999 The American Physical Society.Volume 82, Number 26.

- [11] Marco Pravia, Evan Fortunato, Yaakov Weinstein, Mark D.Price, Grum Teklemariam, Richard J.Nelson, Yehuda Sharf, Shymal Somaroo, C.H.Tseng, Timothy F.Havel, David G.Cory
 ”Observations of Quantum Dynamics by Solution-State NMR Spectroscopy”
 quant-ph/9905061 v2 18 Jun. 1999.

11 付録

11.1 \otimes : 直積 (テンソル積)

\otimes の定義を書く。

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & \dots \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & \dots \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (31)$$

この時の $A \otimes B$ は

$$A \otimes B \equiv \begin{pmatrix} A_{11} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots \\ B_{21} & B_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} & A_{12} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots \\ B_{21} & B_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} & \dots \\ A_{21} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots \\ B_{21} & B_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} & A_{22} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots \\ B_{21} & B_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (32)$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}B & A_{12}B & A_{13}B & \dots \\ A_{21}B & A_{22}B & A_{23}B & \dots \\ A_{31}B & A_{32}B & A_{33}B & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (33)$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12} & A_{11}B_{13} & \dots \\ A_{11}B_{21} & A_{11}B_{22} & A_{11}B_{23} & \dots \\ A_{11}B_{31} & A_{11}B_{32} & A_{11}B_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (34)$$

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} E1_1 & a_1 \\ a_1^* & E2_1 \end{pmatrix} \otimes 1_2 + 1_2 \otimes \begin{pmatrix} E1_2 & a_2 \\ a_2^* & E2_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_3 \end{pmatrix} \quad (35)$$

$$= \begin{pmatrix} E1_1 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & E1_1 & 0 & a_1 \\ a_1^* & 0 & E2_1 & 0 \\ 0 & a_1^* & 0 & E2_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E1_2 & a_2 & 0 & 0 \\ a_2^* & E2_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E1_2 & a_2 \\ 0 & 0 & a_2^* & E2_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \delta_3 \end{pmatrix} \quad (36)$$

$$= \begin{pmatrix} E1_1 + E1_2 & a_2 & a_1 & 0 \\ a_2^* & E1_1 + E2_2 & 0 & a_1 \\ a_1^* & 0 & E2_1 + E1_2 & a_2 \\ 0 & a_1^* & a_2^* & E2_1 + E2_2 + \delta_3 \end{pmatrix} \quad (37)$$

11.2 直積空間におけるハミルトニアンの合成

$$\mathcal{H} \neq \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \quad (38)$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes 1_2 + 1_1 \otimes \mathcal{H}_2 \quad (39)$$

11.3 可逆計算

可逆計算とは、計算前の情報から一意的に結果が求められ、かつ、その結果から一意的に計算前の情報が求められる計算の事である。全単射（1対1対応）の関係である。どちらにも計算が可能と言う事なので、計算前の情報量と、計算後の情報量が、等しくなくてはならない。何故なら、少ない情報量を増加させようとする、一意的に求められないから。誤解のないように付け加える。規則を作り、数値を増やす事は出来る。しかし、同じ情報の見かけを変えただけにすぎず、情報量の増加にはならない。やはり、

$$\text{「可逆計算」} = \text{「情報量が保存される一意的な変化」} \quad (40)$$

である。

物理現象において、保存則は基本である。また、時間反転の対称性が成り立つ変化（現象）は、多数ある。以下で、保存則が有り、時間反転対称性の有る、そんな物理現象を考える。第一に、その保存量は、系を表す情報量と言える。よって、「情報量 = 保存量」と見る事が出来る。第二に、時間反転対称性は、逆の変化により、必ず元の状態に戻る事を意味する。よって、始状態と終状態が、1対1対応の関係と見る事が出来る。この2つにより、次の事が示せた。

$$\begin{aligned} \text{「情報量が保存される一意的な変化」} \\ = \text{「保存則かつ時間反転対称性の有る物理現象」} \end{aligned} \quad (41)$$

だから、次の事が示せた。

$$\text{「可逆計算」} = \text{「情報量が保存される一意的な変化」} \quad (42)$$

$$= \text{「保存則かつ時間反転対称性の有る物理現象」} \quad (43)$$

つまり、保存則かつ時間反転対称性の有る物理現象の変化は、可逆計算である。